

带径向接管的圆柱壳端部受力矩 作用时的薄壳理论解^{*}

薛明德 王和慧 陈 伟 黄克智

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 给出可适用于大开孔率($\rho_0 \leq 0.8$)的带径向接管的圆柱壳受端部力矩作用时的薄壳理论解. 采用修正的 Morley 方程代替前人使用的 Donnell 扁壳方程, 在主壳展开面极坐标 (α, β) 系中求解开孔圆柱壳齐次解, 既保持了薄壳理论的精度量级, 又不受开孔率的限制; 利用 Goldenveizer 的位移函数圆柱壳方程, 在支管展开面主坐标 (ζ, θ) 系中求得非平齐端头支管的齐次解. 主壳与支管交界处的边界位移和边界力分别由 (α, β) 、 (ζ, θ) 系转换到总体柱坐标 (ρ, θ, z) 系后均为 θ 的周期函数, 因而可分别展成 Fourier 级数, 各谐的 Fourier 系数可利用数值积分获得, 再由连续条件得到整体结构的薄壳理论解. 经前人的实验和三维有限元计算结果的检验, 证明解是可靠的.

关键词 圆柱壳开孔接管 薄壳理论解 应力集中系数

两正交相贯的圆柱壳是压力容器与管道工业中最常见的部件之一, 通常受有内压及各种管系载荷. 其交贯线处因有很大的应力集中, 往往成为各种灾害性事故的原发部位. 当接管与主壳的半径比 $\rho_0 = r/R$ 较大时, 两圆柱壳中面的交线 Γ 是一条复杂的空间曲线, 问题可化为求解 2 个八阶偏微分方程的复杂边值问题. 由于该问题在工程实际与理论上的重要性, 从 50 年代起, Eringen^[1], Bijlaard^[2], 钱令希^[3], Lekerkerker^[4], Steele^[5] 等从 Donnell 扁壳方程出发, 将两壳的交贯线 Γ 近似为主壳展开面上的一个圆, 解的适用范围仅限于 $\rho_0 \leq 0.3$ ^[1]. 寻找大开孔率下的薄壳理论解在数学上遇到了很大的困难. 80 年代至今, 欧美各国在其压力容器组织的支持下, 企图用有限元解与实验相结合的方法寻求可用于设计的经验公式, 如 Mof-fat^[6, 7], Afshari^[8] 等, 但由于该问题量大面广的特点以及结构参数与载荷条件的多样性, 寻求其薄壳理论解至今仍是压力容器界与力学界所共同瞩目的问题. 本文作者与合作者在 90 年代前半期给出了内压作用下两正交圆柱壳的薄壳理论解^{[9~13, 2)}, 本文是此项工作的继续与发

1998-01-21 收稿, 1998-06-20 收修改稿

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 59335102)和清华大学基础研究基金资助项目

1) 文献[5] 寻找了一种半经验近似解, 把解的范围扩大到 $\rho_0 \leq 0.5$

2) 文献[13] 曾获美国机械工程师学会颁发的《ASME Journal of Pressure Vessel Technology》杂志 1996 年度杰出论文奖

展, 将问题的解由具有两个对称面扩展到可以考虑非对称性的情况, 并相应地将支管的解由 Timoshenko 解^[14] 改为更普遍的 Goldenveizer 解^[15]。

除内压这种基本载荷外, 两正交圆柱壳在端部还承受各种复杂外载。图 1 给出将主壳端部所受外载分解后的三个基本力矩即扭矩 M_{xc} 、面内弯矩 M_{yc} 与面外弯矩 M_{zc} ; 另外在支管上还作用有各种载荷。本文给出了基本方程与三种主壳外力矩作用下的薄壳理论解。

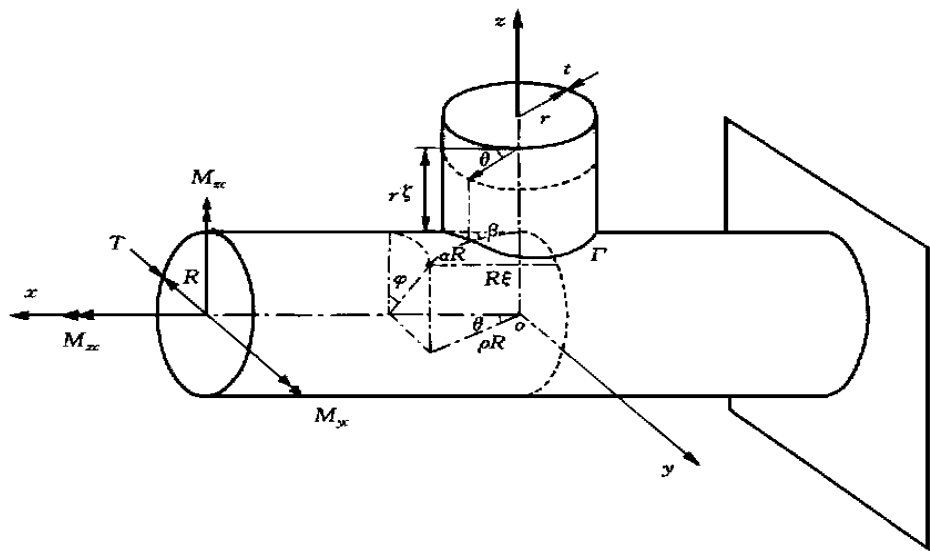


图 1 四套坐标系

图 1 同时给出结构的基本尺寸符号及分析中所采用的四套坐标系: 三维空间的总体坐标系 (ρ, θ, z) , 主壳展开面内的二套 Gauss 坐标系即主坐标 (ξ, φ) 和极坐标 (α, β) , 以及支管展开面内的 Gauss 坐标 (ζ, θ) 。各坐标系之间的转换关系表达式见文献[9~13]。

