$\mathbb{R}^n$ 上耦合的非线性 Schrödinger 方程的正基态解

张慧, 徐君祥*, 张福保

东南大学数学系, 南京 210096

E-mail: huihz0517@126.com, xujun@seu.edu.cn, zhangfubao@seu.edu.cn

收稿日期: 2011-08-15; 接受日期: 2012-06-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071038)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK2010420) 和江苏省普通高校研究生科研创新计划 (批准号: CXLX12_0069) 资助项目

摘要 利用 Nehari 流形的方法和集中紧性引理, 我们证明了 Schrödinger 系统

$$\begin{cases} -\Delta u + (1 + a(x))u = F_u(u, v) + \lambda v, \\ -\Delta v + (1 + b(x))v = F_v(u, v) + \lambda u \end{cases}$$

的正基态解的存在性.

关键词 非线性 Schrödinger 方程 Nehari 流形 基态解

MSC (2010) 主题分类 35J05, 35J50

1 引言

本文我们研究非线性 Schrödinger 系统

$$\begin{cases} -\Delta u + (1 + a(x))u = F_u(u, v) + \lambda v, \\ -\Delta v + (1 + b(x))v = F_v(u, v) + \lambda u \end{cases} \quad (1.1)$$

在 $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) 上正解的存在性, 其中 $\lambda > 0$ 是个实数. 类似的问题已经被广泛研究. 其中大家主要关心的是非线性耦合系统

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \beta uv^2, \\ -\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^3 + \beta vu^2 \end{cases}$$

的非平凡解、多解、径向解、非径向解和基态解的存在性, 以及解的集中性. 例如文献 [1–11]. 后来, Pomponio 和 Secchi [12] 利用 Pohozaev 等式证明了带有一般非线性项的系统

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u) + \beta uv^2, \\ -\Delta v + v = g(v) + \beta vu^2 \end{cases} \quad (1.2)$$

英文引用格式: Zhang H, Xu J X, Zhang F B. Positive ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations on $\mathbb{R}^n$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 33–43, doi: 10.1360/012011-624

的径向基态解的存在性. 另外, 在文献 [13–16] 中, 作者考虑了线性耦合的情形. 例如, Ambrosetti 等人^[14] 考察了系统

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))|u|^{q-1}u + \lambda v, \\ -\Delta v + v = (1 + b(x))|v|^{q-1}v + \lambda u, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中

$$1 < q < 2^* - 1, \quad 2^* = \begin{cases} \frac{2n}{n-2}, & n > 2, \\ +\infty, & n = 2, \end{cases}$$

当 $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 满足

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} b(x) = 0, \quad \inf_{\mathbb{R}^n} \{1 + a(x)\} > 0, \quad \inf_{\mathbb{R}^n} \{1 + b(x)\} > 0, \quad a(x) + b(x) \geq 0,$$

并借助于 PS 序列的一个表示定理得到了基态解. 受系统 (1.2) 和 (1.3) 的启发, 我们将处理带有更一般的非线性项的系统 (1.1).

本文中, 记 $\nabla F(u, v) := (F_u, F_v)$. 假设 $\lambda > 0$, $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

(V1) $\inf_{\mathbb{R}^n} \{1 + a(x)\} > \lambda$, $\inf_{\mathbb{R}^n} \{1 + b(x)\} > \lambda$,

(V2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} b(x) = 0$, $a(x) + b(x) \leq 0$,

对任意的 $0 < \lambda < 1$ 他们设 $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 满足 $F(0, 0) = 0$ 和

(F1) $|\nabla F(u, v)| \leq C(1 + |(u, v)|^{p-1})$, $2 < p < 2^*$,

(F2) 当 $|(u, v)| \rightarrow 0$ 时, $|\nabla F(u, v)| = o(|(u, v)|)$,

(F3) $\forall (u, v) \neq (0, 0)$, $s > 0$, $s \mapsto \frac{\nabla F(su, sv)(u, v)}{s}$ 是严格单调递增的,

(F4) 当 $|(u, v)| \rightarrow \infty$ 时, $\frac{F(u, v)}{u^2 + v^2} \rightarrow \infty$,

(F5) $F_u(u, v) \geq 0$, $F_v(u, v) \geq 0$, $F_u(0, v) = F_v(u, 0) = 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$,

(F6) $F_u(u, v) = F_v(v, u)$, $u > 0$, $v > 0$.

(F7) $F(u, v) \leq F(|u|, |v|)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

我们的主要结果如下:

定理 1.1 假设 (V1), (V2) 和 (F1)–(F7) 成立, 则系统 (1.1) 有个正基态解.

我们将用 Nehari 流形的方法和集中紧性引理证明定理 1.1. 首先我们把找 (1.1) 的基态解的问题转化为泛函限制在 Nehari 流形上的极小值问题. 然后我们利用集中紧性引理去解决这一极小值问题. 类似于文献 [17], 利用 $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 的单位球面的微分结构可得到一个 PS 序列. 接下来主要的困难是恢复 PS 序列的紧性. 通过比较系统 (1.1) 和它的极限系统的能量泛函值之间的关系, 我们恢复了紧性.

本文安排如下, 在第 2 节我们介绍 Nehari 流形, 并做一些准备工作; 第 3 节重点研究系统 (1.1) 的极限系统; 在第 4 节我们发现系统 (1.1) 和它的极限系统能量泛函值之间的关系; 第 5 节我们证明定理 1.1.

2 Nehari 流形

我们将使用下面的记号:

• X 代表 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, 赋予标准的内积 $\langle u, v \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx$ 和范数 $\|u\|_X^2 = \langle u, u \rangle_X$. $H = X \times X$ 赋予范数 $\|(u, v)\|_H^2 = \|u\|_X^2 + \|v\|_X^2$. 如果没有歧义的话, 下标将省略.

