中国科学: 数学　2014 年　第 44 卷　第 1 期: 37 ∼ 54
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

非自治 ABS 方程的双线性化和 Casorati 行列式解

施英[①]*, 张大军[①], 赵松林[②]

① 上海大学理学院数学系, 上海 200444;
② 浙江工业大学理学院应用数学系, 杭州 310023
E-mail: shiying0707@shu.edu.cn, djzhang@staff.shu.edu.cn, songlinzhao1984@gmail.com

收稿日期: 2012-03-23; 接受日期: 2013-05-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11071157 和 11301483) 资助项目

摘要　本文给出可积非自治 Adler-Bobenko-Suris (ABS) 链方程, 并通过适当的变量变换将其转化为非自治离散双线性方程, 从而得到 Casorati 行列式解. 为完成解的验证, 在附录中, 本文给出一系列 Casorati 行列式平移公式.

关键词　非自治 ABS 链　Casorati 行列式　双线性　孤子解
MSC (2010) 主题分类　35Q51, 35Q58, 39A10

1　引言

离散可积系统是目前可积系统理论研究的热点之一, 受到越来越多专家学者的关注. 特别地, 对于定义在四方格上的离散系统

$$Q(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}; p, q) = 0, \tag{1.1}$$

其中 p 和 q 为链参数. “多维相容性” [1–4] 可以作为对可积性的一种理解. Adler 等人[4] 在附加对称性等条件下研究了形如 (1.1) 的所有多维相容离散系统, 并给出了所谓的 ABS 链方程列表 (只包括 9 个方程, 分别命名为 Q4, Q3, Q2, Q1, A2, A1, H3, H2 和 H1), 许多已知的著名离散可积方程都是这一列表的特例. 在 ABS 链方程列表中, 链参数 p 和 q 既可为常数, 也可为依赖于离散自变量的函数 $p(n)$ 和 $q(m)$, 因此, 相应地有自治和非自治离散系统. 所谓自治系统是指常系数微 (差) 分模型; 而非自治系统是指变系数微 (差) 分模型, 即系数是依赖于自变量的函数, 且不能通过变量变换从变系数转化到常系数的模型. 对于自治 ABS 链方程, 将链参数 p 和 q 替换为函数 $p(n)$ 和 $q(m)$ 后所得非自治离散系统仍具有多维相容性.

可积的非自治系统有其自身的重要性. 事实上, 大多数离散的 Painlevé 方程都是非自治的常差分方程. 此外, 对于非自治的可积偏差分方程, 它们约化得到的可积非自治映射往往恰好是离散的 Painlevé 方程. 如何得到可积的非自治离散系统? 对于形如 (1.1) 的离散系统, 将其链参数 p 和 q 替换为函数 $p(n,m)$ 和 $q(n,m)$, 即可得到非自治离散系统, 但问题在于是否仍保持可积性. 到目前为止, 奇异性限制、守恒律和代数熵等诸多准则[5–8] 都被用来检测非自治离散系统的可积性. 此外, 非自治离

英文引用格式: Shi Y, Zhang D J, Zhao S L. Solutions to the non-autonomous ABS lattice equations: Casoratians and bilinearization (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 37–54, doi: 10.1360/012013-202

散可积系统也可从离散双线性方程出发来获得. 通过适当的非自治化[9,10], 可以得到带有形变的离散指数函数的 N- 孤子解的非自治离散双线性方程.

近年来, 许多方法已经用于寻找自治 ABS 链方程的精确解[11–20]. Hietarinta 和 Zhang[14] 运用适当的参数化方法和变量变换将自治 H1, H2, H3$_\delta$ 和 Q1$_\delta$ 方程转化为双线性方程, 进而构造出了这些方程的 Casorati 行列式解. 结合上述研究成果, 本文将研究这 4 个方程的非自治情形, 其中链参数分别为依赖离散自变量 n 和 m 的函数 $p_n=p(n)$ 和 $q_m=q(m)$. 对于本文所研究的非自治离散系统, 其可积性也可由奇异性限制准则和代数熵来判定[8]. 通过类似于文献 [14] 中所给的参数化方法和变量变换, 我们将得到非自治 H1, H2, H3$_\delta$ 和 Q1$_\delta$ 方程的双线性形式及其 Casorati 行列式解.

本文的结构如下: 第 2 节列出非自治 ABS 链方程列表, 并介绍 Casorati 行列式的基本概念及相关性质; 第 3 节将研究非自治 H1, H2, H3$_\delta$ 和 Q1$_\delta$ 方程的双线性化和 Casorati 行列式解; 在附录中给出一系列 Casorati 行列式平移公式.

2 预备知识

通常, 我们使用符号 ˜ 和 ˆ 分别表示离散应变量在 n 和 m 方向上的平移, 例如,

$$u=u_{n,m},\quad \widetilde{u}=u_{n+1,m},\quad \underset{\sim}{u}=u_{n-1,m},\quad \widehat{u}=u_{n,m+1},\quad \underset{\wedge}{u}=u_{n,m-1},\quad \widehat{\widetilde{u}}=u_{n+1,m+1}.$$

通过上述简记符号, 我们可以将链方程 (1.1) 记作

$$Q(u,\widetilde{u},\widehat{u},\widehat{\widetilde{u}};p,q)=0. \tag{2.1}$$

本文所研究的非自治 ABS 方程 (列表) 如下[4,8]:

$$\mathrm{H1}:\quad (u-\widehat{\widetilde{u}})(\widetilde{u}-\widehat{u})+q_m-p_n=0, \tag{2.2a}$$

$$\mathrm{H2}:\quad (u-\widehat{\widetilde{u}})(\widetilde{u}-\widehat{u})+(q_m-p_n)(u+\widetilde{u}+\widehat{u}+\widehat{\widetilde{u}})+q_m^2-p_n^2=0, \tag{2.2b}$$

$$\mathrm{H3}_\delta:\quad p_n(u\widetilde{u}+\widehat{u}\widehat{\widetilde{u}})-q_m(u\widehat{u}+\widetilde{u}\widehat{\widetilde{u}})+\delta(p_n^2-q_m^2)=0, \tag{2.2c}$$

$$\mathrm{Q1}_\delta:\quad p_n(u-\widehat{u})(\widetilde{u}-\widehat{\widetilde{u}})-q_m(u-\widetilde{u})(\widehat{u}-\widehat{\widetilde{u}})+\delta^2p_nq_m(p_n-q_m)=0, \tag{2.2d}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q2}:\quad & p_n(u-\widehat{u})(\widetilde{u}-\widehat{\widetilde{u}})-q_m(u-\widetilde{u})(\widehat{u}-\widehat{\widetilde{u}})+p_nq_m(p_n-q_m)(u+\widetilde{u}+\widehat{u}+\widehat{\widetilde{u}})\\ & -p_nq_m(p_n-q_m)(p_n^2-p_nq_m+q_m^2)=0,\end{aligned} \tag{2.2e}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q3}_\delta:\quad & \sin(p_n+q_m)(u\widehat{\widetilde{u}}+\widetilde{u}\widehat{u})-\sin p_n(u\widetilde{u}+\widehat{u}\widehat{\widetilde{u}})-\sin q_m(u\widehat{u}+\widetilde{u}\widehat{\widetilde{u}})\\ & +\delta^2\sin p_n\sin q_m\sin(p_n+q_m)=0,\end{aligned} \tag{2.2f}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q4}:\quad & \mathrm{sn}(p_n+q_m)(u\widehat{\widetilde{u}}+\widetilde{u}\widehat{u})-\mathrm{sn}p_n(u\widetilde{u}+\widehat{u}\widehat{\widetilde{u}})-\mathrm{sn}q_m(u\widehat{u}+\widetilde{u}\widehat{\widetilde{u}})\\ & +\mathrm{sn}p_n\mathrm{sn}q_m\mathrm{sn}(p_n+q_m)(1+k^2u\widetilde{u}\widehat{u}\widehat{\widetilde{u}})=0,\end{aligned} \tag{2.2g}$$

其中 δ 为常数, $p_n=p(n)$ 和 $q_m=q(m)$ 分别为关于离散变量 n 和 m 的任意非零函数. 这里, 方程 Q3$_\delta$ 和 Q4 分别对应于 Hietarinta[21] 通过参数化方法给出的自治形式的 Q3$_\delta$ 和 Q4. 在上述 ABS 方程列表中我们省略了方程 A1$_\delta$ 和 A2. 事实上, 分别通过变换 $u\to(-1)^{n+m}u$ 和 $u\to u^{(-1)^{n+m}}$, 方程 A1$_\delta$ 等价于 Q1, A2 等价于 Q3$_{\delta=0}$.

Casorati 行列式可以看作是离散形式的 Wronski 行列式. 若给定列向量 $\boldsymbol{\psi}(n,m,l)$, 即

$$\boldsymbol{\psi}(n,m,l)=(\psi_1(n,m,l),\psi_2(n,m,l),\ldots,\psi_N(n,m,l))^{\mathrm{T}}, \tag{2.3}$$

则由列向量 $\boldsymbol{\psi}$ 可定义如下形式的 N 阶 Casorati 行列式:

$$f=|\boldsymbol{\psi}(n,m,l),\boldsymbol{\psi}(n,m,l+1),\dots,\boldsymbol{\psi}(n,m,l+N-1)|=|0,1,\dots,N-1|, \tag{2.4}$$

其中平移列向量

$$\boldsymbol{\psi}(n,m,l+i)=T_l^i(\boldsymbol{\psi}(n,m,l)),\quad i=0,1,\dots,N-1,$$

T_l^i 表示关于离散变量 l 平移算子 T 作用 i 次. 沿用文献 [22] 中采用的紧凑格式, 由列向量 $\boldsymbol{\psi}$ 及其平移列向量 $\boldsymbol{\psi}(n,m,l+i)$, 我们可以列出如下经常使用的 N 阶 Casorati 行列式:

$$|\widehat{N-1}|=|0,1,\dots,N-1|,\quad |\widehat{N-2},N|=|0,1,\dots,N-2,N|,\quad |-1,\widetilde{N-1}|=|-1,1,2,\dots,N-1|.$$

上述 Casorati 行列式是利用离散变量 l 的平移构造的. 此外, 也可以利用离散变量 n 的平移或者离散变量 m 的平移来构造相应的 Casorati 行列式. 事实上, 引进算子 E^ν, $\nu=1,2,3$,

$$E^1\boldsymbol{\psi}=\widetilde{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}(n+1,m,l),\quad E^2\boldsymbol{\psi}=\widehat{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}(n,m+1,l),\quad E^3\boldsymbol{\psi}=\bar{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}(n,m,l+1), \tag{2.5}$$

可将 Casorati 行列式写成算子 E^ν- 平移的形式

$$|\widehat{N-1}|_{[\nu]}=|\boldsymbol{\psi},E^\nu\boldsymbol{\psi},(E^\nu)^2\boldsymbol{\psi},\dots,(E^\nu)^{N-1}\boldsymbol{\psi}|,\quad \nu=1,2,3. \tag{2.6}$$

为了证明的需要, 先叙述 Casorati 行列式的两个重要性质.

