在 Orlicz 空间中混合阶广义导数的存在性及其估计

刘 兴 龙

（哈尔滨工业大学）

关于 L_p 空间中混合阶广义导数的存在性及其估计的问题，首先由 Никольский[1] 用最佳逼近的方法研究．丁夏畦[2,3]，Солнцев[4]，Ильин[5] 也研究了二阶混合广义导数的存在性，得到进一步的结果．然而均未得到在一般情形下的精确估计．本文应用 Calderòn-Zygmund[6] 高维奇异积分的收敛性定理和 Poisson 积分得出在 E_n 中有界域 G 上之任意阶混合广义导数在 Orlicz 空间中的存在性及估计．特别地，当 N 函数 $M(u)$ 取为 $|u|^p p^{-1}$ 时，便是 L_p 空间中混合阶广义导数的存在性及估计．本文的证明见文献[7]．

一、本文主要结果

设 x 为 E_n 中的点，$|x|$ 为欧氏模，G 为 E_n 中的区域．$L_M^*(G)$ 表示由 N 函数 $M(u)$ 于 G 上生成的 Orlicz 空间．用 $\|\cdot\|_{M(G)}$ 表示它的模．在本文中总假设 N 函数 $M(u)$ 连同其余 N 函数均满足 Δ_2 条件．G 为 E_n 中的有界域．

定义 如果 $f(x)\in L_M^*(G)$，而且对每一个变量 $x_i(i=1,\cdots,n)$，$f(x)$ 具有直到整数 r_i 阶的属于 $L_M^*(G)$ 之非混合广义导数．则称 $f(x)\in L_M^{*(r)}(G)$，$\boldsymbol{r}=(r_1,\cdots,r_n)$．定义其模为

$$\|f(x)\|_{L_M^{*(r)}(G)}=\|f(x)\|_{M(G)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{K_i<r_i}\|D_i^{K_i}f(x)\|_{M(G)},$$

其中 $D_i^{K_i}=\dfrac{\partial^{K_i}}{\partial x_i^{K_i}}$，$K_i$ 为正整数．如果 $f(x)\in L_M^*(G)$，对每个变量 x_i，具有 r_i 阶广义导数 $D_i^{r_i}f(x)\in L_M^*(G)$．则称 $f(x)\in \hat{L}_M^{*(r)}(G)$，定义模以

$$\|f(x)\|_{\hat{L}_M^{*(r)}(G)}=\|f(x)\|_{M(G)}+\sum_{i=1}^{n}\|D_i^{r_i}f(x)\|_{M(G)},$$

如果 $f(x)$ 及其所有非混合广义导数的支集严格属于 G，则相应的称 $f(x)\in \mathring{L}_M^{*(r)}(G)$ 或 $f(x)\in \mathring{\hat{L}}_M^{*(r)}(G)$．

显然，$L_M^{*(r)}(G)$ 和 $\hat{L}_M^{*(r)}(G)$ 是完备线性赋范空间．

本文的主要结果是下述定理：

定理 1 设 G 属于 C^l 类，如果 $f(x)\in L_M^{*(r)}(G)$．则 $f(x)$ 的所有 l 阶混合广义导数

本文 1980 年 5 月 12 日收到．

$D^\alpha f(x) \in L_M^*(G)$，并且如下估计式成立

$$\|D^\alpha f(x)\|_{M(G)} \leqslant C\|f(x)\|_{L_M^{*(L)}(G)},$$

其中 C 为与 f 无关的常数，$\boldsymbol{l}=(l, \cdots, l)$，$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = l$.

二、$\mathring{L}_M^{*(L)}(G)$ 情形定理 1 的证明

首先证明当 $f(x) \in \mathring{L}_M^{*(L)}(G)$ 时定理 1 成立. 为此不难证明以下两个定理.

定理 2 如果 $f(x) \in \mathring{L}_M^{*(r)}(G)$（或属于 $\mathring{L}_M^{*(r)}(G)$）. 则存在一串属于 $C_0^\infty(E_n)$ 的函数列 $\{f_i(x)\}$ 按模以 $f(x)$ 为极限.

定理 3 $\mathring{L}_M^{*(r)}(G)$ 与 $\mathring{L}_M^{*(r)}(G)$ 等价.