• 空间 $L^r(\mathbb{R}^n)$ ($2 \leq r \leq +\infty$) 的范数表示为 $|\cdot|_r$.

• 简单起见, 记 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ 为 $\int f$.

• $S = \{(u, v) \in H : \|(u, v)\|^2 = 1\}$.

• 如果 F 是 Hilbert 空间上的泛函, 那么 F' 表示它的梯度.

下面对一些条件做些说明, 它的简单证明我们在此省略.

引理 2.1 (F1) 和 (F2) 表明对任意的 $\epsilon > 0$ 存在 $C_\epsilon > 0$ 使得

$$|\nabla F(u, v)| \leq \epsilon |(u, v)| + C_\epsilon |(u, v)|^{p-1}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

而且, (F2) 和 (F3) 表明

$$0 < 2F(u, v) < \nabla F(u, v)(u, v), \quad \forall (u, v) \neq (0, 0). \quad (2.2)$$

系统 (1.1) 在 H 上的泛函为

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{1}{2} \int a(x)u^2 + \frac{1}{2} \int b(x)v^2 - \lambda \int uv - \int F(u, v).$$

如果 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 满足

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \min\{\Phi(u, v) : (u, v) \in H \setminus \{(0, 0)\}, \Phi'(u, v) = 0\},$$

那么 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 为 (1.1) 的基态解. 进一步地, 如果 $\tilde{u}, \tilde{v} > 0$ ($\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$), 那么 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 为 (1.1) 的正 (非负) 基态解.

为了找基态解, 我们将使用 Nehari 流形的方法. 这个方法的主要思想就是将找基态解的问题转化为找泛函限制在 Nehari 流形上的极小值问题. 更多关于 Nehari 流形的信息, 见文献 [17–20]. 泛函 Φ 对应的 Nehari 流形为

$$N = \{(u, v) \in H \setminus \{(0, 0)\} : \langle \Phi'(u, v), (u, v) \rangle = 0\},$$

则

$$\Phi|_N(u, v) = \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(u, v)(u, v) - F(u, v) \right]. \quad (2.3)$$

由 (2.2) 知 $\Phi|_N(u, v) > 0$. 因此我们可定义 N 上的最小能量为 $c := \inf_N \Phi$ 且 $c \geq 0$. 一般说来, N 未必是个流形. 然而在一些条件下, 我们可证得 N 是个流形. 首先我们介绍两个引理, 将在证明 N 是个流形的过程中用到.

引理 2.2 (i) (V1) 表明存在 $\alpha, \beta > 0$ 使得

$$\alpha \|(u, v)\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + \int a(x)u^2 + \int b(x)v^2 - 2\lambda \int uv \leq \beta \|(u, v)\|^2, \quad \forall (u, v) \in H.$$

(ii) 假设 (V1) 和 (F2)–(F4) 成立. 设在 H 中 $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ 且 $(u, v) \neq (0, 0)$. 那么对任意的正数列 $\{t_n\}$ 满足 $t_n \rightarrow \infty$, 我们有

$$\int \frac{F(t_n u_n, t_n v_n)}{t_n^2} \rightarrow \infty.$$

而且 $\Phi(t_n u_n, t_n v_n) \rightarrow -\infty$.

证明 显然 (i) 成立. 下面我们证明 (ii). 由于在 H 中 $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$, 那么我们可不妨设在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$, 且在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上 $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ 几乎处处成立. 因为 $(u, v) \neq (0, 0)$, 那么存在一个正测度集 Ω 使得 $(u(x), v(x)) \neq (0, 0), \forall x \in \Omega$. 从而 $t_n|(u_n(x), v_n(x))| \rightarrow \infty, x \in \Omega$. 由 (F4) 得

$$\int_{\Omega} \lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n u_n, t_n v_n)}{t_n^2(u_n^2 + v_n^2)} (u_n^2 + v_n^2) = \infty.$$

因此 (2.2) 和 Fatou 引理表明

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int \frac{F(t_n u_n, t_n v_n)}{t_n^2} = \infty.$$

利用 (i), 并注意到 (u_n, v_n) 在 H 中是有界的, 我们有

$$\Phi(t_n(u_n, v_n)) \leq \frac{t_n^2}{2} \left[\beta(\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2) - \int \frac{2F(t_n u_n, t_n v_n)}{t_n^2} \right] \rightarrow -\infty. \quad \square$$

引理 2.3 若 (V1) 和 (F1)–(F4) 成立, 则

- (i) 对任意的 $(u, v) \in H \setminus \{(0, 0)\}$, 存在 $t_{(u,v)}$ 使得如果 $g_{(u,v)}(t) := \Phi(tu, tv)$, 那么当 $0 < t < t_{(u,v)}$ 时 $g'_{(u,v)}(t) > 0$, 当 $t > t_{(u,v)}$ 时 $g'_{(u,v)}(t) < 0$.
- (ii) 存在 $\rho > 0$ 使得对任意的 $(w, z) \in S$, 有 $t_{(w,z)} \geq \rho$.
- (iii) 对于 S 的每个紧子集 W , 存在正常数 C_W 使得对任意的 $(u, v) \in W$ 有 $t_{(u,v)} \leq C_W$.