命题 1 设列向量 $\boldsymbol{\psi}(n,m,l)$ 满足条件

$$\alpha_n\boldsymbol{\psi}=\overline{\boldsymbol{\psi}}-\widetilde{\boldsymbol{\psi}},\quad \beta_m\boldsymbol{\psi}=\overline{\boldsymbol{\psi}}-\widehat{\boldsymbol{\psi}}, \tag{2.7}$$

则成立等式

$$|\widehat{N-1}|_{[1]}=|\widehat{N-1}|_{[2]}=|\widehat{N-1}|_{[3]}, \tag{2.8}$$

其中 $\alpha_n=\alpha(n)$ 和 $\beta_m=\beta(m)$ 分别为关于离散变量 n 和 m 的任意非零函数.

证明 通过 (2.5) 中所定义的算子 E^ν, 我们可将关系式 (2.7) 重写为

$$E^3\boldsymbol{\psi}=(E^1+\alpha_n)\boldsymbol{\psi},\quad E^3\boldsymbol{\psi}=(E^2+\beta_m)\boldsymbol{\psi}. \tag{2.9}$$

由此可得

$$(E^3)^k=(E^1+\alpha_n)^k=(E^1)^k+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{l_j=0\\ l_j\leqslant l_{j+1}}}^{k-j}\prod_{i=1}^{j}\alpha_{n+l_i}(E^1)^{k-j},\quad k=1,2,\dots,N-1, \tag{2.10a}$$

$$(E^3)^k=(E^2+\beta_m)^k=(E^2)^k+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{l_j=0\\ l_j\leqslant l_{j+1}}}^{k-j}\prod_{i=1}^{j}\beta_{m+l_i}(E^2)^{k-j},\quad k=1,2,\dots,N-1. \tag{2.10b}$$

将 (2.10) 代入 (2.6) 即可得到关系式 (2.8). □

命题 2 [22,23] 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $N\times(N-2)$ 矩阵, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 是 N 维列向量, 则成立

$$|\boldsymbol{B},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}||\boldsymbol{B},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|-|\boldsymbol{B},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}||\boldsymbol{B},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{B},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}||\boldsymbol{B},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}|=0. \tag{2.11}$$

3 双线性化和 Casorati 行列式解

本节将导出非自治 ABS 列表 (2.2) 中 H1, H2, $\mathrm{H3}_\delta$ 和 $\mathrm{Q1}_\delta$ 模型的双线性化和 Casorati 行列式解.

将非线性方程进行双线性化的关键是引入适当的变量变换. 对于离散系统, 是否通过奇异性限制测试可作为判断其是否可积的依据之一, 如文献 [24, 25], 对于本文所研究的非自治方程, 它们通过了奇异性限制测试, 并且由奇异性限制准则给出了相关的变量变换. 但是, 基于我们对自治 ABS 方程的认识, 这里直接采用对应于自治方程的变量变换来处理非自治情形. 由此所得的双线性方程, 与自治情形相比, 唯一的不同仅在于链参数 p 和 q 由常数变为依赖于离散变量的函数 p_n 和 q_m.

与 Wronskian 技巧相仿, 将解表示成 Casorati 行列式形式包含了解的构造和解的验证两个部分. 对于解的构造, 即 $\psi_j(n,m,l)$ 的选择, 我们引进离散形式的指数函数; 对于解的验证, 我们利用附录中所给的一系列 Caosrati 行列式平移公式, 并将这些关系式应用到 Casorati 行列式所满足的恒等式 (如命题 1 和 2 所给等式).

3.1 非自治 H1 方程

对于非自治 H1 方程, 文献 [9] 给出了其双线性方程和 Casorati 行列式解. 基于文献 [14] 中自治 H1 方程的结果, 我们得到与文献 [9] 相一致的结果. 特别地, 对于解的构造, 即 $\psi_j(n,m,l)$ 的选取, 我们给出更一般的结果.

通过参数化方法

$$p_n = c - a_n^2, \quad q_m = c - b_m^2, \tag{3.1}$$

及变量变换

$$u = \frac{g}{f} - \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i - \sum_{j=m_0}^{m-1} b_j - \gamma, \tag{3.2}$$

其中 c 和 γ 是任意常数, n_0 和 m_0 是任意整数, 可将非自治 H1 方程 (2.2a) 化为双线性形式

$$\mathcal{H}_1 \equiv (\widehat{g}\widetilde{f} - \widetilde{g}\widehat{f}) + (a_n - b_m)(\widehat{f}\widetilde{f} - f\widehat{\widetilde{f}}) = 0, \tag{3.3a}$$

$$\mathcal{H}_2 \equiv (g\widehat{\widetilde{f}} - \widehat{\widetilde{g}}f) + (a_n + b_m)(f\widehat{\widetilde{f}} - \widehat{f}\widetilde{f}) = 0. \tag{3.3b}$$

命题 3 双线性方程 (3.3) 有 Casorati 行列式解

$$f = |\widehat{N-1}|_{[3]}, \quad g = |\widehat{N-2}, N|_{[3]}, \tag{3.4}$$

其中列向量 $\boldsymbol{\psi}(n,m,l)$ 满足条件

$$a_{n-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}}, \tag{3.5a}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{A}_{[m]}\boldsymbol{\phi}, \quad b_m\widehat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} + \overline{\widehat{\boldsymbol{\phi}}}, \tag{3.5b}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}(n,m,l)$ 是辅助列向量, $N \times N$ 阶变换矩阵 $\boldsymbol{A}_{[m]}$ 可逆, 下标 $_{[m]}$ 表示 $\boldsymbol{A}_{[m]}$ 仅依赖于离散变量 m, 与离散变量 n 和 l 无关. 这里平移关系式 (3.5) 关于 (n, a_n) 和 (m, b_m) 是对称的, 即若有 (3.5) 成立, 则有

$$b_{m-1}\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \overline{\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}}, \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{A}_{[n]}\boldsymbol{\omega}, \quad a_n\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \bar{\tilde{\boldsymbol{\omega}}},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{[n]}$ 与 $\boldsymbol{A}_{[m]}$ 之间关于 (n,a_n) 和 (m,b_m) 也是对称的. 通过辅助列向量 $\boldsymbol{\phi}(n,m,l)$, 我们引进了系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{[n]}$ 和 $\boldsymbol{A}_{[m]}$, 这有利于选取更一般的 $\boldsymbol{\psi}(n,m,l)$. 另外, 引进 $\boldsymbol{\phi}(n,m,l)$ 在 Casorati 行列式解的验证中是必须的, 因为通过 $\boldsymbol{\phi}(n,m,l)$ 我们得到了一系列公式, 如 (A.8b) 和 (A.8d).

证明　显然对于 $\mathcal{H}_1$, 我们只需证明

$$\underset{\wedge}{\underset{\sim}{\mathcal{H}}}_1 \equiv (\underset{\sim}{g}\underset{\wedge}{f} - \underset{\wedge}{g}\underset{\sim}{f}) + (a_{n-1}-b_{m-1})(\underset{\sim}{f}\underset{\wedge}{f} - \underset{\wedge}{\underset{\sim}{f}}f) = 0, \tag{3.6}$$

其中 $f=|\widehat{N-1}|_{[3]}$. 另外, 由附录中的公式, 令 $c=0$, 并且 $\underset{\wedge}{\underset{\sim}{f}}$ 为 (A.7g) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(2,1,3)$, $\underset{\wedge}{f}$ 和 $\underset{\sim}{f}$ 为 (A.7a) 分别取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,2,3)$ 和 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,3)$, $\underset{\sim}{g}+a_{n-1}\underset{\sim}{f}$ 和 $\underset{\wedge}{g}+b_{m-1}\underset{\wedge}{f}$ 为 (A.8a) 分别取 $(\mu,\kappa)=(1,3)$ 和 $(\mu,\kappa)=(2,3)$, 于是我们有

$$\begin{aligned}
\underset{\wedge}{\underset{\sim}{\mathcal{H}}}_1 \equiv\ & -(a_{n-1}-b_{m-1})\underset{\wedge}{\underset{\sim}{f}}f + \underset{\wedge}{f}(\underset{\sim}{g}+a_{n-1}\underset{\sim}{f}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\wedge}{g}+b_{m-1}\underset{\wedge}{f}) \\
=\ & -a_{n-1}^{-N+2}b_{m-1}^{-N+2}[|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-1)|_{[3]}\cdot|\widehat{N-3},\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[3]} \\
& -|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[3]}\cdot|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-1),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[3]} \\
& +|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[3]}\cdot|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-1),\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[3]}] \\
=\ & 0,
\end{aligned}$$

其中最后一个等号我们利用了命题 2, 并对应取

$$\boldsymbol{B}=(\widehat{N-3}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-1),\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)).$$

对于方程 $\mathcal{H}_2$, 我们只需证明

$$\underset{\sim}{\mathcal{H}}_2 \equiv (\widehat{f}\underset{\sim}{g} - \widehat{g}\underset{\sim}{f}) + (a_{n-1}+b_m)(\widehat{f}\underset{\sim}{f} - f\widehat{\underset{\sim}{f}}) = 0. \tag{3.7}$$

(3.7) 中, 取 $f=|\widehat{N-1}|_{[3]}$, 对于 $\widehat{\underset{\sim}{f}}$, $\underset{\sim}{f}$, $\widehat{g}-b_m\widehat{f}$, $\widehat{f}$ 和 $\underset{\sim}{g}+a_{n-1}\underset{\sim}{f}$, 由附录中的公式, 令 $c=0$, 并且分别利用 (A.7f) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(1,2,3)$, (A.7a) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,3)$, (A.8b) 取 $(\mu,\kappa)=(2,3)$, (A.7b) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,2,3)$, 以及 (A.8a) 取 $(\mu,\kappa)=(1,3)$. 于是, 我们得

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathcal{H}}_2 \equiv & -(a_{n-1}+b_m)f\widehat{\underset{\sim}{f}} - \underset{\sim}{f}(\widehat{g}-b_m\widehat{f}) + \widehat{f}(\underset{\sim}{g}+a_{n-1}\underset{\sim}{f}) \\
= & -a_{n-1}^{-N+2}b_m^{-N+2}|\boldsymbol{A}_{[m+1]}\boldsymbol{A}_{[m]}^{-1}|\cdot[|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-1)|_{[3]}\cdot|\widehat{N-3},\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[3]} \\
& -|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[3]}\cdot|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-1),\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[3]} \\
& +|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[3]}\cdot|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-1),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[3]}] \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

类似地, 这里利用了命题 2, 其中

$$\boldsymbol{B}=(\widehat{N-3}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-1),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(N-2)).$$

命题 3 证毕. □

对于 $\boldsymbol{\psi}$ 的选取, 见附录, 我们可取 (A.3) 或者 (A.4), 其中 $c=0$.