以下分析均以 $x=0$ 与 $y=0$ 坐标面为基准, 根据各种载荷在两正交圆柱壳中引起的应力状态关于 $\theta=0(\beta=0)$ 与 $\theta=\pi/2(\beta=\pi/2)$ 两个坐标面的对称和反对称性质, 将其分为 3 种工况, 如表 1 示。在各种载荷工况下, 将各种物理量均对变量 β (或 θ) 进行 Fourier 展开。例如面内力 T_α, T_β , 弯矩 M_α, M_β , 横剪力 Q_α , 其三角函数的完备函数族均以 $G_N^{(1)}(m\beta)$ (或 $G_N^{(1)}(m\theta)$) 表示; 而切力 $T_{\alpha\beta}$, 扭矩 $M_{\alpha\beta}$ 和横剪力 Q_β 以 $G_N^{(2)}(m\beta)$ (或 $G_N^{(2)}(m\theta)$) 表示。这里 m 为谐数, $N=1, 2, 3$ 分别标识 3 种工况。对于支管, 将下标 α, β 改为 ζ, θ 。函数 $G_N^{(1)}(m\beta)$ 和 $G_N^{(2)}(m\beta)$ 的具体形式见表 1。

表 1 3 种工况的对称关系及其相应的三角函数族

工况	关于 $\beta=0$ 面	关于 $\beta=\pi/2$ 面	$G_N^{(1)}(m\beta)$	$G_N^{(2)}(m\beta)$	载荷形式
$N=1$	对称	对称	$\cos 2k\beta$	$\sin 2k\beta$	M_{ye}
$N=2$	反对称	反对称	$\sin 2k\beta$	$-\cos 2k\beta$	M_{xc}
$N=3$	反对称	对称	$\sin (2k+1)\beta$	$-\cos (2k+1)\beta$	M_{zc}

1 大开孔圆柱壳在受端部力矩时的薄壳理论解

受端部力矩时主壳的解可由薄膜解与齐次解叠加得到. 薄膜解在主坐标 (ξ, φ) 系中给出, 齐次解采用修正的 Morley 方程^[9] 在极坐标 (α, β) 系中求解, 其精度达到薄壳理论精度 $O(T/R)$ 的量级, 且不受开孔率的限制.

1.1 二端有一对力矩作用下圆柱壳的薄膜解

M_{xc} 作用下:

$$T_{\xi\varphi} = \frac{M_{xc}}{2\pi R^2}, \quad T_{\xi} = T_{\varphi} = 0, \quad (1)$$

$$\hat{u}_{\varphi} = \frac{2(1+\nu)}{ET} \frac{M_{xc}}{2\pi R} \xi, \quad (2)$$

M_{yc} 作用下:

$$T_{\xi} = \frac{M_{yc}}{\pi R^2} \cos \varphi, \quad T_{\varphi} = T_{\xi\varphi} = 0, \quad (3)$$

$$\hat{u}_{\xi} = \frac{M_{yc}}{ET\pi R} \xi \cos \varphi, \quad \hat{u}_{\varphi} = \frac{M_{yc}}{2ET\pi R} \left[\xi^2 - \frac{L^2}{R^2} \right] \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\hat{u}_n = -\frac{M_{yc}}{ET\pi R} \left[\nu + \frac{1}{2} \left[\xi^2 - \frac{L^2}{R^2} \right] \right] \cos \varphi, \quad (5)$$

$$\gamma_{\xi} = -\frac{M_{yc}}{ET\pi R^2} \xi \cos \varphi, \quad \gamma_{\varphi} = \frac{\nu M_{yc}}{ET\pi R^2} \sin \varphi, \quad (5)$$

M_{zc} 作用下:

$$T_{\xi} = -\frac{M_{zc}}{\pi R^2} \sin \varphi, \quad T_{\varphi} = T_{\xi\varphi} = 0, \quad (6)$$

$$\hat{u}_{\xi} = -\frac{M_{zc}}{ET\pi R} \xi \sin \varphi, \quad \hat{u}_{\varphi} = \frac{M_{zc}}{2ET\pi R} \left[\xi^2 - \frac{L^2}{R^2} \right] \cos \varphi, \quad (7)$$

$$\hat{u}_n = \frac{M_{zc}}{ET\pi R} \left[\nu + \frac{1}{2} \left[\xi^2 - \frac{L^2}{R^2} \right] \right] \sin \varphi, \quad (8)$$

$$\gamma_{\xi} = \frac{M_{zc}}{ET\pi R^2} \xi \sin \varphi, \quad \gamma_{\varphi} = \frac{\nu M_{zc}}{ET\pi R^2} \cos \varphi. \quad (8)$$

1.2 主壳齐次解

本文以修正的 Morley 方程

$$\left[\Delta^2 + \frac{1}{2} + 2\mu\sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[\Delta^2 + \frac{1}{2} - 2\mu\sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \chi = 0 \quad (9)$$

代替文献[1~5]所采用的 Donnell 扁壳方程

$$\left[\Delta^2 + 2\mu\sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[\Delta^2 - 2\mu\sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \chi = 0, \quad (10)$$

作为求解圆柱壳开孔问题的基本方程, 方程(9)、(10)中的 χ 为复位移应力函数

$$\chi = u_n + i \frac{4\mu^2}{ETR} \phi, \quad (11)$$

其中实部 u_n 为法向位移, 虚部 ϕ 为 Airy 应力函数, μ 为径厚比参数,

$$4\mu^2 = [12(1-\nu^2)]^{1/2} R/T.$$

(12)

类似于文献 [4] 的做法, 对于表 1 所示的 3 种工况, 方程(9)的解可统一表达为

$$\chi = \sum_{k=e(4,N)}^{\infty} \sum_{n=e(1,N)}^{\infty} C_n F_{kn}(\alpha) G_N^{(1)}(m\beta),$$

(13)

式中 F_{kn} 为 Bessel, Hankel 函数之积, $G_N^{(1)}(m\beta)$ 为三角函数系, 见表 1, m 为谐数, C_n 为待定复常数,

$$C_n = C_{n1} + iC_{n2},$$

(14)

$$m = 2k + e(2, N),$$

(15)

$$F_{kn} = (-1)^k \left[1 - \frac{1}{2} \delta_{n0} \right] \left[J_{m-n}(\sqrt{-i}\mu\alpha) + e(3, N) J_{-m-n}(\sqrt{-i}\mu\alpha) \right] H_n(\eta\alpha),$$