证明 (i) 因为 $g_{(u,v)}(t) = \Phi(tu, tv)$, 所以

$$g'_{(u,v)}(t) = t \left[\|u\|^2 + \|v\|^2 + \int a(x)u^2 + \int b(x)v^2 - 2\lambda \int uv - \int \frac{\nabla F(tu, tv)(u, v)}{t} \right].$$

由 (F2) 和引理 2.2(i) 知, 当 t 充分小时, $g'_{(u,v)}(t) > 0$. 再利用引理 2.2(ii) 和 (2.2) 我们有

$$\int \frac{\nabla F(tu, tv)(u, v)}{t} \geq \int \frac{2F(tu, tv)}{t^2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

从而当 t 充分大时, $g'_{(u,v)}(t) < 0$. 因此 $g_{(u,v)}(0, \infty)$ 上有极大值点. 而且, 由 (F3) 我们容易得到 $g_{(u,v)}$ 的极值点是唯一的, 则其为 $g_{(u,v)}$ 的极大值点, 并记为 $t_{(u,v)}$. 那么当 $0 < t < t_{(u,v)}$ 时 $g'_{(u,v)}(t) > 0$, 当 $t > t_{(u,v)}$ 时 $g'_{(u,v)}(t) < 0$.

(ii) 如果 $(u, v) \in N$, 那么

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 + \int a(x)u^2 + \int b(x)v^2 - 2\lambda \int uv = \int \nabla F(u, v)(u, v).$$

由 (2.1) 和引理 2.2(i) 知, 对任意的 $\epsilon > 0$ 我们有

$$\alpha(\|u\|^2 + \|v\|^2) \leq \epsilon(|u|_2^2 + |v|_2^2) + C_\epsilon(|u|_p^p + |v|_p^p) \leq \epsilon(\|u\|^2 + \|v\|^2) + CC_\epsilon(\|u\|^p + \|v\|^p).$$

从而

$$\|u\|^{p-2} + \|v\|^{p-2} \geq C_1.$$

因此存在 $\rho > 0$ 使得

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \geq \rho^2, \quad \forall (u, v) \in N. \quad (2.4)$$

又由 (i) 知对于 $(w, z) \in S$ 存在 $t_{(w,z)} > 0$ 使得 $g'_{(w,z)}(t_{(w,z)}) = 0$, 因此 $t_{(w,z)}(w, z) \in N$. 利用 (2.4) 我们知道结论成立.

(iii) 反证法. 假设存在紧集 W 和序列 $\{(u_n, v_n)\}$ 满足 $\{(u_n, v_n)\} \subset W \subset S$ 且 $t_{(u_n, v_n)} \rightarrow \infty$. 因为 W 是紧的, 所以存在 $(u, v) \in W$ 使得在 H 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$. 则引理 2.2(ii) 表明 $\Phi(t_{(u_n, v_n)}(u_n, v_n)) \rightarrow -\infty$. 然而, 由于 $t_{(u_n, v_n)}(u_n, v_n) \in N$, 我们有 $\Phi(t_{(u_n, v_n)}(u_n, v_n)) \geq 0$. 因此矛盾. 从而结论成立. $\square$

引理 2.4 假设 (V1) 和 (F1)–(F4) 成立. 那么 N 是个流形.

证明 由引理 2.3 和 [17, 命题 3.1(b)] 知 N 与 S 同胚. 因此 N 是流形. $\square$

由基态解的定义知我们可以把找 (1.1) 的基态解的问题转化为找 (1.1) 的一个非平凡解, 并且它还是 $\Phi|_N$ 的极小值点的问题. 如果 N 是 C^1 的, 那么可以直接证得 $\Phi|_N$ 上的极小值点就是 Φ 的临界点, 可参见文献 [14]. 然而由于我们假设 $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, 那么 N 未必是 C^1 的. 类似于文献 [17], 我们将借助于 S 的微分结构去证得 $\Phi|_N$ 上的极小值点就是 Φ 的临界点. 因此, 类似于在文献 [17] 中, 我们引入同胚映射 $m: S \rightarrow N$ 和泛函 $\Psi: S \rightarrow \mathbb{R}$, 且定义为

$$m(u, v) := t_{(u,v)}(u, v), \quad \Psi(u, v) := \Phi(m(u, v)),$$

其中 $t_{(u,v)}$ 的由来见引理 2.3(i). 我们有如下结论:

命题 2.5 如果 (V1) 和 (F1)–(F4) 满足的话, 那么以下结论成立:

- (i) 若 $\{(w_n, z_n)\}$ 是 Ψ 的 PS 序列, 那么 $\{m(w_n, z_n)\}$ 是 Φ 的 PS 序列.
- (ii) (w, z) 是 Ψ 的临界点当且仅当 $m(w, z)$ 是 Φ 的非平凡临界点. 而且, $\inf_S \Psi = \inf_N \Phi$.
- (iii) $\Phi|_N$ 的极小值点是 (1.1) 的解.

证明 由于 (i) 和 (ii) 的证明类似于文献 [17, 推论 3.3(b) 和 (c)] 的证明, 我们在此省略. 下面证明 (iii). 事实上, 设 $(u, v) \in N$ 满足 $\Phi(u, v) = c$, 则 $\Psi(w, z) = c$, 其中 $(w, z) = m^{-1}(u, v) \in S$. 由 (ii) 知 $\Psi(w, z) = \inf_S \Psi$. 因此 $\Psi'(w, z) = 0$. 再次利用 (ii) 得 $\Phi'(u, v) = 0$. $\square$

由命题 2.5(iii) 知, 现在我们可将找 (1.1) 的基态解的问题转化为找 Φ 限制在 N 上的极小值点的问题.

下面我们研究 Φ' 的性质.

引理 2.6 设 (F1) 和 (F2) 成立. 则 Φ' 弱序列连续, 即如果在 H 中 $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$, 那么在 H 中 $\Phi'(u_n, v_n) \rightharpoonup \Phi'(u, v)$.