3.2　非自治 H2 方程

通过参数化 (3.1), 并取 $c=0$, 即 $p_n=-a_n^2$, $q_m=-b_m^2$, 非自治 H2 方程 (2.2b) 可化为

$$\mathrm{H2}\equiv(u-\widehat{\widetilde{u}})(\widetilde{u}-\widehat{u})+(a_n^2-b_m^2)(u+\widetilde{u}+\widehat{u}+\widehat{\widetilde{u}}-(a_n^2+b_m^2))=0. \tag{3.8}$$

作变量变换

$$u=U^2-2U\frac{g}{f}+\frac{h+s}{f}, \tag{3.9a}$$

其中

$$U=\sum_{i=n_0}^{n-1}a_i+\sum_{j=m_0}^{m-1}b_j+\gamma,\quad \gamma\ \text{是任意常数}, \tag{3.9b}$$

并且

$$s-h=\alpha f,\quad \alpha\ \text{是常数}. \tag{3.9c}$$

我们可得方程 (3.8) 的双线性形式为

$$\mathcal{H}_1\equiv(\widehat{g}\widetilde{f}-\widetilde{g}\widehat{f})+(a_n-b_m)(\widehat{f}\widetilde{f}-f\widehat{\widetilde{f}})=0, \tag{3.10a}$$

$$\mathcal{H}_2\equiv(g\widehat{\widetilde{f}}-\widehat{\widetilde{g}}f)+(a_n+b_m)(f\widehat{\widetilde{f}}-\widehat{f}\widetilde{f})=0, \tag{3.10b}$$

$$\mathcal{H}_3\equiv-(a_n+b_m)\widehat{f}\widetilde{g}+a_n\widehat{\widetilde{f}}g+b_mf\widehat{\widetilde{g}}+\widehat{\widetilde{f}}h-f\widehat{\widetilde{h}}=0, \tag{3.10c}$$

$$\mathcal{H}_4\equiv-(a_n-b_m)f\widehat{\widetilde{g}}+a_n\widetilde{f}\widehat{g}-b_m\widehat{f}\widetilde{g}+\widetilde{f}\widehat{h}-\widehat{f}\widetilde{h}=0, \tag{3.10d}$$

$$\mathcal{H}_5\equiv b_m(\widehat{f}g-f\widehat{g})+f\widehat{h}+\widehat{f}s-g\widehat{g}=0, \tag{3.10e}$$

且有关系式

$$\mathrm{H2}=\sum_{i=1}^{5}\mathcal{H}_iP_i/(f\widetilde{f}\widehat{f}\widehat{\widetilde{f}}),$$

其中

$$\begin{aligned}
P_1&=-4(a_n+b_m)[(\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}-a_n^2+b_m^2)\widetilde{f}\widehat{f}-\widehat{\widetilde{U}}\widehat{f}\widetilde{g}-(a_n-b_m)f\widehat{\widetilde{g}}],\\
P_2&=-4[(a_n-b_m)(\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}-a_n^2+b_m^2)\widetilde{f}\widehat{f}+(\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}-a_n^2+b_m^2)\widetilde{f}\widehat{g}-\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}\widehat{f}\widetilde{g}-(a_n-b_m)\widetilde{U}f\widehat{\widetilde{g}}],\\
P_3&=4[(a_n-b_m)U\widetilde{f}\widehat{f}+\widehat{U}\widetilde{f}\widehat{g}-\widetilde{U}\widehat{f}\widetilde{g}-\widetilde{f}\widehat{h}+\widehat{f}\widetilde{h}],\\
P_4&=4[(a_n+b_m)(\widehat{U}f\widehat{\widetilde{f}}-\widehat{f}\widetilde{g})+\widetilde{U}(\widehat{\widetilde{f}}g-f\widehat{\widetilde{g}})],\\
P_5&=4(a_n^2-b_m^2)\widetilde{f}\widehat{\widetilde{f}},
\end{aligned}$$

并且 U 定义为 (3.9b). 上述结果与自治情形[14] 类似.

命题 4　非自治双线性方程 (3.10) 有 Casorati 行列式解

$$f=|\widehat{N-1}|_{[3]},\quad g=|\widehat{N-2},N|_{[3]},\quad h=|\widehat{N-3},N-1,N|_{[3]},\quad s=|\widehat{N-2},\ N+1|_{[3]}, \tag{3.12}$$

其中列向量 $\boldsymbol{\psi}$ 满足命题 3 中所给关系式 (3.5).

证明　显然, 根据 H1 方程的结果易知双线性方程 (3.10a) 和 (3.10b) 成立.

对于方程 $\mathcal{H}_3$ 和 $\mathcal{H}_4$, 我们考虑其平移形式

$$\utilde{\mathcal{H}}_3 \equiv -(a_{n-1}+b_m)\widehat{\utilde{f}}g + a_{n-1}\widehat{f}\utilde{g} + b_m\utilde{f}\widehat{g} + \widehat{f}\utilde{h} - \utilde{f}\widehat{h} = 0, \tag{3.13a}$$

$$\underset{\wedge}{\utilde{\mathcal{H}}}_4 \equiv -(a_{n-1}-b_{m-1})\underset{\wedge}{\utilde{f}}g + a_{n-1}\underset{\wedge}{f}\utilde{g} - b_{m-1}\utilde{f}\underset{\wedge}{g} + \underset{\wedge}{f}\utilde{h} - \utilde{f}\underset{\wedge}{h} = 0. \tag{3.13b}$$

为了证明方程 (3.13a) 和 (3.13b), 我们采用附录中的公式, 并取 $c=0$. 对于 (3.13a), $g=|\widehat{N-2},N|_{[3]}$, $\widehat{\utilde{f}}$, $\utilde{f}$, $b_m\widehat{g}-\widehat{h}$, $\widehat{f}$ 和 $a_{n-1}\utilde{g}+\utilde{h}$ 分别为 (A.7f) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(1,2,3)$, (A.7a) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,3)$, (A.8d) 取 $(\mu,\kappa)=(2,3)$, (A.7b) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,2,3)$, 以及 (A.8c) 取 $(\mu,\kappa)=(1,3)$. 利用命题 2 并对应取

$$\boldsymbol{B}=(\widehat{N-3}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N),\utilde{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(N-2)),$$

我们有 $\utilde{\mathcal{H}}_3=0$.

对于 (3.13b), $g=|\widehat{N-2},N|_{[3]}$, $\underset{\wedge}{\utilde{f}}$, $\utilde{f}$ 和 $\underset{\wedge}{f}$ 为 (A.7a) 分别取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,1,3)$, $(\chi,\mu,\kappa)=(1,2,3)$ 和 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,3)$, $a_{n-1}\utilde{g}+\utilde{h}$ 和 $b_{m-1}\underset{\wedge}{g}+\underset{\wedge}{h}$ 为 (A.8c) 分别取 $(\mu,\kappa)=(1,3)$ 和 $(\mu,\kappa)=(2,3)$. 类似地, 利用命题 2 且对应取

$$\boldsymbol{B}=(\widehat{N-3}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N),\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\utilde{\boldsymbol{\psi}}(N-2)),$$

我们有 $\underset{\wedge}{\utilde{\mathcal{H}}}_4=0$.

最后证明 (3.10e). 事实上, 由 f,g 和 s 的表达式并注意到 $\widehat{h}-b_m\widehat{g}$, $\widehat{g}-b_m\widehat{f}$ 和 $\widehat{f}$ 分别为 (A.8d) 取 $(\mu,\kappa)=(2,3)$, (A.8b) 取 $(\mu,\kappa)=(2,3)$, 以及 (A.7b) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,2,3)$, 易得 (3.10e) 成立, 其中我们利用了命题 2, 对应取

$$\boldsymbol{B}=(\widehat{N-3}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-1),\boldsymbol{\psi}(N),\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(N-2)).$$

命题 4 证毕. □

对于 $\boldsymbol{\psi}$ 的选取, 见附录, 可取 (A.3) 或者 (A.4), 其中 $c=0$.

3.3 非自治 H3 方程

通过参数化

$$p_n=\frac{1+\alpha_n^2}{2\alpha_n},\quad q_m=\frac{1+\beta_m^2}{2\beta_m},\quad \alpha_n^2=-\frac{a_n-c}{a_n+c},\quad \beta_m^2=-\frac{b_m-c}{b_m+c},$$

非自治 H3 方程 (2.2c) 可化为两组不同的双线性方程. 第一组双线性方程为

$$\mathcal{B}_1 \equiv 2cf\widetilde{f}+(a_n-c)\widetilde{\overline{f}}\underline{f}-(a_n+c)\overline{f}\widetilde{\underline{f}}=0, \tag{3.14a}$$

$$\mathcal{B}_2 \equiv 2cf\widehat{f}+(b_m-c)\widehat{\overline{f}}\underline{f}-(b_m+c)\overline{f}\widehat{\underline{f}}=0. \tag{3.14b}$$

第二组双线性方程为

$$\mathcal{B}_1' \equiv (b_m+c)\overline{f}\widehat{\widetilde{f}}+(a_n-c)\widehat{\widetilde{\overline{f}}}f-(a_n+b_m)\widetilde{f}\widehat{\overline{f}}=0, \tag{3.15a}$$

$$\mathcal{B}_2' \equiv (a_n+c)f\widehat{\widetilde{\underline{f}}}+(b_m-c)\widehat{\widetilde{f}}\underline{f}-(a_n+b_m)\widetilde{f}\widehat{\underline{f}}=0, \tag{3.15b}$$

$$\mathcal{B}_3' \equiv (a_n-c)(b_m+c)\widehat{\underline{f}}\widetilde{\overline{f}}-(b_m-c)(a_n+c)\widetilde{\underline{f}}\widehat{\overline{f}}-2c(a_n-b_m)f\widehat{\widetilde{f}}=0. \tag{3.15c}$$