(16)

(13)~(16)式中 $e(1, N) \sim e(4, N)$ 的值如表 2 所示. 定义

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m, \end{cases}$$

(17)

$$\eta = \left[\frac{1}{2} - i\mu^2 \right]^{1/2}.$$

(18)

表 2 3 种工况下 $e(j, N)$ 的取值

工况	$e(1, N)$	$e(2, N)$	$e(3, N)$	$e(4, N)$
$N=1$	0	0	1	0
$N=2$	1	0	-1	1
$N=3$	1	1	1	0

$T_\alpha, T_\beta, T_{\alpha\beta}$ 可通过 χ 的虚部表示, $M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}$ 及 Q_α, Q_β 可通过 χ 的实部表示(见文献 [9] 之(11)~(18)式). 根据壳体切面内的物理方程^[16] 可求得切面内应变 $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \omega$, 并由主壳的几何关系^[16] 求得 u_α, u_β 的微分表达式之 Fourier 系数 $f_k(\alpha), g_k(\alpha)$ 和 $h_k(\alpha)$, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} &= \frac{1}{ET} (T_\alpha - \nu T_\beta) - \frac{u_n}{R} \sin^2 \beta = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\alpha) G_N^{(1)}(m\beta), \\ \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{u_\alpha}{\alpha} &= \frac{1}{ET} (T_\beta - \nu T_\alpha) - \frac{u_n}{R} \cos^2 \beta = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\alpha) G_N^{(1)}(m\beta), \\ \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{u_\beta}{\alpha} \right] &= \frac{2(1+\nu)}{ET} T_{\alpha\beta} - \frac{u_n}{R} \sin 2\beta = \sum_{k=e(4,N)}^{\infty} h_k(\alpha) G_N^{(2)}(m\beta), \end{aligned}$$

(19)

上式中 m 与 k 的关系见(15)式, $e(4, N)$ 的取值见表 2, u_α, u_β 也可展开为 Fourier 级数

$$u_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\alpha) G_N^{(1)}(m\beta), \quad u_\beta = \sum_{k=e(4,N)}^{\infty} V_k G_N^{(2)}(m\beta),$$

(20)

将(20)式代入(19)式, 得到各谐数的 U_k, V_k 所满足的常微分方程组, 解之得

当 $k > 0$ 时, 有

$$U_k = \alpha R \left[f_k - \alpha \frac{dg_k}{d\alpha} + mh_k \right] / (1 - m^2),$$
$$V_k = (\alpha R g_k - U_k) / m.$$

(21)

由于刚体位移不引起应力,故可利用刚体位移为零来确定零谐项(工况 2 无零谐位移).

工况 1: 设绕 z 轴的刚体转动为零,得

$$U_0 = \alpha R g_0, \quad V_0 = 0.$$

(22a)

工况 3: 设沿 y 方向的刚体位移为零,得

$$U_0 = V_0 = \frac{1}{2} \alpha R g_0.$$

(22b)

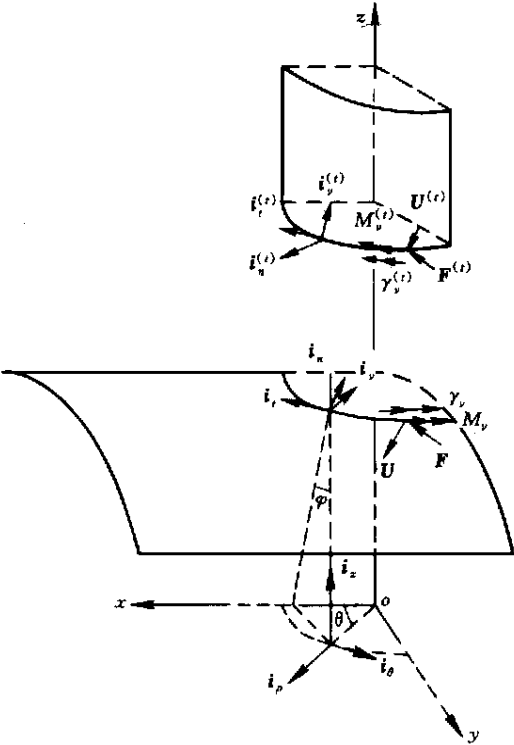
1.3 主壳开孔边缘的广义力与广义位移

主壳内力素与位移的齐次解是在壳展开面极坐标 (α, β) 系中的孔边界 $\Gamma(\alpha_R, \beta_R)$ 上取值;而其特解在壳展开面直角坐标 (ξ, φ) 系中的孔边界 $\Gamma(\xi_R, \varphi_R)$ 上取值. 孔边界坐标分别为

$$\alpha_R = [\rho_0^2 \cos^2 \theta + \arcsin^2(\rho_0 \sin \theta)]^{1/2},$$
$$\beta_R = \arcsin \left\{ \arcsin(\rho_0 \sin \theta) \cdot \right. \\ \left. [\rho_0^2 \cos^2 \theta + \arcsin^2(\rho_0 \sin \theta)] \right\}, \quad (23)$$
$$\xi_R = \rho_0 \cos \theta, \quad \varphi_R = \arcsin(\rho_0 \sin \theta). \quad (24)$$

边界上切面力 T_v, S_v , 横剪力 Q_v (三者合成为力矢量 F) 及弯矩 M_v 都在孔边界标架 (i_t, i_v, i_n) 中给出;主壳孔边缘位移 u_α, u_β, u_n 合成为位移矢量 U , 并可由转角 $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ 求得边界法向矢量 i_v 的转角 γ_v ^[13], 如图 2 示. (i_t, i_v, i_n) 与 (i_α, i_β) 的关系式见文献[12], 它们与