其次，我们给出在 Orlicz 空间中 Calderòn-Zygmund 高维奇异积分的收敛性定理. 用它可以得出 Poisson 积分二阶混合导数的表达式，从而导出更一般的积分表达式.

定理 4 设积分核 $K(x)$ 满足如下条件.

(1) $K(x)$ 为负 n 阶正齐次函数，即对 $\lambda > 0$ 恒有 $K(\lambda x) = \lambda^{-n}K(x)$.

(2) $K(x)$ 于 $|x| = 1$ 的球面上积分为零.

(3) 对任何 q，$1 \leqslant q < \infty$，$|K(x)|^q$ 在 $|x| = 1$ 的球面上可积.

则当 $f(x) \in L_M^*(G)$ 时，积分

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y)dy.$$

在 E_n 之任何有界域 Ω 上几乎处处收敛，并且按 $L_M^*(\Omega)$ 的模收敛于 E_n 上的某个函数 $\tilde{f}(x)$. 如果令

$$\tilde{f}^*(x) = \sup_\varepsilon |\tilde{f}_\varepsilon(x)|,$$

则如下估计式

$$\int_\Omega M[\tilde{f}^*(x)]dx \leqslant K\int_G M[f(x)]dx + K$$

及

$$\|\tilde{f}^*(x)\|_{M(\Omega)} \leqslant A\|f(x)\|_{M(G)}$$

成立. 而 K，A 为与 f 无关的常数.

定理 5 考虑积分

$$g(x) = \int_G K(x-y)f(y)dy,$$

其中

$$K(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n|x|^{n-2}}, & \text{当 } n > 2, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, & \text{当 } n = 2, \end{cases}$$

ω_n 表示 E_n 中单位球的表面积. 如果 $f(x) \in C_0^1(G)$，则 $g(x)$ 的二阶导数处处有定义，而且可以表示为

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_G^* f(y)\frac{\partial^2 K(x-y)}{\partial x_i \partial x_j}dy + \frac{\delta_{ij}}{n}f(x); \quad x \in G,$$

同时如下估计式成立

$$\int_G M\left[\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]dx \leqslant A\int_G M[f(x)]dx + A,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{M(G)} \leqslant A\|f(x)\|_{M(G)},$$

其中 A 为与 f 无关的常数，$\int^*$ 表示积分的 Cauchy 主值，即

$$\int_G^* \phi(x-y)dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G\cap|x-y|>\varepsilon} \phi(x-y)dy.$$

定理 6 设 $f(x)\in C_0^\infty(G)$，则当 $x\in G$ 时如下积分表达成立.

$$D_i^{2r}f(x) = \sum_{K=0}^{r}(-1)^K C_{r+1}^{K+1}\boldsymbol{K}^{(K+1)}D_i^{2(K+r+1)}f(x) + \sum_{K=0}^{r}(-1)^K C_r^K \boldsymbol{K}^{(K+1)}D_j^{2(K+r+1)}f(x),$$

$$\begin{aligned} D_j^2D_i^{2(r+1)}f(x) &= (r+1)D_i^{2(r+2)}f(x) + D_j^{2(r+2)}f(x)\\ &+ \sum_{K=0}^{r}(-1)^{K+1}C_{r+2}^{K+2}\boldsymbol{K}^{(K+1)}D_i^{2(K+r+3)}f(x)\\ &+ \sum_{K=0}^{r}(-1)^{K+1}C_{r+1}^{K+1}\boldsymbol{K}^{(K+1)}D_j^{2(K+r+3)}f(x), \end{aligned}$$

其中 C_n^m 为组合数，以及

$$\boldsymbol{K}f(x) = \int_G K(x-y)f(y)dy,$$

$$\boldsymbol{K}^{(m)}f(x) = \int_G K(x-y_{m-1})dy_{m-1}\int_G K(y_{m-1}-y_{m-2})dy_{m-2}\int_G\cdots\int_G K(y_1-y)f(y)dy,$$

而 $K(x)$ 为定理 5 中给出的 Poisson 积分核.

应用定理 6 给出的积分表达式，便可得出关于两个自变量的混合阶广义导数的存在性，用数学归纳法可以证明任何 l 阶的混合广义导数的存在性及估计.