证明 设在 H 中 $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$. 则存在 (u_n, v_n) 的子列, 我们不妨仍然记为 (u_n, v_n) , 满足在 $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$. 由 (F1) 知, 在 $L^{\frac{p}{p-1}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^{\frac{p}{p-1}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中

$$F_u(u_n, v_n) \rightarrow F_u(u, v), \quad F_v(u_n, v_n) \rightarrow F_v(u, v).$$

对任意的 $(\phi, \varphi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 利用 Hölder 不等式我们知道

$$\int F_u(u_n, v_n)\phi \rightarrow \int F_u(u, v)\phi, \quad \int F_v(u_n, v_n)\varphi \rightarrow \int F_v(u, v)\varphi.$$

从而易得

$$\langle \Phi'(u_n, v_n), (\phi, \varphi) \rangle \rightarrow \langle \Phi'(u, v), (\phi, \varphi) \rangle. \quad (2.5)$$

我们称 $\Phi'(u_n, v_n)$ 在 H 中有界的. 事实上, 对任意的 $(h, k) \in H$, (2.1) 和 Hölder 不等式表明

$$\left| \int F_u(u_n, v_n)h \right| \leq \epsilon \int (|u_n| + |v_n|)|h| + C_\epsilon \int (|u_n|^{p-1} + |v_n|^{p-1})|h|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \epsilon(|u_n|_2 + |v_n|_2)|h|_2 + C_\epsilon(|u_n|_p^{p-1} + |v_n|_p^{p-1})|h|_p \\
 &\leq \epsilon(\|u_n\| + \|v_n\|)\|h\| + CC_\epsilon(\|u_n\|^{p-1} + \|v_n\|^{p-1})\|h\| \\
 &< C'\|h\|,
 \end{aligned}$$

其中 $\epsilon > 0$ 是任意的. 类似地, 我们有 $|\int F_v(u_n, v_n)k| \leq C\|k\|$. 因此

$$|\langle \Phi'(u_n, v_n), (h, k) \rangle| \leq C\|(h, k)\|.$$

所以 $\Phi'(u_n, v_n)$ 在 H 中有界. 注意到 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 H 中是稠密的, 因此容易证得 (2.5) 对于任意的 $(\phi, \varphi) \in H$ 都是成立的. 因此我们的结论成立. $\square$

3 极限系统

由第 2 节知下面我们只需要找 Φ 限制在 N 上的极小值点. 在处理这一极小值问题的过程中我们需要利用极限系统的解. 因此首先介绍下 (1.1) 的极限系统以及有关的一些定义.

由于 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} b(x) = 0$, 则 (1.1) 的极限系统为

$$\begin{cases} -\Delta u + u = F_u(u, v) + \lambda v, \\ -\Delta v + v = F_v(u, v) + \lambda u. \end{cases} \quad (3.1)$$

系统 (3.1) 的泛函是

$$\Phi_\infty(u, v) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \lambda \int uv - \int F(u, v),$$

对应的 Nehari 流形是

$$N_\infty = \{(u, v) \in H \setminus \{(0, 0)\} : \langle \Phi'_\infty(u, v), (u, v) \rangle = 0\}.$$

在 N_∞ 上的最小能量定义为 $c_\infty := \inf_{N_\infty} \Phi_\infty$. 类似于 c , 我们有 $c_\infty \geq 0$. 同第 2 节中引入 m 和 Ψ 一样, 我们需引入 $m_\infty : S \rightarrow N_\infty$ 和 $\Psi_\infty : S \rightarrow \mathbb{R}$ 并定义为

$$m_\infty(u, v) := t_{(u, v)}(u, v), \quad \Psi_\infty(u, v) := \Phi_\infty(m_\infty(u, v)),$$

其中的 $t_{(u, v)}$ 可类似于引理 2.3(i) 的证明得到 (将引理 2.3(i) 中的 Φ 换成 Φ_∞). 分别用 $\Phi_\infty, N_\infty, m_\infty, \Psi_\infty$ 和 (3.1) 代替 Φ, N, m, Ψ 和 (1.1), 引理 2.4, 2.6 和命题 2.5 仍然成立. 为后面引用方便起见, 我们将上面的结论罗列如下.

命题 3.1 如果 (F1)–(F4) 成立, 且 $\lambda \in (0, 1)$, 则

- (i) N_∞ 是个流形;
- (ii) 若 $\{(w_n, z_n)\}$ 是 Ψ_∞ 的 PS 序列, 则 $\{m_\infty(w_n, z_n)\}$ 是 Φ_∞ 的 PS 序列;
- (iii) (w, z) 是 Ψ_∞ 的临界点当且仅当 $m(w, z)$ 是 Φ_∞ 的非平凡临界点. 而且 $\inf_S \Psi_\infty = \inf_{N_\infty} \Phi_\infty$;
- (iv) $\Phi_\infty|_{N_\infty}$ 的极小值点是 (3.1) 的一个解;
- (v) Φ'_∞ 是弱序列连续的.

引理 3.2 设 (F1)–(F5) 和 (F7) 成立, $\lambda \in (0, 1)$, 则极限系统 (3.1) 有个正基态解 $(u, v) \in N_\infty$ 使得 $\Phi_\infty(u, v) = c_\infty$.