图 2 开孔边界处的单位基矢量、广义位移及广义力



(23)式均为 θ 的周期函数且包含参数 ρ_0 . 将 F, U 在总体坐标 (ρ, θ, z) 中再分解, $F_\rho, F_\theta, F_z, M_v, u_\rho, u_\theta, u_z, \gamma_v$ 构成了主壳开孔边界上的 8 个基本广义力与广义位移, 它们仍是 θ 的周期函数, 包含参数 ρ_0 , 且通过 χ 中待定复常数 C_n 的实部与虚部 $C_{nl} (l=1, 2)$ 表示, 因而可将它们对 θ 进行 Fourier 展开. 例如:

$$F_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^\rho(\rho_0) + f_k^\rho(\rho_0) \right\} G_N^{(1)}(m\theta),$$

(25a)

$$F_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^\theta(\rho_0) + f_k^\theta(\rho_0) \right\} G_N^{(2)}(m\theta),$$

(25b)

$$F_z = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^z(\rho_0) + f_k^z(\rho_0) \right\} G_N^{(1)}(m\theta),$$

(25c)

$$M_v = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^m(\rho_0) + f_k^m(\rho_0) \right\} G_N^{(1)}(m\theta),$$

(25d)

$$u_{\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} u_{knl}^{\rho}(\rho_0) + \hat{u}_k^{\rho}(\rho_0) \right\} G_N^{(1)}(m\theta), \quad (26a)$$

$$u_{\theta} = \sum_{k=e(4, N)}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} u_{knl}^{\theta}(\rho_0) + \hat{u}_k^{\theta}(\rho_0) \right\} G_N^{(2)}(m\theta), \quad (26b)$$

$$u_z = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} \bar{u}_{knl}^z(\rho_0) + \hat{u}_k^z(\rho_0) \right\} G_N^{(1)}(m\theta), \quad (26c)$$

$$\gamma_{\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=e(1, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^2 C_{nl} u_{knl}^m(\rho_0) + \hat{u}_k^m(\rho_0) \right\} G_N^{(1)}(m\theta). \quad (26d)$$

上式中第 1 项对应于齐次解, 第 2 项对应于特解. $f_{knl}^{\rho} \cdots, f_k^{\rho} \cdots, u_{knl}^{\rho} \cdots, \hat{u}_k^{\rho} \cdots$ 是各谐 m 的 Fourier 系数, 它们的积分表达式中的被积函数含有 (16) 式中的 Bessel, Hankel 函数以及 (23), (24) 式中的三角函数, 十分复杂, 但我们可借助数值积分将其逐一求解^[12].

2 非平齐端头闭合圆柱壳的齐次解

2.1 闭合圆柱壳的 Goldenveizer 一般解

支管是具有非平齐端头的半无限长闭合圆柱壳(半径 r , 壁厚 t). 采用位移函数 $\psi(\zeta, \theta)$, 支管圆柱壳中面的位移 $u_{\rho}^{(t)}, u_{\theta}^{(t)}, u_{\zeta}^{(t)}$ 与 $\psi(\zeta, \theta)$ 之间满足:

$$u_{\rho}^{(t)} = \left\{ \Delta^4 + a^2 \left[4 \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + \frac{2(2-2\nu+\nu^2)}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} \psi \quad (27a)$$

$$u_{\theta}^{(t)} = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^2} + (2+\nu) \frac{\partial}{\partial \zeta^2} - a^2 \left[\frac{2(2-\nu)}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + \frac{4-3\nu+\nu^2}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \theta^2 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} \psi \quad (27b)$$

$$u_{\zeta}^{(t)} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - a^2 \left[\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \theta^2 \partial \zeta^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 4\nu \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{2\nu^2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \right\} \psi \quad (27c)$$

其中 $a^2 = t^2/12r^2$.

以 $\psi(\zeta, \theta)$ 表示的圆柱壳基本方程为

$$\Delta^8 \psi + 4\lambda_t^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \zeta^4} + (8-2\nu^2) \frac{\partial^4 \psi}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + 8 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \zeta^2 \partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^6} + 4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} = 0, \quad (28)$$

式中

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \lambda_t = [3(1-\nu^2)r^2/t^2]^{1/4}. \quad (29)$$

将 $\psi(\zeta, \theta)$ 按表 1 的 3 种工况展成 Fourier 级数, 并考虑到当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时解有限, 有

$$\psi = \sum_{k=e(4, N)}^{\infty} \sum_{l=1}^4 D_{kl} g_{ml}(\zeta) G_N^{(1)}(m\theta). \quad (30)$$

按照 Goldenveizer 对于 $g(\zeta)$ 所满足常微分方程特征根的讨论^[15], 可对其特征方程进行简化, 从而得到

$$g_{m1}(\zeta) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 1, & m = 1, \\ e^{-a_{m1}\zeta} \cos b_{m1}\zeta, & m > 1, \end{cases} \quad (31a)$$

$$g_{m2}(\zeta) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \zeta, & m = 1, \\ e^{-a_{m1}\zeta} \sin b_{m1}\zeta, & m > 1, \end{cases} \quad (31b)$$

$$g_{m3}(\zeta) = e^{-a_{m2}\zeta} \cos b_{m2}\zeta, \quad (31c)$$

$$g_{m4}(\zeta) = e^{-a_{m2}\zeta} \sin b_{m2}\zeta. \quad (31d)$$

上式中

$$a_{m1} = b_{m1} = m \sqrt{m^2 - 1} / (2\lambda_t), \quad 1 < m < \lambda_t, \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} a_{m1} &= \left\{ -\lambda_t + \sqrt{\sqrt{4m^4 + \lambda_t^4} + 2m^2} \right\} / 2, \\ b_{m1} &= \left\{ -\lambda_t + \sqrt{\sqrt{4m^4 + \lambda_t^4} - 2m^2} \right\} / 2, \end{aligned} \quad m \geq \lambda_t, \quad (32b)$$

$$a_{m2} = b_{m2} = \lambda_t, \quad m = 0, \quad (33a)$$

$$a_{m2} = \sqrt{\lambda_t^2 + 1}, \quad b_{m2} = \sqrt{\lambda_t^2 - 1}, \quad m = 1, \quad (33b)$$

$$a_{m2} = b_{m2} = \lambda_t \quad 1 < m < \lambda_t, \quad (33c)$$

$$\begin{aligned} a_{m2} &= \left\{ \lambda_t + \sqrt{\sqrt{4m^4 + \lambda_t^4} + 2m^2} \right\} / 2, \\ b_{m2} &= \left\{ \lambda_t + \sqrt{\sqrt{4m^4 + \lambda_t^4} - 2m^2} \right\} / 2, \end{aligned} \quad m \geq \lambda_t. \quad (33d)$$

