

基于SIAR体制的单基地MIMO雷达方向综合及测角性能分析

赵光辉*, 陈伯孝, 朱守平

西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 西安 710071

* E-mail: ghzhao1512@sohu.com

收稿日期: 2007-09-26; 接受日期: 2007-12-04

国家预研项目(批准号: 51307050201)、2006 年教育部新世纪优秀人才支持计划项目(批准号: NCET-06-0856)和国家自然科学基金(批准号: 60772068)项目资助

摘要 针对同时辐射多载频的正交信号、收发天线稀布且不共用的单基地 MIMO 雷达, 以及在低仰角目标回波存在多径现象的情况下, 提出一种基于 SIAR 体制的单基地 MIMO 雷达的方向综合方法, 即综合利用 MIMO 的发射天线和接收天线孔径, 在方位和俯仰两维数字波束形成(DBF); 并结合多载频工作的 MIMO 雷达, 研究了基于多径相干信号分离的面阵广义 MUSIC 算法. 该方法将发射天线、接收天线的相位延迟同时补偿, 在接收端对发射波束进行两维方向综合, 提高了雷达的角分辨力和测角精度; 并通过降维处理减少了运算量. 最后给出了多径情况下, 单基地 MIMO 雷达方位、俯仰二维角度估计的克拉美·罗界(CRB). 计算机仿真证实了该方法的有效性.

关键词

SIAR
单基地 MIMO 雷达
多径效应
超分辨
广义 MUSIC 算法
克拉美·罗界

近年来, 高技术兵器, 尤其是精确制导武器和远程打击武器的出现, 使战场范围扩大到陆、海、空多维空间中. 为了获得最佳的作战效果, 基于多传感器数据和信息融合的雷达组网技术, 特别是 MIMO (multiple-input multiple-output) 雷达^[1-6] 成为各国学者研究的重点. 虽然 MIMO 雷达的概念是近几年提出的, 但在此之前, 国内外对综合脉冲孔径雷达 (synthetic impulse and aperture radar, 简称 SIAR) 进行了深入的研究和实验^[7-9], 该雷达就包含 MIMO 的思想^[2]. MIMO 雷达采用多个天线辐射相互正交的信号, 信号形式包括正交相位编码信号和正交频率编码信号. 所谓正交频率编码信号, 就是各天线发射一组正交基的频率编码即不同载频的信号. 本文讨论的单基地 MIMO 雷达采用正交频率编码信号, 研究在多载频工作情况下 MIMO 雷达对目标回波方向的估计问题.

经过多年的发展, 阵列超分辨技术已经取得较大的成果, 主要有 MUSIC 法^[10]、Min-Norm 法^[11] 等特征结构法 (或称子空间方法) 和最大似然类参数估计方法等. 而传统 MUSIC 算法不能直接处理相干信号源的情况, 只能通过降维方法 (空间平滑技术^[12]) 去相关, 如此势必会降低天线的有效孔径, 导致波瓣进一步展宽, 角分辨率下降. 最大似然方法^[13] 可以解决相干问题, 但是其运算量很大, 不宜作实时处理. 且常规超分辨处理都是针对接收阵列天线而言, 利用不同目标到达各个接收阵元的相位差信息对其方位角或俯仰角进行超分辨处理. 然而, 对于文中的单基地 MIMO 雷达来说, 由于发射采用了一组正交编码的多载频调制信号, 且发射和接收都采用多根天线, 故其相位补偿不是简单的接收端相位补偿, 其超分辨不同于传统处理方法.

为此, 考虑到单基地 MIMO 雷达目标回波方向估计的特殊性, 提出了通过联合补偿发射天线、接收天线的相位延迟来实现 DBF 以及超分辨处理. 并针对低仰角目标回波信号中存在多径分量这一问题, 详细推导了多径情况下接收端等效多通道信号的矩阵表达式、收发天线联合 DBF、面阵广义 MUSIC 算法、单基地 MIMO 雷达方位、俯仰二维角度估计的 CRB 等公式, 最终通过超分辨处理实现了目标在方位、俯仰角的精确测量.

1 SIAR 体制雷达原理及性能简介

本文讨论的单基地 MIMO 雷达基于综合脉冲孔径^[8](SIAR)体制发展而来, 由于发射信号为一组正交信号, 其空间能量是均匀分布的(设阵元为各向同性), 虽然各方向上信号能量相同, 但其波形是不同的. 传统的相控阵雷达, 若要在某个方向上呈现为大振幅的窄脉冲, 即满足该方向的相位匹配关系, 可根据该方向各阵元的波程差调整发射相位; 但是, SIAR 雷达的发射采用固定相位, 对所需方向的相位匹配在接收端完成, 这与在发射端调整相位等效, 然后将调相后信号求和, 只有该相位相应方向上的目标, 方可得到匹配输出, 即输出一振幅大、宽度窄的脉冲. 这种接收端的信号分离、调相、求和处理相当于脉冲压缩匹配滤波, 它不仅是指信号的延时(即目标距离), 同时也指目标速度及目标所在方向(方位和俯仰), 故称为四维匹配滤波^[8,9].

接收阵的原理与一般稀布阵相同, 采用数字波束形成工作方式, 波束指向应与综合的发射波束同步, 即原理上每一个接收阵元通过对发射波束的综合和脉冲综合(各阵元的处理均相同), 得到目标的窄脉冲, 然后将各阵元的数据加以综合, 形成接收波束. 因此在完成发射波束综合后, 接收阵的处理流程等同于常规的面阵处理.