上述两组双线性方程都由相同的变量变换

$$u = AV\frac{\overline{f}}{f} + BV^{-1}\frac{\underline{f}}{f}, \quad AB = -\frac{1}{4}\delta \tag{3.16a}$$

得到, 其中

$$V = \prod_{i=n_0}^{n-1}\alpha_i \prod_{j=m_0}^{m-1}\beta_j. \tag{3.16b}$$

同时, 各自有如下关系:

$$\mathrm{H3} \equiv \frac{-\delta^2 B^{-2}V^2(a_n - c)(b_m - c)P_1 + 4\delta P_2 + 16B^2V^{-2}(a_n + c)(b_m + c)P_3}{32(a_n^2 - c^2)(b_m^2 - c^2)f\widetilde{f}\widehat{f}\widehat{\widetilde{f}}},$$

且

$$\begin{aligned}
P_1 &= \widehat{\widetilde{\overline{f}}}[(b_m - c)\widehat{\overline{f}}\mathcal{B}_1 - (a_n - c)\widetilde{\overline{f}}\mathcal{B}_2] - \overline{f}[(b_m + c)\widetilde{\overline{f}}\widehat{\mathcal{B}_1} - (a_n + c)\widehat{\overline{f}}\widetilde{\mathcal{B}_2}],\\
P_2 &= 2c[(b_m + c)(b_m - c)(\widehat{f}\widehat{\widetilde{f}}\mathcal{B}_1 + f\widetilde{f}\widehat{\mathcal{B}_1}) - (a_n + c)(a_n - c)(\widetilde{f}\widehat{\widetilde{f}}\mathcal{B}_2 + f\widehat{f}\widetilde{\mathcal{B}_2})],\\
P_3 &= \underline{\widehat{\widetilde{f}}}[(b_m + c)\underline{\widehat{f}}\mathcal{B}_1 - (a_n + c)\underline{\widetilde{f}}\mathcal{B}_2] - \underline{f}[(b_m - c)\underline{\widetilde{f}}\widehat{\mathcal{B}_1} - (a_n - c)\underline{\widehat{f}}\widetilde{\mathcal{B}_2}],
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\mathrm{H3} \equiv \frac{c}{f\widetilde{f}\widehat{f}\widehat{\widetilde{f}}}\Bigg[&A^2V^2\frac{\widetilde{\overline{f}}\widehat{f}\mathcal{B}_1' - \widehat{\overline{f}}\widetilde{f}\mathcal{B}_2'}{(a_n + c)(b_m + c)} + B^2V^{-2}\frac{\underline{\widehat{f}}\widetilde{f}\underline{\mathcal{B}}_1' - \underline{\widetilde{f}}\widehat{f}\underline{\mathcal{B}}_2'}{(a_n - c)(b_m - c)}\\
&+ AB\left(\frac{\underline{\widehat{f}}\widetilde{f}\mathcal{B}_2' + \widetilde{\overline{f}}\widehat{f}\underline{\mathcal{B}}_2'}{(a_n + c)(b_m - c)} - \frac{\underline{\widetilde{f}}\widehat{f}\mathcal{B}_1' + \widehat{\overline{f}}\widetilde{f}\underline{\mathcal{B}}_1'}{(a_n - c)(b_m + c)} + \frac{2(a_n + b_m)\widetilde{f}\widehat{f}\mathcal{B}_3'}{(a_n^2 - c^2)(b_m^2 - c^2)}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

上述结果与自治情形[14] 相类似.

对于非自治 H3 方程的 Casorati 行列式解，我们有如下命题:

命题 5 双线性方程 (3.14) 和 (3.15) 有 Casorati 行列式解

$$f = |\widehat{N-1}|_{[\nu]}, \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{3.18}$$

其列向量 $\boldsymbol{\psi}(n, m, l)$ 关于变量 (n, a_n) 和 (m, b_m) 是对称的, 并且与辅助列向量 $\boldsymbol{\omega}(n, m, l)$ 和 $\boldsymbol{\zeta}(n, m, l)$ 一起, 满足如下关系式:

$$(c - a_n)\underline{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \widetilde{\underline{\boldsymbol{\psi}}}, \tag{3.19a}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{A}_{[n]}\boldsymbol{\omega}, \quad (a_n + c)\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \widetilde{\overline{\boldsymbol{\omega}}}, \tag{3.19b}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{\zeta}, \quad (c + b_m)\overline{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\zeta} + \widehat{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}, \tag{3.19c}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{[n]}$ 和 $\boldsymbol{B}_{[l]}$ 是 $N \times N$ 阶变换矩阵, 并且矩阵乘积 $\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}$ 与离散自变量 l 无关.

证明 对于 (3.14a) 的证明, 利用 $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_1$, 即

$$\underset{\sim}{\mathcal{B}}_1 \equiv 2c\underset{\sim}{f}f + (a_{n-1} - c)\overline{f}\underset{\sim}{\underline{f}} - (a_{n-1} + c)\underset{\sim}{\overline{f}}\underline{f}. \tag{3.20}$$

在 (3.20) 中, f, $\utilde{f}$, $\overline{f}$, $\utilde{\utilde{f}}$, $\utilde{\overline{f}}$ 和 $\underline{f}$, 对应于 (A.7e) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,2)$, (A.7h) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(3,3,2)$, (A.7d) 取 $(\chi,\mu,\nu,\kappa)=(1,2,3,2)$, (A.7j) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(1,3,2)$, (A.7i) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(1,3,2)$, 以及 (A.7c) 取 $(\chi,\mu,\nu,\kappa)=(1,2,3,2)$, 进而得到

$$
\begin{aligned}
\utilde{\mathcal{B}}_1 \equiv{} & \prod_{j=0}^{N-3}(a_{n-1}-b_{m+j})^{-1}\prod_{j=0}^{N-3}(c-b_{m+j})^{-1}\prod_{j=0}^{N-3}(c+b_{m+j})^{-1}|\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}|\cdot \\
& [-|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\utilde{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[2]}\cdot|\widehat{N-3},\underline{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]} \\
& +|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\underline{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[2]}\cdot|\widehat{N-3},\utilde{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]} \\
& -|\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2),\mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}\cdot|\widehat{N-3},\utilde{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\underline{\boldsymbol{\psi}}(N-2)|_{[2]}] \\
={} & 0,
\end{aligned}
$$

上式最后一个等号使用了命题 2 中的等式, 并取

$$
\boldsymbol{B}=(\widehat{N-3}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(N-2),\utilde{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\underline{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)).
$$

这里, 为了得到系数 $|\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}|$, 我们要求 $\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}$ 与离散自变量 l 无关, 即 $\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l-1]}^{-1}=\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}$.

基于 $\boldsymbol{\psi}(n,m,l)$ 关于 n-m 的对称性易知 $\mathcal{B}_2$ 成立.

对于 $\mathcal{B}_1'$ 的证明, 利用 $\utilde{\mathcal{B}}_1'$, 即

$$
\utilde{\mathcal{B}}_1' \equiv (b_m+c)\utilde{\overline{f}}\widehat{f}+(a_n-c)\widehat{\overline{f}}\utilde{f}-(a_{n-1}+b_m)\utilde{\widehat{\overline{f}}}f. \tag{3.21}
$$

在 (3.21) 中, 我们取 $f=|\widehat{N-1}|_{[3]}$, $\utilde{\widehat{\overline{f}}}$ 为 $\overline{\text{(A.7f)}}$ 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(1,2,3)$, $\utilde{\overline{f}}$ 为 $\overline{\text{(A.7a)}}$ 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,3)$, $\widehat{f}$ 为 (A.7b), $\utilde{f}$ 为 (A.7a) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,1,3)$, $\widehat{\overline{f}}$ 为 $\overline{\text{(A.7b)}}$ 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,2,3)$. 进而, 利用命题 2, 对应取

$$
\boldsymbol{B}=(\widetilde{N-2}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(0),\boldsymbol{\psi}(N-1),\utilde{\boldsymbol{\psi}}(N-1),\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(N-1)),
$$

我们有 $\utilde{\mathcal{B}}_1'=0$.

利用 n-m 的对称性可得 $\mathcal{B}_2'$ 成立.

对于 $\mathcal{B}_3'$, 我们只需证

$$
\underset{\wedge}{\mathcal{B}}{}_3' \equiv (a_n-c)(b_{m-1}+c)\underline{f}\,\underset{\wedge}{\widetilde{\widetilde{f}}}-(a_n+c)(b_{m-1}-c)\overline{f}\,\underset{\wedge}{\underline{\widetilde{f}}}-2c(a_n-b_{m-1})\underset{\wedge}{f}\,\widetilde{f}=0. \tag{3.22}
$$

对于 (3.22) 中的 $\underline{f}$, $\underset{\wedge}{\widetilde{\widetilde{f}}}$, $\overline{f}$, $\underset{\wedge}{\underline{\widetilde{f}}}$, $\underset{\wedge}{f}$ 和 $\widetilde{f}$, 利用 (A.7c) 取 $(\chi,\mu,\nu,\kappa)=(0,1,3,1)$, $\widetilde{\text{(A.7i)}}$ 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(2,3,1)$, (A.7d) 取 $(\chi,\mu,\nu,\kappa)=(0,1,3,1)$, $\widetilde{\text{(A.7j)}}$ 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(2,3,1)$, (A.7e) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,2,1)$, 以及 $\widetilde{\text{(A.7h)}}$ 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(3,3,1)$, 可知 (3.22) 成立, 其中我们利用了命题 2, 并对应取

$$
\boldsymbol{B}=(\widetilde{N-2}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{\psi}(0),\underline{\boldsymbol{\psi}}(N-1),\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(N-1),\mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-1)).
$$

命题 5 证毕. □

对于 $\boldsymbol{\psi}$ 的选取, 见附录, 我们可取 (A.3) 或者 (A.4).