(32), (33c, d) 式为近似式, (32a), (33c) 式的误差量级为 $m^2 t / r_0$, (32b), (33d) 式的误差量级为 $O(1/m^2)$.

利用 (27) 式求得位移, 再进一步利用几何关系和物理方程^[16] 即可求得支管圆柱壳中的各内力素. 对于本文研究的主壳受外载情况, 支管解只包含齐次解.

2.2 支管非平齐端头的广义力与广义位移

支管与主壳的中面交贯线 Γ 的方程为

$$\zeta_\Gamma(\theta) = \frac{1}{\rho_0} (1 - \rho_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} = \zeta_\Gamma(\rho_0, \theta). \quad (34)$$

由 (30), (31), (27) 及 (34) 式知, 在 Γ 上所有的支管广义力与位移均为 $(\zeta_\Gamma(\rho_0, \theta), \theta)$ 的函数, 即也都是 θ 的周期函数, 以 ρ_0 为参数且通过待定常数 D_{kl} 表示. 同主壳开孔边界相类似, 支管端头边界的广义力 $F_\rho^{(t)}, F_\theta^{(t)}, F_z^{(t)}, M_v^{(t)}$ 和广义位移 $u_\rho^{(t)}, u_\theta^{(t)}, u_z^{(t)}, \gamma_v^{(t)}$ 也可展成 Fourier 级数, Fourier 系数可由数值积分直接得到. 其表达式类似于文献[12].

3 连续条件

在交界线 Γ 上应满足

$$F_\rho = -F_\rho^{(t)}, \quad F_\theta = -F_\theta^{(t)}, \quad F_z = -F_z^{(t)}, \quad M_v = M_v^{(t)}, \quad (35a)$$

$$u_{\rho} = u_{\rho}^{(t)}, \quad u_{\theta} = u_{\theta}^{(t)}, \quad u_z = u_z^{(t)}, \quad \gamma_v = -\gamma_v^{(t)}, \tag{35b}$$

将各分量的 Fourier 级数展开 (25) ~ (27), (30) 式等代入 (35) 式, 在 $k=K, n=2K+e(2, N)$ 处截断 (计算试验表明: 当 K 取至 5 或 6, 对应的应力集中系数相对误差不超过 1%). 由 (13) ~ (15)、(30)、(31) 式及表 1, 2 可知, 对于 3 种工况, 待定常数 C_{nl} 与 D_{jl} 的个数如表 3 示.

表 3 3 种工况待定常数的个数

工况	C_{nl} 个数	D_{jl} 个数
$N=1$	$4K+2$	$4K+2$
$N=2$	$4K$	$4K$
$N=3$	$4K+2$	$4K+2$

令各谐数的 Fourier 系数分别满足 (35) 式, 得到以下的应力与位移连续条件:

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^{\rho} + f_k^{\rho} = - \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} f_{kjl}^{(t)\rho}, \quad k = e(4, N), \cdots, K, \tag{36a}$$

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^{\theta} + f_k^{\theta} = - \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} f_{kjl}^{(t)\theta}, \quad k = 0, \cdots, K, \tag{36b}$$

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^z + f_k^z = - \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} f_{kjl}^{(t)z}, \quad k = e(4, N), \cdots, K, \tag{36c}$$

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} f_{knl}^m + f_k^m = \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} f_{kjl}^{(t)m}, \quad k = e(4, N), \cdots, K, \tag{36d}$$

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} u_{knl}^{\rho} + u_k^{\rho} = \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} u_{kjl}^{(t)\rho}, \quad k = e(4, N), \cdots, K, \tag{37a}$$

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} u_{knl}^{\theta} + u_k^{\theta} = \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} u_{kjl}^{(t)\theta}, \quad k = e(4, N), \cdots, K, \tag{37b}$$

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} u_{knl}^z + u_k^z = \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} u_{kjl}^{(t)z}, \quad k = e(4, N), \cdots, K, \tag{37c}$$

$$\sum_{n=e(1, N)}^{2K+e(2, N)} \sum_{l=1}^2 C_{nl} u_{knl}^m + u_k^m = - \sum_{j=e(4, N)}^K \sum_{l=1}^4 D_{jl} u_{kjl}^{(t)m}, \quad k = e(4, N), \cdots, K. \tag{37d}$$

对于 3 种不同工况, 连续条件的个数分别讨论如下:

- 工况 1: $k=0$ 时, (36b), (37b) 式不存在, (36c) 式表示 z 方向的合力平衡, 应自动满足; (37c) 式表示 z 方向刚体位移连续, 不影响应力分布, 可不予考虑. 共计 $8K+4$ 个独立方程.
- 工况 2: $k=0$ 时, 只有 (36b) 表示绕 z 轴总扭矩平衡, 应自动满足. 共计 $8K$ 个独立方程.
- 工况 3: $k=0(m=1)$ 时, 作用在主壳孔边缘的合力与合力矩应自动满足平衡条件. 此时 $F_x=F_z=M_y=M_z=0$ 这 4 个条件由于所取函数族关于 $x=0$ 平面反对称, 关于 $y=0$ 平面对称而自动满足. 而由 $F_y=0$ 得到主壳上 $m=1$ 谐的作用力应自动满足

$$\oint (F_{\rho} \sin \theta + F_{\theta} \cos \theta) \mathrm{d} s \Gamma = 0, \tag{38}$$

故 $k=0$ 的 (36a, b) 两式不独立, 只取 (36a) 式. 由主壳孔边缘作用的合力矩与外加力矩 M_{xc} 自动满足平衡, 得到主壳上 $m=1$ 谐的作用力与力矩应自动满足

$$M_{xc} = \oint [F_z \rho_0 \sin \theta - M_v \cos(i_t, i_x)] \mathrm{d} s \Gamma, \tag{39}$$

故 $k=0$ 的(36c, d)两式不独立, 只取(36d)式.