证明 设 $(\bar{w}_n, \bar{z}_n) \in S$ 为 Ψ_∞ 的极小化序列. 由 Ekeland 变分原理知, 我们可设 $\Psi'_\infty(\bar{w}_n, \bar{z}_n) \rightarrow 0$. 由命题 3.1(ii) 得 $\Phi'_\infty(u_n, v_n) \rightarrow 0$, 其中 $(u_n, v_n) = m_\infty(\bar{w}_n, \bar{z}_n) \in N_\infty$. 命题 3.1(iii) 表明 $\Phi_\infty(u_n, v_n) = \Psi_\infty(\bar{w}_n, \bar{z}_n) \rightarrow \inf_S \Psi_\infty = c_\infty$.

我们断言 $\{(u_n, v_n)\}$ 在 H 中是有界的. 否则, 不妨设 $s_n := \|(u_n, v_n)\| \rightarrow \infty$. 记 $(w_n, z_n) = \frac{(u_n, v_n)}{\|(u_n, v_n)\|}$. 则存在 (w_n, z_n) 的子列, 不妨仍记为 (w_n, z_n) , 满足在 H 中 $(w_n, z_n) \rightharpoonup (w, z)$, 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(w_n, z_n) \rightarrow (w, z)$, 且在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上 $(w_n, z_n) \rightarrow (w, z)$ 几乎处处成立. 而且, Sobolev 嵌入定理表明 $\{(w_n, z_n)\}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ 是有界的, 即 $\{|w_n|_p + |z_n|_p\}$ 是有界的. 不妨设 $|w_n|_p + |z_n|_p \rightarrow A \in [0, \infty)$.

(i) 若 $A = 0$. 首先对任意的 $\epsilon > 0, s > 0$, 由 (2.1) 得

$$\left| \int F(sw_n, sz_n) \right| \leq \epsilon s^2(|w_n|_2^2 + |z_n|_2^2) + s^p C C_\epsilon(|w_n|_p^p + |z_n|_p^p).$$

又因为 $A = 0$, 那么存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > K$ 时 $s^p C C_\epsilon(|w_n|_p^p + |z_n|_p^p) < C\epsilon$. 注意到 $\{(w_n, z_n)\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ 是有界的, 因此当 $n > K$ 时

$$\left| \int F(sw_n, sz_n) \right| \leq C\epsilon.$$

从而 $\int F(sw_n, sz_n) \rightarrow 0$. 因此由引理 2.2(i), 对任意的 $s > 0$ 我们有

$$\begin{aligned} c_\infty + o(1) &= \Phi_\infty(u_n, v_n) \\ &\geq \Phi_\infty(sw_n, sz_n) \\ &\geq \frac{s^2 \alpha}{2}(\|w_n\|^2 + \|z_n\|^2) - \int F(sw_n, sz_n) \\ &\rightarrow \frac{s^2 \alpha}{2}. \end{aligned}$$

取 $s > \sqrt{\frac{2c_\infty}{\alpha}}$, 得出矛盾.

(ii) 若 $A \neq 0$, 则可不妨设在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中 $w_n \not\rightarrow 0$. 从而 P. L. Lions 紧性引理表明存在 $\delta > 0$ 和 $x_n \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\int_{B(x_n, 1)} |w_n|^2 > \delta. \quad (3.2)$$

不妨设 $x_n \in \mathbb{Z}^n$. 由于 Φ_∞ 和 N_∞ 在平移变换 $v \mapsto v(\cdot - y)$, $y \in \mathbb{Z}^n$ 下是不变的, 我们可设 $\{x_n\}$ 是有界的, 否则平移 w_n 即可. 由于在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $w_n \rightarrow w$, 则 (3.2) 表明 $w \neq 0$. 那么由引理 2.2(ii) 可推得 $\Phi_\infty(s_n w_n, s_n z_n) \rightarrow -\infty$. 但是 $\Phi_\infty(s_n w_n, s_n z_n) = \Phi_\infty(u_n, v_n) \geq 0$. 因此矛盾.

综上, $\{(u_n, v_n)\}$ 在 H 中是有界的. 不妨设 $\{(u_n, v_n)\}$ 满足在 H 中 $(u_n, v_n) \rightharpoonup (\check{u}, \check{v})$, 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (\check{u}, \check{v})$, 且在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上 $(u_n, v_n) \rightarrow (\check{u}, \check{v})$ 几乎处处成立. 由命题 3.1(v) 知 $\Phi'_\infty(\check{u}, \check{v}) = 0$.

下面我们将证明 $(\check{u}, \check{v}) \neq (0, 0)$. 类似地, 假设 $|u_n|_p + |v_n|_p \rightarrow B \in [0, \infty)$. 若 $B = 0$, 则和前面当 $A = 0$ 时的论证一样, 可得 $\int \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) \rightarrow 0$. 因此引理 2.2(i) 表明

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle \Phi'_\infty(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle \\ &\geq \alpha(\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2) - \int \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) \\ &= \alpha(\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2) + o(1). \end{aligned}$$

则在 H 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (0, 0)$. 然而注意到 $(u_n, v_n) \in N_\infty$ 和 (2.4) (用 N_∞ 代替 N , (2.4) 仍然成立), 我们知道在 H 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (0, 0)$ 是不可能的. 因此, $B \neq 0$. 从而不妨设在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_n \not\rightarrow 0$. 则 P. L. Lions 紧性引理表明存在 $y_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{B(y_n, 1)} |u_n|^2 > \delta. \quad (3.3)$$

如上 $\{x_n\}$ 一样, 可设 $\{y_n\}$ 是有界的. 由于在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_n \rightarrow \tilde{u}$, 那么 (3.3) 表明 $\tilde{u} \neq 0$. 所以 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq (0, 0)$.