定理 7 如果 $f(x)\in \mathring{L}_M^{*(l)}(G)$，则一切关于两个自变量的 l 阶混合广义导数 $D_i^\alpha D_j^{l-\alpha}f(x)$ 于 $L_M^*(G)$ 中存在，并有估计

$$\|D_i^\alpha D_j^{l-\alpha}f(x)\|_{M(G)} \leqslant A\|f(x)\|_{\mathring{L}_M^{*(l)}(G)}.$$

其中 A 为无关于 f 的常数，$1\leqslant i, j\leqslant n$, $1\leqslant \alpha < l$ 为整数，$\boldsymbol{l}=(l,\cdots,l)$.

定理 8 如果 $f(x)\in \mathring{L}_M^{*(l)}(G)$，则一切 l 阶混合广义偏导数 $D^\alpha f(x)\in L_M^*(G)$，如下估计

$$\|D^\alpha f(x)\|_{M(G)} \leqslant A\|f(x)\|_{\mathring{L}_M^{*(l)}(G)}$$

成立. 其中 A 为与 f 无关的常数，以及 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n = l$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$.

三、定理 1 的证明

为了将定理 8 的结果推广到不具支集的情形. 可以按照 Meyers 和 Serrin[8] 的方法证明 $C^\infty(G)$ 在 $L_M^{*(r)}(G)$ 中稠密，而后应用开拓和单位分解等方法即可得出定理 1. 即定理 1 的证明由下述定理实现.

定理 9 $C^\infty(G)$ 在 $L_M^{*(r)}(G)$ 中稠密.

定理 10 如果 $f(x)\in L_M^{*(l)}(G)$, $\boldsymbol{l}=(l,\cdots,l)$，则在任何严格属于 G 之子域 Ω 上，$D^\alpha f(x)\in L_M^*(\Omega)$，且有

$$\|D^\alpha f(x)\|_{M(\Omega)} \leqslant C(\Omega)\|f(x)\|_{L_M^{*(l)}(G)},$$

其中 C 与 Ω 有关而与 f 无关，$|\alpha| = l$.

定理 11 设区域

$$\Omega:\ |x'|<\sigma;\quad \varphi(x')\leqslant x_n < a,$$

其中

$$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1}),\quad |x'| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2},\quad a-\varphi(x')>\delta>0,\quad \varphi(x')\in C^l.$$

又设 $f(x)\in C^l(\bar{\Omega})$，则存在一个开拓函数 $f^*(x)$ 满足

(1) $f^*(x)$ 在连通域 $\Omega_1\cup\Omega_2$ 上有定义，其中 $\Omega_1\subset\bar{\Omega}$，而 Ω_2 是 Ω_1 关于 $x_n=\varphi(x')$ 的对称区域. 并且在 Ω_1 上有 $f^*(x)=f(x)$.

(2) $f^*(x)\in L_M^{*(l)}(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 且有估计

$$\|f^*(x)\|_{L_M^{*(l)}(\Omega_2)}\leqslant C\|f(x)\|_{L_M^{*(l)}(\Omega_1)},$$

其中 C 为无关于 f 的常数.

定理 12 如果 $G\in C^l$, $f(x)\in C^l(\bar{G})$. 则 l 阶混合偏导数 $D^\alpha f(x)(|\alpha|=l)$ 满足估计

$$\|D^\alpha f(x)\|_{M(G)}\leqslant C\|f(x)\|_{L_M^{*(l)}(G)},$$

其中 C 为无关于 f 的常数.

致谢：本文第一部分是 1962 年在王柔怀教授指导下的习作. 1963 年参加了吴从炘教授组织的讨论班后又将它推广到 Orlicz 空间，特此致谢.

参 考 文 献

[1] Никольский С. М., *Труды матем ин-та В. А. Стеклова*, **38** (1951), 244–278.
[2] 丁夏畦，数学学报，**10**(1960)，3:316—360.
[3] 丁夏畦，科学通报，**24**(1979)，6:244—246.
[4] Солнцев Ю. К., *ДАН СССР*, **141** (1961), 1:40—42.
[5] Ильин В. П., *Труды метем ин-та В. А. Стеклоеа*, **66** (1962), 227—363.
[6] Calderon, A. P. & Zygmund, A., *Amer. Jour. Math.*, **78**(1956), 2: 289—309.
[7] 刘兴龙，哈尔滨工业大学学报(即将发表).
[8] Meyers, N. & Serrin, J., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **51**(1964), 1055—1056.