3.4 非自治 Q1 方程

与自治情形[14] 相类似, 非自治 Q1 方程有两组不同的双线性方程. 首先, 利用参数化

$$p_n = \frac{rc^2}{a_n^2 - c^2}, \quad q_m = \frac{rc^2}{b_m^2 - c^2}, \tag{3.23a}$$

其中 c 和 r 为常数, 然后通过变量变换

$$u = AV\frac{\overline{\overline{f}}}{f} + BV^{-1}\frac{f}{\underline{\underline{f}}}, \quad AB = \frac{r^2\delta^2}{16}, \tag{3.23b}$$

其中 V 定义为 (3.16b), 并且

$$\alpha_n = \frac{a_n - c}{a_n + c}, \quad \beta_m = \frac{b_m - c}{b_m + c},$$

进而所得非自治 Q1 方程 (2.2d) 的双线性方程为 (3.14), 且有关系式

$$\mathrm{Q1} \equiv \left(\alpha_n\beta_m U^2 A^2 \overline{P}_1 + \frac{r^2}{16}\alpha_n^{-1}\beta_m^{-1}(a_n+c)^{-2}(b_m+c)^{-2}\delta^2 P_2 + \alpha_n^{-1}\beta_m^{-1}U^{-2}B^2\underline{P}_1\right)\Big/ f\widetilde{f}\widehat{f}\widehat{\widetilde{f}},$$

其中

$$\begin{aligned}
&P_1 = Y\widetilde{Y} - X\widehat{X}, \quad X = \mathcal{B}_1 - 2cf\widetilde{f}, \quad Y = \mathcal{B}_2 - 2cf\widehat{f},\\
&P_2 = (a_n^2 - c^2)(b_m + c)^2(\overline{X}\underline{\widehat{X}} - 4c^2\overline{f}\,\overline{\widetilde{f}}\,\underline{\widehat{f}}\,\underline{\widehat{\widetilde{f}}}) + (a_n^2 - c^2)(b_m - c)^2(\underline{X}\overline{\widehat{X}} - 4c^2\underline{f}\,\underline{\widetilde{f}}\,\overline{\widehat{f}}\,\overline{\widehat{\widetilde{f}}})\\
&\quad - 4c^2(b_m^2 - c^2)(X\widehat{X} - 4c^2 f\widetilde{f}\widehat{f}\widehat{\widetilde{f}}) - (b_m^2 - c^2)(a_n + c)^2(\overline{Y}\underline{\widetilde{Y}} - 4c^2\overline{f}\,\overline{\widehat{f}}\,\underline{\widetilde{f}}\,\underline{\widehat{\widetilde{f}}})\\
&\quad - (b_m^2 - c^2)(a_n - c)^2(\underline{Y}\overline{\widetilde{Y}} - 4c^2\underline{f}\,\underline{\widehat{f}}\,\overline{\widetilde{f}}\,\overline{\widehat{\widetilde{f}}}) + 4c^2(a_n^2 - c^2)(Y\widetilde{Y} - 4c^2 f\widehat{f}\widetilde{f}\widehat{\widetilde{f}}).
\end{aligned}$$

因此, 非自治 Q1 方程的解自然可由命题 5 给出.

借助变量变换

$$u = W - \left(\frac{c^2}{r} - \delta^2 r\right)\frac{g}{f}, \tag{3.24a}$$

其中 c 和 r 为常数,

$$W = \sum_{i=n_0}^{n-1}\alpha_i + \sum_{j=m_0}^{m-1}\beta_j, \quad \alpha_n = p_n a_n, \quad \beta_m = q_m b_m, \quad p_n = \frac{c^2/r - \delta^2 r}{a_n^2 - \delta^2}, \quad q_m = \frac{c^2/r - \delta^2 r}{b_m^2 - \delta^2}. \tag{3.24b}$$

第二组双线性方程为

$$\mathcal{Q}_1 \equiv (b_m - \delta)\overline{\widehat{\widetilde{f}}}f + (a_n + \delta)\widehat{\widetilde{f}}\overline{f} - (a_n + b_m)\overline{\widetilde{f}}\widehat{f} = 0, \tag{3.25a}$$

$$\mathcal{Q}_2 \equiv (a_n - b_m)\overline{\widehat{\widetilde{f}}}f + (b_m + \delta)\overline{\widetilde{f}}\widehat{f} - (a_n + \delta)\widetilde{f}\overline{\widehat{f}} = 0, \tag{3.25b}$$

$$\mathcal{Q}_3 \equiv \widetilde{f}\overline{\widehat{f}} - \overline{\widetilde{f}}\widehat{f} + (b_m - \delta)\overline{\widehat{f}}\widetilde{g} - (a_n - \delta)\overline{\widetilde{f}}\widehat{g} + (a_n - b_m)\overline{f}\widehat{\widetilde{g}} = 0, \tag{3.25c}$$

$$\mathcal{Q}_4 \equiv (a_n - b_m)(\overline{\widehat{\widetilde{f}}}g - \overline{f}\widehat{\widetilde{g}}) + (a_n + b_m)(\overline{\widetilde{f}}\widehat{g} - \overline{\widehat{f}}\widetilde{g}) = 0, \tag{3.25d}$$

且有关系式

$$\mathrm{Q1} = \frac{(c^2/r - \delta^2 r)^3}{(a_n^2 - \delta^2)(b_m^2 - \delta^2)(a_n - b_m)(a_n + \delta)\overline{f}f\widetilde{f}\widehat{f}\widehat{\widetilde{f}}}\sum_{i=1}^{4}\mathcal{Q}_i P_i,$$

其中

$$\begin{aligned}P_1 &= (a_n-b_m)[-(a_n-b_m)\widetilde{f}\widehat{f}g+(a_n+b_m)f(\widehat{f}\widetilde{g}-\widetilde{f}\widehat{g})\\&\quad-(a_n^2-\delta^2)\widetilde{f}\widehat{g}g+(b_m^2-\delta^2)\widehat{f}\widetilde{g}g+(a_n^2-b_m^2)f\widetilde{g}\widehat{g}],\\P_2 &= (a_n+b_m)[(a_n-b_m)\widetilde{f}\widehat{f}g+(b_m-\delta)f(\widetilde{f}\widehat{g}-\widehat{f}\widetilde{g})+(a_n-b_m)(b_m-\delta)\widetilde{g}(\widehat{f}g-f\widehat{g})],\\P_3 &= (a_n+b_m)(a_n+\delta)[(a_n-b_m)\widetilde{f}\widehat{f}g+(b_m-\delta)\widetilde{f}f\widehat{g}-(a_n-\delta)\widehat{f}f\widetilde{g}],\\P_4 &= (a_n+\delta)f[-(a_n-b_m)\widetilde{f}\widehat{f}+(a_n-\delta)(b_m-\delta)(\widetilde{f}\widehat{g}-\widehat{f}\widetilde{g})].\end{aligned}$$

对于 (3.25) 的 Casorati 行列式解, 我们有如下命题:

命题 6 双线性方程 (3.25) 有 Casorati 行列式解

$$f=|\widehat{N-1}|_{[3]},\quad g=|-1,\widetilde{N-1}|_{[3]},\tag{3.26}$$

其中列向量 $\boldsymbol{\psi}(n,m,l)$ 关于变量 (n,a_n) 和 (m,b_m) 是对称的, 且当 $c=\delta$ 时满足关系式 (3.19). 此外还成立关系式

$$\boldsymbol{\psi}=A_{[n]}A_{[m]}\boldsymbol{\sigma},\quad (a_n+\boldsymbol{\delta})\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}},\quad (b_m+\delta)\widehat{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}+\widehat{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}},\tag{3.27}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为辅助变量且矩阵 $\boldsymbol{A}_{[n]}$, $\boldsymbol{A}_{[m]}$ 及其平移构成 Abel 群.

证明 改写 (3.25a) 得

$$\underset{\wedge}{\mathcal{Q}}_1\equiv(b_{m-1}-\delta)\widetilde{f}\underset{\wedge}{f}+(a_n+\delta)\underline{\widetilde{f}}\underset{\wedge}{f}-(a_n+b_{m-1})\underset{\wedge}{\widetilde{f}}\underline{f},\tag{3.28}$$

上式中, (A.7b) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,3)$, $\underline{(\mathrm{A.7b})}$ 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,1,3)$, (A.7a) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,2,3)$, $\underline{(\mathrm{A.7a})}$ 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,2,3)$, (A.7f) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(2,1,3)$, 以及 $\underline{f}=|-1,\widehat{N-3},\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[3]}$, 且 $c=\delta$, 我们可证明 $\underset{\wedge}{\mathcal{Q}}_1\equiv 0$. 事实上, 它与 $\underset{\wedge}{\mathcal{B}}'_2$ 相同.

对于 (3.25b), 利用 $\utilde{\mathcal{Q}}_2$, 即

$$\utilde{\mathcal{Q}}_2\equiv(a_{n-1}-b_m)\widehat{\widehat{\overline{f}}}\utilde{f}+(b_m+\delta)\overline{f}\widehat{\utilde{f}}-(a_{n-1}+\delta)f\widehat{\widehat{\overline{\utilde{f}}}}.\tag{3.29}$$

由命题 1 和 2, $f=|\widehat{N-1}|_{[2]}$, (A.7d) 取 $(\chi,\mu,\nu,\kappa)=(0,2,3,2)$, $\widehat{(\mathrm{A.7d})}$ 取 $(\chi,\mu,\nu,\kappa)=(1,2,3,2)$, (A.7e) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,1,2)$, $\widehat{(\mathrm{A.7e})}$ 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(1,1,2)$, 以及 $\widehat{(\mathrm{A.7i})}$ 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(1,3,2)$, 并取 $c=\delta$, 我们有 $\utilde{\mathcal{Q}}_2=0$.

对于 (3.25c), 利用

$$\underset{\wedge}{\utilde{\mathcal{Q}}}_3\equiv-\overline{\underset{\wedge}{f}}[\utilde{f}+(a_{n-1}-\delta)\utilde{g}]+\overline{\utilde{f}}[\underset{\wedge}{f}+(b_{m-1}-\delta)\underset{\wedge}{g}]+(a_{n-1}-b_{m-1})\overline{\underset{\wedge}{\utilde{f}}}g.\tag{3.30}$$

取 $c=\delta$, 将公式 (A.9a)–(A.9c) 取 $(\mu,\kappa)=(1,3)$ 和 $(2,3)$, 及公式 (A.10d) 代入等式 (3.30) 右端, 我们得

$$\underset{\wedge}{\utilde{\mathcal{Q}}}_3\equiv(a_{n-1}-\delta)^2Y_1-(b_{m-1}-\delta)^2Y_2+(a_{n-1}-\delta)^2(b_{m-1}-\delta)^2Y_3,$$

其中

$$\begin{aligned}Y_\mu &= f|E_\mu\boldsymbol{\psi}(-1),\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-2}|_{[3]}+\underline{f}|E_\mu\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-1}|_{[3]}-g|E_\mu\boldsymbol{\psi}(-1),\widehat{N-2}|_{[3]},\quad \mu=1,2,\\Y_3 &= |\utilde{\boldsymbol{\psi}}(-1),\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-2}|_{[3]}|\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(-1),\widetilde{N-1}|_{[3]}-|\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}(-1),\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-2}|_{[3]}|\utilde{\boldsymbol{\psi}}(-1),\widetilde{N-1}|_{[3]}\end{aligned}$$

$$+\,g|\underset{\hat{}}{\boldsymbol{\psi}}(-1),\underset{\tilde{}}{\boldsymbol{\psi}}(-1),\widetilde{\widehat{N-2}}|_{[3]},$$

并利用命题 2, 可证明 $\mathcal{Q}_3=0$.