此外, 主壳与支管的 x, z 方向刚体位移 $u_x^{(0)}, u_z^{(0)}$ 与绕 y, z 轴的转动 $\omega_y^{(0)}, \omega_z^{(0)}$ 由于所取的函数族而自动为零, 而它们的刚体位移 $u_y^{(0)}, \omega_x^{(0)}$ 不引起应力, 可以放松其连续性要求. 主壳孔边缘:

$$u_y^{(0)} = \oint (u_\rho \sin \theta + u_\theta \cos \theta) d\Gamma, \tag{40a}$$

$$\omega_x^{(0)} = - \oint \left[\frac{1}{R} (u_\rho \sin \theta \cos \varphi + u_\theta \cos \theta \cos \varphi - u_z \sin \varphi) + \gamma_c \cos(i_t, i_a) \right] d\Gamma. \tag{40b}$$

以上 2 式都只与 $m=1$ 谐的位移有关, 故可以不要 $k=0$ 时的(37b)与(37c)两式, 只保留(37a)与(37d)两式. 故共计 $8K+4$ 个独立方程.

4 本文计算结果与前人结果的比较

4.1 与美国橡树岭国家实验室(ORNL)实验结果^[17] 的比较

图 3 和图 4 给出钢制精车模型 ORNL-1 ($\rho_0=0.5, D/T=d/t=100$) 试验结果与本文计

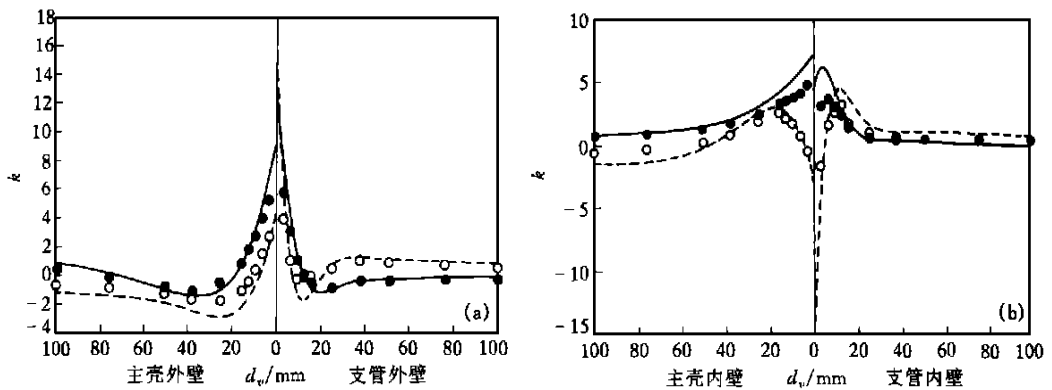


图 3

(a) M_{xc} 作用 $\theta=60^\circ$ 外壁 k 分布(ORNL-1); (b) M_{xc} 作用 $\theta=60^\circ$ 内壁 k 分布(ORNL-1); 虚线为 k_v 本文解, 实线为 k_x 本文解, $\circ$ 为 k_v 实验点, $\bullet$ 为 k_t 实验点

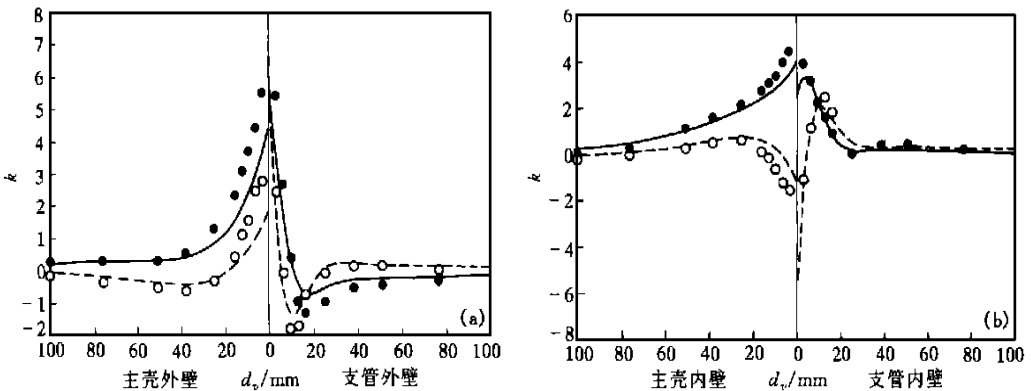


图 4

(a) M_{yc} 作用 $\theta=90^\circ$ 外壁 k 分布(ORNL-1); (b) M_{yc} 作用 $\theta=90^\circ$ 内壁 k 分布(ORNL-1); 图注说明同图 3

算结果的比较(图中 k_t , k_v 分别表示壳展开面内某点处平行于交贯线 Γ 的切向与法向的无量纲应力, d_v 表示在壳展开面内自对应于某角度 θ 的交贯线 Γ 上的点沿 Γ 在此点之法向远离 Γ 的距离), 显示出对于主壳受扭转(M_{xc} 作用)与受面内弯矩(M_{yc} 作用)两种工况下本文计算与试验结果能很好地吻合. 然而对于主壳受面外弯矩(M_{zc} 作用)的工况, 文献[17] 指出其试验结果与其所给有限元计算结果差别很大, 却未指出原因; 本文计算结果虽然与文献[17] 的试验结果亦有较大差别, 但与本文作者自己所作的各种参数下有限元计算结果均能很好地吻合, 图 5 仅给出其中一例.