注意到 $\Phi'_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$. 所以 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in N_\infty$. 则 $\Phi_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq c_\infty$. 又

$$\begin{aligned} c_\infty + o(1) &= \Phi_\infty(u_n, v_n) \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) - F(u_n, v_n) \right] \\ &\geq \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(\tilde{u}, \tilde{v})(\tilde{u}, \tilde{v}) - F(\tilde{u}, \tilde{v}) \right] + o(1) \\ &= \Phi_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) + o(1), \end{aligned}$$

其中的不等式是由 Fatou 引理和 (2.2) 推得. 所以 $\Phi_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq c_\infty$. 因此 $\Phi_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) = c_\infty$. 从而 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 是系统 (3.1) 的一个基态解.

下面需要为 (3.1) 找一个正基态解. 首先为 (3.1) 找一非负基态解. 事实上, 注意到对任意的 $(u, v) \in H$ 有 $|\nabla u|_2^2 = |\nabla|u||_2^2$, $|\nabla v|_2^2 = |\nabla|v||_2^2$. 那么 $(|\tilde{u}|, |\tilde{v}|) \in H$. 设 $\tau > 0$ 满足 $\tau(|\tilde{u}|, |\tilde{v}|) \in N_\infty$. 由 (F7) 知 $\Phi_\infty(\tau|\tilde{u}|, \tau|\tilde{v}|) \leq \Phi_\infty(\tau\tilde{u}, \tau\tilde{v})$. 又由 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in N_\infty$ 知 $\Phi_\infty(\tau\tilde{u}, \tau\tilde{v}) \leq \Phi_\infty(\tilde{u}, \tilde{v})$. 所以 $\Phi_\infty(\tau|\tilde{u}|, \tau|\tilde{v}|) \leq \Phi_\infty(\tilde{u}, \tilde{v})$. 因此 $\tau(|\tilde{u}|, |\tilde{v}|)$ 也是 Φ_∞ 在 N_∞ 上的一个极小值点, 从而是 (3.1) 的非负基态解, 并记为 (u^*, v^*) .

下面我们证明 $u^* \neq 0$, $v^* \neq 0$. 事实上, 如果 $u^* = 0$, 那么利用 (F5) 和 $\lambda > 0$, (3.1) 的第一个方程表明 $v^* = 0$. 则 $(u^*, v^*) = (0, 0)$. 这是不可能的. 因此 $u^* \neq 0$. 类似地, $v^* \neq 0$. 再次利用 (F5), 对 (3.1) 的每个方程应用极大值原理可得 $u^* > 0$, $v^* > 0$. 至此, 引理 3.2 证毕. $\square$

极限系统 (3.1) 存在正基态解表明当 $a = b = 0$ 时, 系统 (1.1) 有正基态解. 因此下面我们考虑 $a \neq 0$ 或者 $b \neq 0$ 的情形.

4 c 和 c_∞ 的比较

在本节中, 我们比较系统 (1.1) 在流形 N 上的最小能量 c 和极限系统 (3.1) 在流形 N_∞ 上的最小能量 c_∞ . c 和 c_∞ 之间的关系对后面我们恢复 Φ 的 (PS) $_c$ 序列的紧性至关重要.

引理 4.1 设 (V1), (V2) 和 (F1)–(F7) 成立, 则 $c < c_\infty$.

证明 设 $(u_0, v_0) \in N_\infty$ 为 (3.1) 的正基态解满足 $\Phi_\infty(u_0, v_0) = c_\infty$. 由 (F6) 知 (v_0, u_0) 也是 $\Phi_\infty|_{N_\infty}$ 上的极小值点. 令 $t, \tau > 0$ 使得 $t(u_0, v_0), \tau(v_0, u_0) \in N$. 由 (V2) 知 $\int (a(x) + b(x))(u_0^2 + v_0^2) \leq 0$. 则 $\int a(x)u_0^2 + \int b(x)v_0^2 \leq 0$, 或者 $\int a(x)v_0^2 + \int b(x)u_0^2 \leq 0$. 不失一般性, 可设 $\int a(x)u_0^2 + \int b(x)v_0^2 \leq 0$. 那么 $\Phi(tu_0, tv_0) \leq \Phi_\infty(tu_0, tv_0)$. 用 Φ_∞ 代替 Φ , 引理 2.3(i) 仍然成立. 因此由 $(u_0, v_0) \in N_\infty$ 得 $\Phi_\infty(tu_0, tv_0) \leq \Phi_\infty(u_0, v_0)$. 因此

$$c \leq \Phi(tu_0, tv_0) \leq \Phi_\infty(tu_0, tv_0) \leq \Phi_\infty(u_0, v_0) = c_\infty. \quad (4.1)$$

如果 $c < c_\infty$, 结论成立. 否则 $c = c_\infty$. 由 (4.1) 知 $t = 1$. 因此 $(u_0, v_0) \in N$, 且由 (4.1) 得到 $\Phi(u_0, v_0) = c$. 利用命题 2.5(iii) 推得 (u_0, v_0) 是 (1.1) 的解. 注意到 (u_0, v_0) 也是 (3.1) 的解. 则由 (1.1) 和 (3.1) 的第一个方程知 $au_0 = 0$. 从而 $a = 0$. 类似地, $b = 0$. 这与我们的条件 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ 矛盾 (见第 3 节的末尾). 因此结论成立. $\square$

5 定理 1.1 的证明

此节我们将证明定理 1.1. 首先我们利用 $\Psi|_S$ 的极小化序列得到 Φ 的 $(PS)_c$ 序列. 然后利用已得到的结论 $c < c_\infty$, 我们修复 $(PS)_c$ 序列的紧性.

证明 类似于引理 3.2 中的证明, 我们可设 $(u_n, v_n) \in N$ 满足 $\Phi'(u_n, v_n) \rightarrow 0$ 且 $\Phi(u_n, v_n) \rightarrow c$.