要证明 $\mathcal{Q}_4=0$, 我们只需证明 $\mathcal{Q}'_4=\mathcal{Q}_3+\mathcal{Q}_4=0$, 即

$$\mathcal{Q}'_4\equiv-\widehat{\widehat{f}}[\widetilde{f}-(a_n+\delta)\widetilde{g}]-\widetilde{\widetilde{f}}[\widehat{f}-(b_m+\delta)\widehat{g}]+(a_n-b_m)\widehat{\widetilde{\widetilde{f}}}g=0,\tag{3.32}$$

借助公式 (A.10a)–(A.10c) 取 $(\mu,\kappa)=(1,3)$ 和 $(2,3)$, 及公式 (A.10e), 当 $c=\delta$ 时, 我们将 $\mathcal{Q}'_4$ 改写为 $\mathcal{Q}'_4\equiv(a_n+\delta)^2Z_1-(b_m+\delta)^2Z_2-(a_n+\delta)^2(b_m+\delta)^2Z_3$, 其中

$$\begin{aligned}
Z_\mu&=f|\mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(-1),\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-2}|_{[3]}+\underset{\bar{}}{f}|\mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-1}|_{[3]}-g|\mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(-1),\widehat{N-2}|_{[3]},\quad \mu=1,2,\\
Z_3&=|\mathring{E}^1\boldsymbol{\psi}(-1),\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-2}|_{[3]}|\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-1}|_{[3]}-|\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(-1),\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-2}|_{[3]}\\
&\quad\times|\mathring{E}^1\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-1}|_{[3]}+g|\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(-1),\mathring{E}^1\boldsymbol{\psi}(-1),\widetilde{N-2}|_{[3]},
\end{aligned}$$

由命题 2, 上式为 0 成立. □

对于 $\boldsymbol{\psi}$ 的选取, 见附录, 与变换矩阵一起, 我们可取 (A.3) 或者 (A.4), 取 $c=\delta$.

4 结论

本文得到了非自治 ABS 列表中 H1, H2, H3$_\delta$ 和 Q1$_\delta$ 模型的双线性形式和 Casorati 行列式解. 我们利用了与自治情形[14] 相似的变量变换, 所得到的双线性方程及其 Casorati 行列式解的结构也与自治情形相类似. 另外, 在附录中, 我们列出了一系列非自治情形下的 Casorati 行列式平移公式.

通过研究非自治形式的双线性方程和 Casorati 行列式解, 我们可清楚地看到自治与非自治 ABS 链方程之间的紧密联系, 表现如下:

$$\begin{aligned}
&\text{链参数}:(a,b)\to(a_n,b_m),\\
&\text{线性函数}:an+bm\to\sum_{i=n_0}^{n-1}a_i+\sum_{j=m_0}^{m-1}b_j,\\
&\text{离散势函数}:\left(\frac{a+k}{a-k}\right)^n\left(\frac{b+k}{b-k}\right)^m\to\prod_{i=n_0}^{n-1}\left(\frac{a_i+k}{a_i-k}\right)\prod_{j=m_0}^{m-1}\left(\frac{b_j+k}{b_j-k}\right).
\end{aligned}$$

此外, 本文的研究结果也给出了一种寻找可积非自治离散系统的方法, 即利用恰当的形变关系[9], 将带链参数的自治双线性方程转化成相应的非自治形式, 在此基础上反过来通过变量变换由所得非自治双线性方程推导出可积的非自治 ABS 链方程. 特别地, 由本文所得结果可以看到这些形变关系可保持自治和非自治形式的 ABS 链方程的精确解结构的一致性. 论文结果有望通过约化应用于离散的 Painlevé 方程.

参考文献

1 Nijhoff F W, Walker A J. The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier systems. Glasg Math J, 2001, 43: 109–123

2 Nijhoff F W. Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system. Phys Lett A, 2002, 297: 49–58

3 Bobenko A I, Suris Y B. Integrable systems on quad-graphs. Int Math Res Not, 2002, 11: 573–611
4 Adler V E, Bobenko A I, Suris Y B. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. Comm Math Phys, 2003, 233: 513–543
5 Grammaticos B, Ramani A, Papageorgiou V. Do integrable mappings have the Painlevé property? Phys Rev Lett, 1991, 67: 1825–1828
6 Papageorgiou V, Grammaticos B, Ramani A. Integrable lattices and convergence acceleration algorithms. Phys Lett A, 1993, 179: 111–115
7 Sahadevan R, Rasinb O G, Hydon P E. Integrability conditions for nonautonomous quad-graph equations. J Math Anal Appl, 2007, 331: 712–726
8 Grammaticos B, Ramani A. Singularity confinement property for the (non-autonomous) Adler-Bobenko-Suris integrable lattice equations. Lett Math Phys, 2010, 92: 33–45
9 Kajiwara K, Ohta Y. Bilinearization and Casorati determinant solution to the non-autonomous discrete KdV equation. J Phys Soc Japan, 2008, 77: 054004
10 Kajiwara K, Ohta Y. Bilinearization and Casorati determinant solutions to non-autonomous 1+1 dimensional discrete soliton equations. MI Preprint Series, 2009, B13: 53–73
11 Atkinson J, Hietarinta J, Nijhoff F W. Seed and soliton solutions for Adler's lattice equation. J Phys A, 2007, 40: F1–F8
12 Atkinson J, Hietarinta J, Nijhoff F W. Soliton solutions for Q3. J Phys A, 2008, 41: 142001
13 Nijhoff F W, Atkinson J, Hietarinta J. Soliton solutions for ABS lattice equations: I. Cauchy matrix approach. J Phys A, 2009, 42: 404005
14 Hietarinta J, Zhang D J. Soliton solutions for ABS lattice equations: II. Casoratians and bilinearization. J Phys A, 2009, 42: 404006
15 Atkinson J, Nijhoff F W. A constructive approach to the soliton solutions of integrable quadrilateral lattice equations. Comm Math Phys, 2010, 299: 283–304
16 Nijhoff F W, Atkinson J. Elliptic N-soliton solutions of ABS lattice equations. Int Math Res Not, 2010, 20: 3837–3895
17 Butler S, Joshi N. An inverse scattering transform for the lattice potential KdV equation. Inverse Problems, 2010, 26: 5012–39
18 Zhang D J, Hietarinta J. Generalized solutions for the H1 model in ABS list of lattice equations. In: Ma W X, Hu X B, Liu Q P, eds. Nonlinear and Modern Mathematical Physics. AIP Conf Proc, vol. 1212. Melville, NY: Amer Inst Phys, 2010, 154–161
19 Shi Y, Zhang D J. Rational solutions of the H3 and Q1 models in the ABS lattice list. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2011, 7: 046
20 Zhang D J, Zhao S L. Solutions to the ABS lattice equations via generalized Cauchy matrix approach. Stud Appl Math, 2013, 131: 72–103
21 Hietarinta J. Searching for CAC-maps. J Nonlinear Math Phys, 2005, 12: 223–230
22 Freeman N C, Nimmo J J C. Soliton solutions of the Korteweg de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili equations: the Wronskian technique. Phys Lett A, 1983, 95: 1–3
23 Aitken A C. Determinants and Matrices. Edinburgh: Interscience Publishers, 1956
24 Maruno K, Kajiwara K, Nakao S, et al. Bilinearization of discrete soliton equations and singularity confinement. Phys Lett A, 1997, 229: 173–182
25 Kajiwara K, Maruno K, Oikawa M. Bilinearization of discrete soliton equations through the singularity confinement test. Chaos Solitons Fractals, 2000, 11: 33–39
26 Zhang D J. Notes on solutions in Wronskian form to soliton equations: KdV-type. ArXiv:nlin.SI/0603008, 2006

附录 A

对于 Casorati 行列式

$$f = |\widehat{N-1}|_{[\nu]}, \quad g = |\widehat{N-2}, N|_{[\nu]}, \quad h = |\widehat{N-2}, \quad N+1|_{[\nu]}, \quad s = |\widehat{N-3}, N-1, N|_{[\nu]}, \tag{A.1}$$

其中 $\nu = 1, 2, 3$, 假设其基本列向量 $\boldsymbol{\psi}(n, m, l)$ 满足如下关系式:

$$(a_{n-1} - c)\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}}, \quad (b_{m-1} - c)\underset{\hat{}}{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \overline{\underset{\hat{}}{\boldsymbol{\psi}}}, \tag{A.2a}$$

且其辅助列向量 $\boldsymbol{\omega}(n,m,l)$, $\boldsymbol{\phi}(n,m,l)$, $\boldsymbol{\zeta}(n,m,l)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(n,m,l)$ 满足关系式

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{A}_{[n]}\boldsymbol{\omega},\quad (a_n+c)\widetilde{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\omega}+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}, \tag{A.2b}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{A}_{[m]}\boldsymbol{\phi},\quad (a_n+c)\widehat{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\phi}+\widehat{\widehat{\boldsymbol{\phi}}}, \tag{A.2c}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{\zeta},\quad (c+b_m)\overline{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{\zeta}+\widehat{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}, \tag{A.2d}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{A}_{[n]}\boldsymbol{A}_{[m]}\boldsymbol{\sigma},\quad (a_n+c)\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}},\quad (b_m+c)\widehat{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}+\widehat{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}, \tag{A.2e}$$

其中 c 是任意常数, $N\times N$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{[n]}$, $\boldsymbol{A}_{[m]}$ 和 $\boldsymbol{B}_{[l]}$ 分别只依赖于离散变量 n, m 和 l, $\boldsymbol{A}_{[n]},\boldsymbol{A}_{[m]}$ 及其平移构成 Abel 群, 且矩阵乘积 $\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}$ 与离散变量 l 无关, 则关于上述 Casorati 行列式 (A.1) 可有如下一系列平移公式.