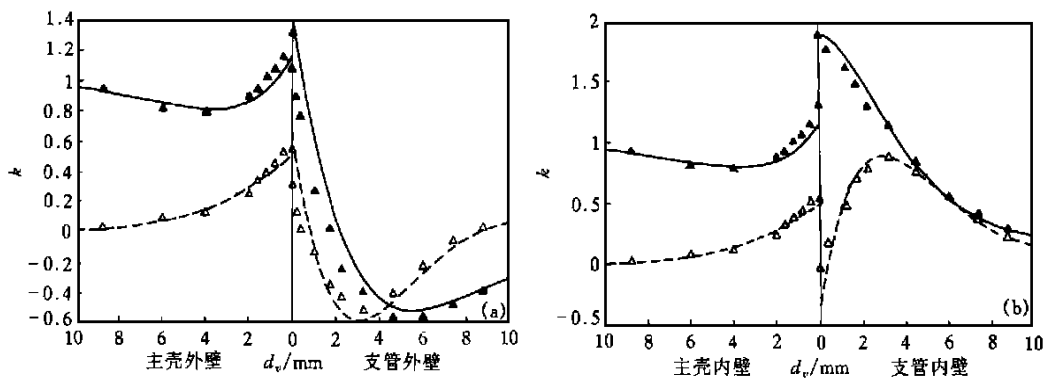


图 5
(a) M_{zc} 作用 $\theta=90^\circ$ 外壁 k 分布($\rho_0=0.8$); (b) M_{zc} 作用 $\theta=90^\circ$ 内壁 k 分布($\rho_0=0.8$);
虚线为 k_v 本文解, 实线为 k_t 本文解 $\triangle$ 为 k_v 有限元, $\blacktriangle$ 为 k_t 有限元

4.2 与 Moffat 给出的三维有限元解的比较

英国利物浦大学的 Moffat 进行了大量三维有限元计算^[6,7]. 图 6 给出在上述 3 种主壳外力矩作用下, 当 $\rho_0=0.8$, $D/T=d/t=40$ 时沿主壳与支管的交界线上($\theta=0^\circ\sim90^\circ$)主壳内壁的应力集中系数 SCF 的三维有限元解和相应的本文薄壳理论解的比较, 显示二者能较好地吻合. 其中 SCF 定义为计算点的 Tresca 应力强度与主壳上外力矩作用引起的远场应力强度之比^[6]. 图 7 给出 3 种主壳外力矩作用下最大应力强度集中系数 K_{xc} , K_{yc} , K_{zc} 值对于 ρ_0 , $D/T=d/t$ 值的变化规律, 也显示出本文计算结果与 Moffat 解的一致性.

Moffat 所给结果已被英国管道标准 BS-806 所采用, 但其范围仅限于 D/T 较小(即管壁较厚)且只限于 $t/T=1$ 与 $t/T=r/R$ 两种情况. 本文所给的薄壳理论解, 则可以适用于较大的 D/T 范围.

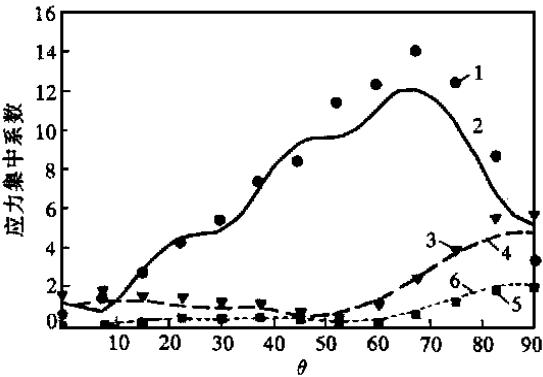


图 6 主壳内壁 Γ 线上 SCF 随 θ 的变化规律
1 为 M_{xc} (Moffat^[6]), 2 为 M_{xc} (本文解), 3 为 M_{yc} (Moffat^[6]), 4 为 M_{yc} (本文解), 5 为 M_{zc} (Moffat^[6]), 6 为 M_{zc} (本文解)