我们断言 $\{(u_n, v_n)\}$ 在 H 中是有界的. 否则, 可设 $s_n := \|(u_n, v_n)\| \rightarrow \infty$. 令 $(w_n, z_n) = \frac{(u_n, v_n)}{\|(u_n, v_n)\|}$. 不妨设在 H 中 $(w_n, z_n) \rightharpoonup (w, z)$, 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(w_n, z_n) \rightarrow (w, z)$, 且在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上 $(w_n, z_n) \rightarrow (w, z)$ 几乎处处成立. 类似于引理 3.2 中的证明, 可设 $|w_n|_p + |z_n|_p \rightarrow \tilde{A} \in [0, \infty)$ 且可类似排除 $\tilde{A} = 0$ 的情形. 因此 $\tilde{A} \neq 0$. 不失一般性, 设在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中 $w_n \not\rightarrow 0$. 那么 P. L. Lions 紧性引理表明存在 $\delta > 0$ 和 $x_n \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\int_{B(x_n, 1)} |w_n|^2 > \delta. \quad (5.1)$$

若 $\{x_n\}$ 是有界的, 由在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $w_n \rightarrow w$ 可知 $w \neq 0$. 则 $(w, z) \neq (0, 0)$. 对 (w_n, z_n) 应用引理 2.2(ii) 可得 $\Phi(s_n w_n, s_n z_n) \rightarrow -\infty$. 然而 $\Phi(s_n w_n, s_n z_n) = \Phi(u_n, v_n) \geq 0$. 因此矛盾.

若 $\{x_n\}$ 是无界的, 可不妨设 $|x_n| \rightarrow \infty$. 令 $\tilde{w}_n(x) = w_n(x + x_n)$, $\tilde{z}_n(x) = z_n(x + x_n)$. 因为 $\|(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n)\| = \|(w_n, z_n)\| = 1$, 所以存在 $(\tilde{w}, \tilde{z})$ 使得在 H 中 $(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n) \rightharpoonup (\tilde{w}, \tilde{z})$, 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n) \rightarrow (\tilde{w}, \tilde{z})$, 且在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上 $(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n) \rightarrow (\tilde{w}, \tilde{z})$ 几乎处处成立. 由 (5.1) 知,

$$\int_{B(0, 1)} |\tilde{w}_n|^2 > \delta.$$

注意到在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$, 所以 $\tilde{w} \neq 0$. 那么 $(\tilde{w}, \tilde{z}) \neq (0, 0)$. 因此引理 2.2(ii) 表明

$$\int \frac{F(s_n \tilde{w}_n, s_n \tilde{z}_n)}{s_n^2} \rightarrow \infty.$$

又由引理 2.2(i) 可知

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\Phi(u_n, v_n)}{\|(u_n, v_n)\|^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 + \int a(x) u_n^2 + \int b(x) v_n^2 - 2\lambda \int u_n v_n}{\|(u_n, v_n)\|^2} \right] - \int \frac{F(s_n w_n, s_n z_n)}{s_n^2} \\ &\leq \frac{\beta}{2} - \int \frac{F(s_n \tilde{w}_n, s_n \tilde{z}_n)}{s_n^2} \\ &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

因此矛盾.

综上, $\{(u_n, v_n)\}$ 在 H 中是有界的. 那么不妨设在 H 中 $(u_n, v_n) \rightharpoonup (\hat{u}, \hat{v})$, 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (\hat{u}, \hat{v})$, 而且在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上 $(u_n, v_n) \rightarrow (\hat{u}, \hat{v})$ 几乎处处成立. 引理 2.6 表明 $\Phi'(\hat{u}, \hat{v}) = 0$.

下证 $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (0, 0)$. 因为 $\{(u_n, v_n)\}$ 在 H 中是有界的, 所以我们可不妨设 $|u_n|_p + |v_n|_p \rightarrow \tilde{B} \in [0, \infty)$. 如果 $\tilde{B} = 0$, 那么类似于引理 3.2 的证明可得在 H 中 $(u_n, v_n) \rightarrow (0, 0)$. 这与 (2.4) 矛盾. 因此, $\tilde{B} \neq 0$. 不妨设在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_n \not\rightarrow 0$. 则 P. L. Lions 紧性引理表明存在 $y_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{B(y_n, 1)} |u_n|^2 > \delta. \quad (5.2)$$

我们断言 $\{y_n\}$ 是有界的. 否则可设 $\{y_n\}$ 有个子列, 仍记为 $\{y_n\}$, 满足 $|y_n| \rightarrow \infty$. 记 $\bar{u}_n, \bar{v}_n$ 为 $\bar{u}_n = u_n(\cdot + y_n)$ 和 $\bar{v}_n = v_n(\cdot + y_n)$. 类似地, 不妨设在 H 中 $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \rightharpoonup (\bar{u}, \bar{v})$, 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$, 且在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上 $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$ 几乎处处成立. 由 (5.2) 知

$$\int_{B(0, 1)} |\bar{u}_n|^2 > \delta.$$

所以 $\bar{u} \neq 0$. 注意到 $\Phi'(u_n, v_n) \rightarrow 0$ 和 $|y_n| \rightarrow \infty$, 那么 $\Phi'_\infty(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \rightarrow 0$. 由命题 3.1(v) 得 $\Phi'_\infty(\bar{u}, \bar{v}) = 0$. 则 $(\bar{u}, \bar{v}) \in N_\infty$. 因此利用 (2.3) 我们有

$$\begin{aligned} c + o(1) &= \Phi(u_n, v_n) = \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) - F(u_n, v_n) \right] \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(\bar{u}_n, \bar{v}_n)(\bar{u}_n, \bar{v}_n) - F(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \right] \\ &\geq \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(\bar{u}, \bar{v})(\bar{u}, \bar{v}) - F(\bar{u}, \bar{v}) \right] + o(1) \\ &= \Phi_\infty(\bar{u}, \bar{v}) + o(1) \\ &\geq c_\infty + o(1), \end{aligned}$$