首先, 给出满足关系式 (A.2) 的列向量 $\boldsymbol{\psi}$ 及其变换矩阵 $\boldsymbol{A}_{[n]}$, $\boldsymbol{A}_{[m]}$ 和 $\boldsymbol{B}_{[l]}$ 的具体形式. 一种具体形式可取为

$$\boldsymbol{\psi}(n,m,l)=\boldsymbol{\psi}^{+}(n,m,l)+\boldsymbol{\psi}^{-}(n,m,l), \tag{A.3a}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(n,m,l)=(\psi_1^{\pm}(n,m,l),\psi_2^{\pm}(n,m,l),\ldots,\psi_N^{\pm}(n,m,l))^{\mathrm{T}}, \tag{A.3b}$$

其中

$$\psi_r^{\pm}(n,m,l)=\rho_r^{\pm}(c\pm k_r)^l\prod_{i=n_0}^{n-1}(a_i\pm k_r)\prod_{j=m_0}^{m-1}(b_j\pm k_r),\quad r=1,2,\ldots,N, \tag{A.3c}$$

且 $\rho_r^{\pm}$ 和 k_r 为常数, 相应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{A}_{[n]}=\mathrm{Diag}(A_{[n]_1}(k_1,n),\ldots,A_{[n]_N}(k_N,n)),\quad A_{[n]_r}(k_r,n)=\prod_{i=n_0}^{n-1}(a_i^2-k_r^2), \tag{A.3d}$$

$$\boldsymbol{A}_{[m]}=\mathrm{Diag}(A_{[m]_1}(k_1,m),\ldots,A_{[m]_N}(k_N,m)),\quad A_{[m]_r}(k_r,m)=\prod_{j=m_0}^{m-1}(b_j^2-k_r^2), \tag{A.3e}$$

$$\boldsymbol{B}_{[l]}=\mathrm{Diag}(B_{[l]_1}(k_1,l),\ldots,B_{[l]_N}(k_N,l)),\quad B_{[l]_r}(k_r,l)=(c^2-k_r^2)^l, \tag{A.3f}$$

并且通过 $\boldsymbol{\psi}$ 和关系式 (A.2b)–(A.2e), 其各自对应的辅助列向量 $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 也可唯一确定.

$\boldsymbol{\psi}$ 的另一种具体形式可取为

$$\boldsymbol{\psi}(n,m,l)=\mathcal{A}_{+}\boldsymbol{\psi}^{+}(n,m,l)+\mathcal{A}_{-}\boldsymbol{\psi}^{-}(n,m,l), \tag{A.4a}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(n,m,l)=(\psi_1^{\pm}(n,m,l),\psi_2^{\pm}(n,m,l),\ldots,\psi_N^{\pm}(n,m,l))^{\mathrm{T}}, \tag{A.4b}$$

其中

$$\boldsymbol{\psi}_r^{\pm}(n,m,l)=\frac{1}{(r-1)!}\partial_{k_1}^{r-1}\left[\rho_1^{\pm}(c\pm k_1)^l\prod_{i=n_0}^{n-1}(a_i\pm k_1)\prod_{j=m_0}^{m-1}(b_j\pm k_1)\right],\quad r=1,2,\ldots,N, \tag{A.4c}$$

且 $\mathcal{A}_{\pm}$ 为非奇异下三角 Toeplitz 矩阵[26]. 相应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{A}_{[n]}=(a_{s,i}(k_1))_{N\times N}, a_{s,i}(k_1)=\begin{cases}\dfrac{\partial_{k_1}^{s-i}}{(s-i)!}\displaystyle\prod_{i=n_0}^{n-1}(a_i^2-k_1^2), & s\geqslant i,\quad s,j=1,\ldots,N,\\ 0, & s<i,\quad s,j=1,\ldots,N,\end{cases} \tag{A.4d}$$

$$\boldsymbol{A}_{[m]}=(a_{s,j}(k_1))_{N\times N}, a_{s,j}(k_1)=\begin{cases}\dfrac{\partial_{k_1}^{s-j}}{(s-j)!}\displaystyle\prod_{j=m_0}^{m-1}(b_j^2-k_1^2), & s\geqslant j,\quad s,j=1,\ldots,N,\\ 0, & s<j,\quad s,j=1,\ldots,N,\end{cases} \tag{A.4e}$$

$$\boldsymbol{B}_{[l]}=(b_{s,j}(k_1))_{N\times N}, b_{s,j}(k_1)=\begin{cases}\dfrac{\partial_{k_1}^{s-j}}{(s-j)!}(c^2-k_1^2)^l, & s\geqslant j,\quad s,j=1,\ldots,N,\\ 0, & s<j,\quad s,j=1,\ldots,N,\end{cases} \tag{A.4f}$$

由此, 其各自对应的辅助列向量 $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 可由 $\boldsymbol{\psi}$ 和关系式 (A.2b)–(A.2e) 所确定. 由于 $\boldsymbol{A}_{[n]}$, $\boldsymbol{A}_{[m]}$ 和 $\boldsymbol{B}_{[l]}$ 为非奇异下三角 Toeplitz 矩阵且构成 Abel 群, 因此, 矩阵乘积 $\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}$ 可交换且其不依赖于离散变量 l [19].

其次, 引进符号 α_ν 和 $\boldsymbol{\beta}_\nu$, $\nu=1,2,3$,

$$\alpha_1=a_n,\quad \alpha_2=b_m,\quad \alpha_3=c, \tag{A.5a}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{A}_{[n]},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{A}_{[m]},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{B}_{[l]}, \tag{A.5b}$$

于是类似于 (2.5) 中的 E^ν, 我们可定义如下形式的算子 E_ν 和 $\mathring{E}^\nu$,

$$E_1\boldsymbol{\psi}=\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}(n-1,m,l),\quad E_2\boldsymbol{\psi}=\underset{\wedge}{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}(n,m-1,l),\quad E_3\boldsymbol{\psi}=\underset{-}{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}(n,m,l-1), \tag{A.6a}$$

$$\mathring{E}^1\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{A}_{[n]}\boldsymbol{A}_{[n+1]}^{-1}E^1\boldsymbol{\psi},\quad \mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{A}_{[m]}\boldsymbol{A}_{[m+1]}^{-1}E^2\boldsymbol{\psi},\quad \mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}E^3\boldsymbol{\psi}. \tag{A.6b}$$

下面列出本文所需的一系列 Casorati 行列式平移公式:

$$E_\mu(\alpha_\mu-\alpha_\kappa)^{N-1-\chi}f_{[\kappa]}=(-1)^\chi|\widehat{N-2},E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-1-\chi)|_{[\kappa]},\quad \mu\neq\kappa, \tag{A.7a}$$

$$(\alpha_\mu+\alpha_\kappa)^{N-1-\chi}E^\mu f_{[\kappa]}=|(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}||\widehat{N-2},\mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(N-1-\chi)|_{[\kappa]}, \tag{A.7b}$$

$$\prod_{j=0}^{N-2-\chi}(\alpha_\nu-(E^\mu)^j\alpha_\mu)E_\nu f_{[\kappa]}=(-1)^\chi|\widehat{N-2},E_\nu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]},\quad \mu\neq\nu, \tag{A.7c}$$

$$\prod_{j=0}^{N-2-\chi}(\alpha_\nu+(E^\mu)^j\alpha_\mu)E^\nu f_{[\kappa]}=|(E^\nu\boldsymbol{\beta}_\nu)\boldsymbol{\beta}_\nu^{-1}||\widehat{N-2},\mathring{E}^\nu\boldsymbol{\psi}(N-1-\chi)|_{[\kappa]}, \tag{A.7d}$$

$$E_\mu\prod_{j=0}^{N-2-\chi}(\alpha_\mu-(E^\kappa)^j\alpha_\kappa)f_{[\kappa]}=(-1)^\chi|\widehat{N-2},\ E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-1-\chi)|_{[\kappa]},\quad \mu\neq\kappa, \tag{A.7e}$$

$$\begin{aligned}&(E_\mu\alpha_\mu+\alpha_\nu)(\alpha_\nu+\alpha_\kappa)^{N-2}(E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)^{N-2}E_\mu E^\nu f_{[\kappa]}\\&\quad=|(E^\nu\boldsymbol{\beta}_\nu)\boldsymbol{\beta}_\nu^{-1}||\widehat{N-3},E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-2),\mathring{E}^\nu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]},\end{aligned} \tag{A.7f}$$

$$(E_\nu\alpha_\nu-E_\mu\alpha_\mu)(E_\nu\alpha_\nu-\alpha_\kappa)^{N-2}(E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)^{N-2}E_\mu E_\nu f_{[\kappa]}$$

$$= |\widehat{N-3}, E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-2),\ E_\nu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \quad \mu\neq\kappa, \tag{A.7g}$$

$$(\alpha_\mu+\alpha_\nu)\prod_{j=0}^{N-3}(\alpha_\nu+(E^\kappa)^j\alpha_\kappa)\prod_{j=0}^{N-3}(\alpha_\mu-(E^\kappa)^j\alpha_\kappa)f_{[\kappa]}$$
$$= |(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}||\widehat{N-3}, E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-2), \mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \quad \mu\neq\kappa, \tag{A.7h}$$

$$(E_\mu\alpha_\mu+\alpha_\nu)\prod_{j=0}^{N-3}(\alpha_\nu+(E^\kappa)^j\alpha_\kappa)\prod_{j=0}^{N-3}(E_\mu\alpha_\mu-(E^\kappa)^j\alpha_\kappa)E_\mu E^\nu f_{[\kappa]}$$
$$= |(E^\nu\boldsymbol{\beta}_\nu)\boldsymbol{\beta}_\nu^{-1}||\widehat{N-3}, E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-2), \mathring{E}^\nu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \quad \mu\neq\kappa, \tag{A.7i}$$

$$(E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\nu)\prod_{j=0}^{N-3}(\alpha_\nu-(E^\kappa)^j\alpha_\kappa)\prod_{j=0}^{N-3}(E_\mu\alpha_\mu-(E^\kappa)^j\alpha_\kappa)E_\mu E_\nu f_{[\kappa]}$$
$$= |\widehat{N-3}, E_\nu\boldsymbol{\psi}(N-2), E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \quad \mu\neq\kappa, \quad \nu\neq\kappa, \tag{A.7j}$$