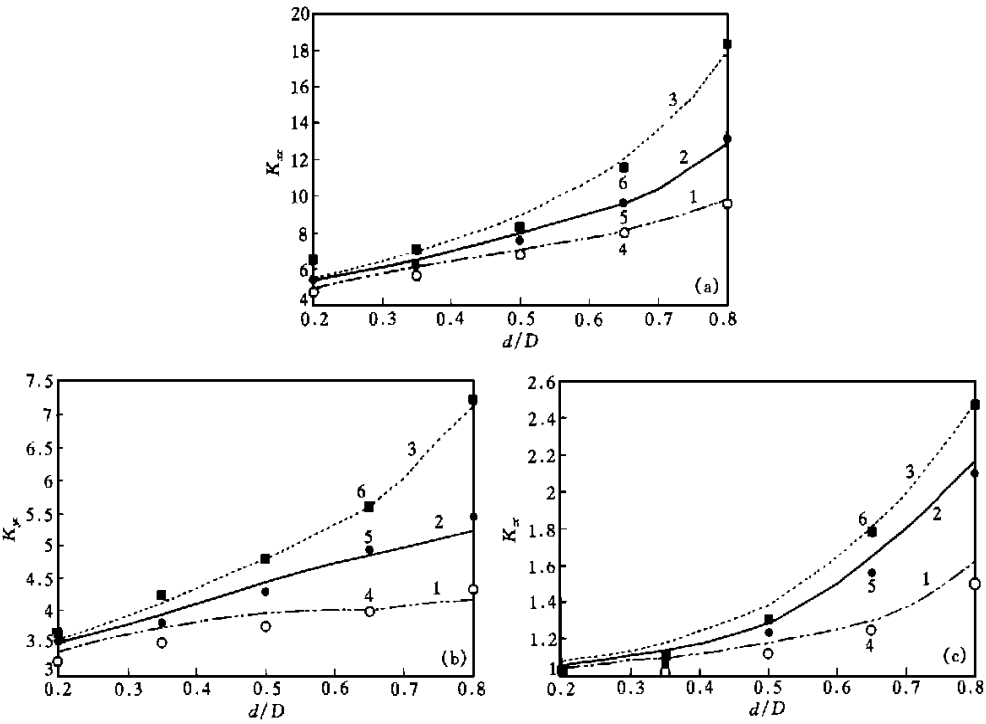


图 7

(a) K_{xc} 对 d/D , D/T 的变化规律; (b) K_{yc} 对 d/D , D/T 的变化规律; (c) K_{zc} 对 d/D , D/T 的变化规律; 1 为 $D/T=20$ (本文解), 2 为 $D/T=40$ (本文解), 3 为 $D/T=60$ (本文解), 4 为 $D/T=20$ (Moffat^[6]), 5 为 $D/T=40$ (Moffat^[6]), 6 为 $D/T=60$ (Moffat^[6])

5 最大应力强度集中系数 k 的变化规律

由分析可知, K 取决于 3 个无量纲参数: $\rho_0=r/R$, $\lambda=(d/D)\sqrt{D/T}$ 以及 t/T . 利用本文

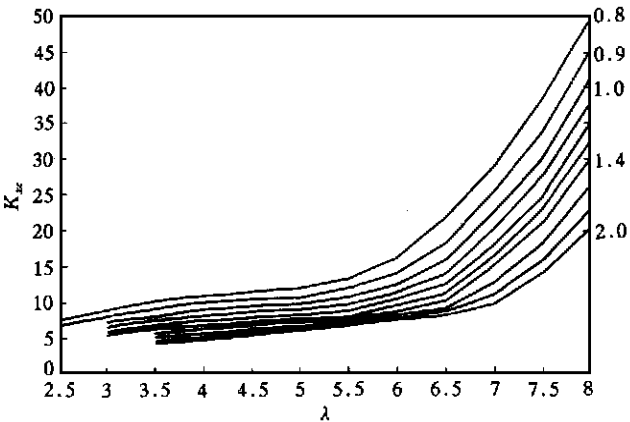


图 8 主壳受扭矩 M_{xc} 时最大应力集中系数 K_{xc} 随 λ 和 t/T 的变化规律

$r/R=0.8$, $t/T=0.8\ 0.9\ 1.0\ 1.1\ 1.2\ 1.3\ 1.4\ 1.6\ 1.8\ 2.0$

的薄壳理论解, 可以给出适用于工程设计的一批设计曲线, 图 8 仅给出其中一例(主壳受扭矩 M_{xc} 时最大应力集中系数随 λ 及 t/T 的变化规律): K_{xc} ($r/R=0.8$, $2.5\leq\lambda\leq8$, $r/R\leq t/T\leq2$). 成组的设计曲线将另文发表.

6 结论

本文给出了带径向接管的圆柱壳端部受力矩作用时的薄壳理论解, 所给的解适用于 $r/R\leq0.8$ 的情况, 经前人的实验及有限元解检验, 证明结

果是可靠的.

参 考 文 献

- 1 Eringen A C, Suhubi E S. Stress distribution at two normally intersecting cylindrical shells. *Nuclear Structural Eng*, 1965, 2: 235 ~ 270
- 2 Bijlaard P P. Stresses from local loading in cylindrical pressure vessels. *Trans ASME*, 1955, 77: 805 ~ 812
- 3 钱令希, 唐秀近, 钟万勰等. 圆柱壳开孔问题——单圆孔基本解, 大连工学院院刊, 1965, 3(4): 1 ~ 23
- 4 Lekkerkerker J G. The determination of elastic stresses near cylinder-to-cylinder intersection. *Nuclear Eng Des*, 1972, 20: 57 ~ 84
- 5 Steele C R, Steele M L. Stress analysis of nozzle in cylindrical vessels with external load. *ASME J Pres Ves Tech*, 1983, 105: 191 ~ 200
- 6 Moffat D G, Mwenifumbow J A M, Xu S H, et al. Effective stress factors for piping branch junctions due to internal pressure and external moment loads. *J Strain Analysis*, 1991, 26(2): 85 ~ 101
- 7 Amran Bin Ayob, Moffat D G, Mistry J. Interaction of pressure and moment loads on a piping branch junction using finite element analysis. *Proc 8th Int Conf on Pres Ves Technology*, Vol 2: Design and Analysis, ASME, 1996, 185 ~ 196
- 8 Afshari P, Widera G E O. Analysis of shell intersections. *Int Conf of Pres Ves Tech*, 1991, 378
- 9 Xue M D, Deng Y, Hwang K C. Some results on analytical solution of cylindrical shells with large opening. *ASME J Pres Ves Tech*, 1991, 113: 297 ~ 307
- 10 Deng Y, Hwang K C, Xue M D. The stress analysis of cylindrical shells with rigid inclusions having a large ratio of radii. *SMIRT 11 Transactions F*, F05/2, 1991, 85 ~ 90
- 11 薛明德, 陈伟, 黄克智. 圆柱壳大开孔的薄壳理论解. *力学学报*, 1995, 27(4): 482 ~ 488
- 12 Xue M D, Chen W, Hwang K C. Stresses at the intersection of two cylindrical shells. *Nuclear Engineering and Design*, 1995, 154: 231 ~ 238
- 13 Xue M D, Hwang K C, Lu W, et al. A reinforcement design method based on analysis of large openings in cylindrical pressure vessels. *ASME J Pres Ves Tech*, 1996, Vol 118, 502 ~ 506
- 14 Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1959
- 15 Goldenveizer A L. *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Pergamon Press, 1961
- 16 黄克智, 陆明万, 薛明德. *弹性薄壳理论*. 北京: 高等教育出版社, 1988
- 17 Conum J M, Bolt S E, Greenstreet W L, et al. Theoretical and experimental stress analysis of ORNL thin shell cylinder to cylinder Model-1. *ORNL Report 4553*, 1974