其中的第一个不等式是由于 (2.2) 和 Fatou 引理. 那么 $c \geq c_\infty$. 这与引理 4.1 矛盾. 因此 $\{y_n\}$ 是有界的. 设 $|y_n| \leq M$. 由 (5.2) 知,

$$\int_{B(0, M+1)} |u_n|^2 > \delta.$$

又因为在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_n \rightarrow \hat{u}$, 所以 $\hat{u} \neq 0$. 因此 $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (0, 0)$.

注意到 $\Phi'(\hat{u}, \hat{v}) = 0$. 则 $(\hat{u}, \hat{v}) \in N$. 所以 $\Phi(\hat{u}, \hat{v}) \geq c$. 又由 (2.3) 知,

$$\begin{aligned} c + o(1) &= \Phi(u_n, v_n) = \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) - F(u_n, v_n) \right] \\ &\geq \int \left[\frac{1}{2} \nabla F(\hat{u}, \hat{v})(\hat{u}, \hat{v}) - F(\hat{u}, \hat{v}) \right] + o(1) \\ &= \Phi(\hat{u}, \hat{v}) + o(1), \end{aligned}$$

其中的不等式是由于 (2.2) 和 Fatou 引理. 则 $\Phi(\hat{u}, \hat{v}) \leq c$. 因此 $\Phi(\hat{u}, \hat{v}) = c$. 那么 $(\hat{u}, \hat{v})$ 是 (1.1) 的基态解. 下面类似于引理 3.2 的证明, 我们可证得系统 (1.1) 有个正基态解.

参考文献

- 1 Ambrosetti A, Colorado E. Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations. J Lond Math Soc, 2007, 75: 67–82

- 2 Ambrosetti A, Colorado E. Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations. *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2006, 342: 453–458
- 3 Ambrosetti A, Malchiodi A, Secchi S. Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials. *Arch Ration Mech Anal*, 2001, 159: 253–271
- 4 Bartsch T, Wang Z Q. Note on ground states of nonlinear Schrödinger systems. *J Partial Differential Equations*, 2006, 19: 200–207
- 5 Chang J, Liu Z. Ground states of nonlinear Schrödinger systems. *Proc Amer Math Soc*, 2010, 138: 687–693
- 6 Dancer E N, Wei J, Weth T. A priori bounds versus multiple existence solutions for a nonlinear Schrödinger system. *Proc Amer Math Soc*, 2010, 27: 953–969
- 7 Lin T C, Wei J. Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$). *Comm Math Phys*, 2005, 255: 629–653
- 8 Lin T C, Wei J. Spikes in two coupled nonlinear Schrödinger equations. *Ann Inst H Poincaré*, 2005, 22: 403–439
- 9 Liu Z, Wang Z Q. Multiple bound states of nonlinear Schrödinger systems. *Comm Math Phys*, 2008, 282: 721–731
- 10 Wei J C, Weth T. Nonradial symmetric bound states for a system of two coupled Schrödinger equations. *Rend Lincei Mat Appl*, 2007, 18: 279–293
- 11 Wei J C, Weth T. Radial solutions and phase separation in a system of two coupled Schrödinger equations. *Arch Rational Mech Anal*, 2008, 190: 83–106
- 12 Pomponio A, Secchi S. A note on coupled nonlinear Schrödinger systems under the effect of general nonlinearities. *Commun Pure Appl Anal*, 2010, 9: 741–750
- 13 Ambrosetti A. Remark on some systems of nonlinear Schrödinger equations. *Fixed Point Theory Appl*, 2008, 4: 35–46
- 14 Ambrosetti A, Cerami G, Ruiz D. Solutions of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on $\mathbb{R}^n$. *J Funct Anal*, 2008, 254: 2816–2845
- 15 Ambrosetti A, Colorado E, Ruiz D. Multi-bump solutions to linearly coupled systems of nonlinear Schrödinger equations. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2007, 30: 85–112
- 16 Belmonte-Beitia J, Pérez-García V M, Torres P J. Solitary waves for linearly coupled nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous coefficients. *J Nonlinear Sci*, 2009, 19: 437–451
- 17 Szulkin A, Weth T. The method of Nehari manifold. In: Gao D Y, Motreanu D, eds. *Handbook of Nonconvex Analysis and Applications*. Boston: International Press, 2010, 597–632
- 18 Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations. *Trans Amer Math Soc*, 1960, 95: 101–123
- 19 Nehari Z. Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations. *Acta Math*, 1961, 105: 141–175
- 20 Pankov A. Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals. *Milan J Math*, 2005, 73: 259–287

Positive ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations on $\mathbb{R}^n$

ZHANG Hui, XU JunXiang & ZHANG FuBao

Abstract By virtue of the method of Nehari manifold and concentration compactness lemma, we prove the existence of positive ground states for the following Schrödinger system

$$\begin{cases} -\Delta u + (1 + a(x))u = F_u(u, v) + \lambda v, \\ -\Delta v + (1 + b(x))v = F_v(u, v) + \lambda u. \end{cases}$$

Keywords nonlinear Schrödinger equations, Nehari manifold, ground state

MSC(2010) 35J05, 35J50

doi: 10.1360/012011-624