$$(E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)^{N-2}E_\mu[g_{[\kappa]}+(\alpha_\mu-\alpha_\kappa)f_{[\kappa]}] = -|\widehat{N-3},\ \boldsymbol{\psi}(N-1),\ E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \tag{A.8a}$$
$$(\alpha_\mu+\alpha_\kappa)^{N-2}E^\mu[g_{[\kappa]}-(\alpha_\mu+\alpha_\kappa)f_{[\kappa]}] = |(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}||\widehat{N-3},\ \boldsymbol{\psi}(N-1),\ \mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \tag{A.8b}$$
$$(E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)^{N-2}E_\mu[h_{[\kappa]}+(\alpha_\mu-\alpha_\kappa)g_{[\kappa]}] = -|\widehat{N-3},\ \boldsymbol{\psi}(N),\ E_\mu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \tag{A.8c}$$
$$(\alpha_\mu+\alpha_\kappa)^{N-2}E^\mu[h_{[\kappa]}-(\alpha_\mu+\alpha_\kappa)g_{[\kappa]}] = |(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}||\widehat{N-3},\ \boldsymbol{\psi}(N),\ \mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[\kappa]}, \tag{A.8d}$$

$$E_\mu f_{[\kappa]} = E_\kappa f_{[\kappa]} - (E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)|E_\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \widehat{N-2}|_{[\kappa]}, \tag{A.9a}$$
$$E_\mu g_{[\kappa]} = |E_\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \widehat{N-2}|_{[\kappa]} - (E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)|E_\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[\kappa]}, \tag{A.9b}$$
$$E_\mu E^\kappa f_{[\kappa]} = f_{[\kappa]} - (E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)g_{[\kappa]} + (E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\kappa)^2|E_\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-1}}|_{[\kappa]}, \tag{A.9c}$$

$$(-1)^N E^\mu f_{[\kappa]} = |(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}|[E_\kappa f_{[\kappa]} - (\alpha_\mu+\alpha_\kappa)|\mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \widehat{N-2}|_{[\kappa]}], \tag{A.10a}$$
$$(-1)^N E^\mu E^\kappa f_{[\kappa]} = |(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}|[f_{[\kappa]} + (\alpha_\mu+\alpha_\kappa)g_{[\kappa]} - (E_\mu\alpha_\mu+\alpha_\kappa)^2|\mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-1}}|_{[\kappa]}], \tag{A.10b}$$
$$(-1)^N E^\mu g_{[\kappa]} = -|(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}|[|\mathring{E}_\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \widehat{N-2}|_{[\kappa]} + (\alpha_\mu+\alpha_\kappa)|\mathring{E}^\mu\boldsymbol{\psi}(-1), \boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[\kappa]}], \tag{A.10c}$$
$$\begin{aligned}(a_{n-1}-b_{m-1})\overline{\underset{\hat{\sim}}{f}}_{[3]} = {}& (a_{n-1}-b_{m-1})\underline{f}_{[3]} - (a_{n-1}-c)^2|\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(-1), \widehat{N-2}|_{[3]} + (b_{m-1}-c)^2|\underset{\hat{}}{\boldsymbol{\psi}}(-1), \widehat{N-2}|_{[3]}\\ &+ (a_{n-1}-c)^2(b_{m-1}-c)|\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(-1), \boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[3]}\\ &- (a_{n-1}-c)(b_{m-1}-c)^2|\underset{\hat{}}{\boldsymbol{\psi}}(-1), \boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[3]}\\ &+ (a_{n-1}-c)^2(b_{m-1}-c)^2|\underset{\hat{}}{\boldsymbol{\psi}}(-1), \underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[3]},\end{aligned} \tag{A.10d}$$
$$\begin{aligned}(a_n-b_m)\widehat{\widetilde{\overline{f}}}_{[3]} = {}& |\boldsymbol{A}_{[n+1]}\boldsymbol{A}_{[n]}^{-1}||\boldsymbol{A}_{[m+1]}\boldsymbol{A}_{[m]}^{-1}|[(a_n-b_m)\underline{f}_{[3]} - (a_n+c)^2|\mathring{E}^1\boldsymbol{\psi}(-1), \widehat{N-2}|_{[3]}\\ &+ (b_m+c)^2|\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(-1), \widehat{N-2}|_{[3]} - (a_n+c)^2(b_m+c)|\mathring{E}^1\boldsymbol{\psi}(-1), \boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[3]}\\ &+ (a_n+c)(b_m+c)^2|\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(-1), \boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[3]}\\ &\times (a_n+c)^2(b_m+c)^2|\mathring{E}^2\boldsymbol{\psi}(-1), \mathring{E}^1\boldsymbol{\psi}(-1), \widetilde{\widehat{N-2}}|_{[3]}].\end{aligned} \tag{A.10e}$$

除特别说明外, 上述公式 (A.7)–(A.10) 对 μ, ν, $\kappa = 1, 2, 3$ 和 $\chi = 0, 1$ 均成立.

对于上述公式的证明, 其证明方法与文献 [14,18,19] 相类似. 另外, 证明过程中我们需要利用如下公式:

$$(E_\mu\alpha_\mu-\alpha_\nu)E_\mu\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}-E_\mu E^\nu\boldsymbol{\psi}, \tag{A.11a}$$

$$(\alpha_\mu+\alpha_\nu)E^\mu\boldsymbol{\psi}=(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}\boldsymbol{\psi}+E^\mu E^\nu\boldsymbol{\psi}, \tag{A.11b}$$

$$(E_\mu\alpha_\mu+\alpha_\nu)E_\mu E^\nu\boldsymbol{\psi}=E^\nu\boldsymbol{\psi}+(E^\mu\boldsymbol{\beta}_\mu)\boldsymbol{\beta}_\mu^{-1}E_\mu\boldsymbol{\psi}, \tag{A.11c}$$

其中 μ, ν=1, 2, 3. (A.11) 可由关系式 (A.2) 推导而来.

接下来, 作为例子, 我们证明 (A.7e) 和 (A.7h). 对于 (A.7e), 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,1,2)$. 利用关系式 (A.11a)
并对应取 $(\mu,\nu)=(1,2)$, 我们首先得到

$$\begin{aligned}(a_{n-1}-b_m)\underset{\sim}{f}_{[2]}&=|(a_{n-1}-b_m)\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(0),\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(1),\ldots,\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-1)|_{[2]}\\&=|\boldsymbol{\psi}(0),\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(1),\ldots,\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-1)|_{[2]}.\end{aligned}$$

然后, 对于 Casorati 行列式中的第二列有

$$\begin{aligned}(a_{n-1}-b_{m+1})(a_{n-1}-b_m)\underset{\sim}{f}_{[2]}&=|\boldsymbol{\psi}(0),(a_{n-1}-b_{m+1})\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(1),\ldots,\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-1)|_{[2]}\\&=|\boldsymbol{\psi}(0),\boldsymbol{\psi}(1),\ldots,\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-1)|_{[2]}.\end{aligned}$$

重复上述过程, 可得

$$\prod_{j=0}^{N-2}(a_{n-1}-b_{m+j})\underset{\sim}{f}_{[2]}=|\widehat{N-2},\underset{\sim}{\boldsymbol{\psi}}(N-1)|_{[2]},$$

即为 (A.7e) 取 $(\chi,\mu,\kappa)=(0,1,2)$. 接下来证明 (A.7h) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(3,3,2)$. 基于 $\overline{(\text{A.7f})}$ 并利用 (A.11b) 取 $(\mu,\nu)=(3,2)$, 我们首先有

$$\begin{aligned}(c+b_m)\prod_{j=0}^{N-3}(c-b_{m+j})f_{[2]}&=-|(c+b_m)\overline{\boldsymbol{\psi}}(0),\overline{\boldsymbol{\psi}}(1),\ldots,\overline{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}\\&=-|\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}\boldsymbol{\psi}(0),\overline{\boldsymbol{\psi}}(1),\ldots,\overline{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}.\end{aligned}$$

对于上式左端行列式, 我们有

$$\begin{aligned}(c+b_{m+1})(c+b_m)\prod_{j=0}^{N-3}(c-b_{m+j})f_{[2]}&=-|\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}\boldsymbol{\psi}(0),(c+b_{m+1})\overline{\boldsymbol{\psi}}(1),\ldots,\overline{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}\\&=-|\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}\boldsymbol{\psi}(0),\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}\boldsymbol{\psi}(1),\ldots,\overline{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}.\end{aligned}$$

重复上述过程, 可得

$$\prod_{j=0}^{N-3}(c+b_{m+j})\prod_{j=0}^{N-3}(c-b_{m+j})f_{[2]}=-|\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}||\widehat{N-3},\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}\overline{\boldsymbol{\psi}}(N-2),\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}$$

$$= |\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}||\widehat{N-3}, \boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}\boldsymbol{\psi}(N-2), \mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}\overline{\boldsymbol{\psi}}(N-2)$ 重写为 $\mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}$. 然后, 再次利用 (A.11b) 取 $\mu=\nu=3$ 以及 $\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}$ 与离散变量 l 无关, 我们有

$$\begin{aligned}2c\prod_{j=0}^{N-3}(c+b_{m+j})\prod_{j=0}^{N-3}(c-b_{m+j})\overline{\underset{\sim}{f}}_{[2]} &= |\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}||\widehat{N-3}, \boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}2c\,\boldsymbol{\psi}(N-2), \mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}\\ &= |\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}||\widehat{N-3}, \boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l+1]}^{-1}\boldsymbol{B}_{[l]}\boldsymbol{B}_{[l-1]}^{-1}\underline{\boldsymbol{\psi}}(N-2), \mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]}\\ &= |\boldsymbol{B}_{[l+1]}\boldsymbol{B}_{[l]}^{-1}||\widehat{N-3}, \underline{\boldsymbol{\psi}}(N-2), \mathring{E}^3\boldsymbol{\psi}(N-2)|_{[2]},\end{aligned}$$

即为 (A.7h) 取 $(\mu,\nu,\kappa)=(3,3,2)$.

Solutions to the non-autonomous ABS lattice equations: Casoratians and bilinearization

SHI Ying, ZHANG DaJun & ZHAO SongLin

Abstract In this paper non-autonomous H1, H2, H3$_\delta$ and Q1$_\delta$ equations in the Adler-Bobenko-Suris (ABS) list are bilinearized. Their solutions are derived in Casoratian form. We also list out some Casoratian shift formulae which are used to verify Casoratian solutions.

Keywords non-autonomous ABS list, Casoratian, bilinear, soliton solutions

MSC(2010) 35Q51, 35Q58, 39A10

doi: 10.1360/012013-202