由于 SIAR 是一种特殊的米波雷达, 因此米波雷达固有的缺点是不可避免的. 米波雷达方向分辨率差的问题通过稀布阵可以解决, 但是稀布阵又带来能量利用率低、数据率低和旁瓣电平高的问题, 其他如低空性能和抗有源干扰差都有待于解决. 本文针对低空目标角度测量这一问题展开讨论, 由于镜像反射的多径效应, 米波雷达的仰角波束上翘, 难以得

到好的低空性能, 由于天线架高后, 仰角的栅瓣效应会十分明显, 会在某些位置出现峰值, 某些位置出现谷值, 这将使目标航迹时隐时现, 但是通过采用不同架高的多组天线工作可使峰谷互补. 本文就是在上述条件下对目标的二维角度(方位、俯仰)参量进行估计.

2 单基地 MIMO 雷达天线阵模型

单基地 MIMO 雷达, 其收发天线不共用, 为确保在综合发射和接收方向图过程中得到最低的旁瓣电平, 采用多重遗传算法对发射、接收阵元的位置进行了优化, 结果如图 1 所示. 每个发射天线全向辐射一组正交编码的线性调频信号, 可确保对空间的各向同性照射, 其发射方向图在接收端通过综合脉冲孔径^[9]形成. 假设图 1 所示的面阵中有 N_e 个发射天线, N_r 个接收天线, 以天线阵中心作为坐标原点, 以天线所在平面为 YOZ 平面, 建立坐标系, 如图 2 所示. 假设第 k 个天线单元(发射天线单元或接收天线单元) E_k 的直角坐标为 (x_k, y_k, z_k) , $x_k=0$, 其极坐标 $(d_k, \theta_k, \varphi_k)$ 表示为

$$\begin{cases} x_k = d_k \cos 90^\circ = 0, \\ y_k = d_k \cos \varphi_k, \\ z_k = d_k \sin \varphi_k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}, \\ \cos \varphi_k = y_k / d_k, \quad \sin \varphi_k = z_k / d_k, \\ \theta_k = 0. \end{cases} \quad (1)$$

目标 T 的直角坐标 (x_T, y_T, z_T) 和极坐标 (R, θ_T, φ_T)

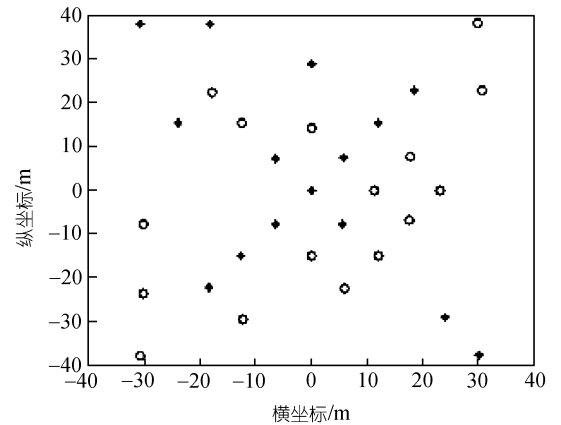


图 1 优化的天线位置

“+”发射天线; “o”接收天线

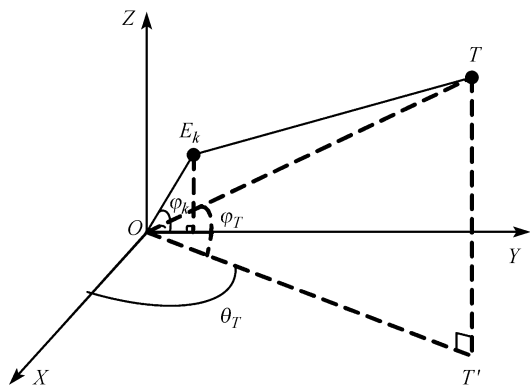


图 2 天线单元坐标系示意图

对应关系为

$$\begin{cases} x_T = R \cdot \cos \varphi_T \cdot \cos \theta_T, \\ y_T = R \cdot \cos \varphi_T \cdot \sin \theta_T, \\ z_T = R \cdot \sin \varphi_T, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2}, \\ \cos \varphi_T = y_T / R \sin \theta_T, \quad \sin \varphi_T = z_T / R, \\ \sin \theta_T = y_T / \sqrt{x_T^2 + y_T^2}. \end{cases} \quad (2)$$

其中, θ_k, φ_k 分别表示阵元 E_k (发射阵元 E_{ek} 或接收阵元 E_{rk}) 在极坐标系下的方位角和俯仰角; θ_T, φ_T 分别表示目标 T 在极坐标系下的方位角和俯仰角。

天线单元 E_k 与目标 T 的距离为

$$\begin{aligned} |PE_k| &= \sqrt{(x_T - x_k)^2 + (y_T - y_k)^2 + (z_T - z_k)^2} \\ &\approx R - d_k (\sin \theta_T \cos \varphi_T \cos \varphi_k + \sin \varphi_T \sin \varphi_k). \end{aligned} \quad (3)$$

目标 T 与天线单元 E_k 相对于阵列中心的波程差和回波延迟为

$$\begin{aligned} \Delta R_k &= R - |PE_k| \\ &\approx d_k (\sin \theta_T \cos \varphi_T \cos \varphi_k + \sin \varphi_T \sin \varphi_k), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau_k = d_k (\sin \theta_T \cos \varphi_T \cos \varphi_k + \sin \varphi_T \sin \varphi_k) / C, \quad (5)$$

其中, C 为光速。

3 基于 SIAR 体制的单基地 MIMO 雷达信号模型

考虑一远场低空动目标, 若发射采用变频窄带线性调频信号, 第 k 个发射天线的信号可以表示为

$$S_{ek}(t) = g(t) A_k \exp \left(j2\pi \left(f_k t - \frac{1}{2} u t^2 \right) \right). \quad (6)$$

由于接收采用多根天线, 且假设发射、接收天线

与目标之间的距离远大于天线的度越时间, 可以认为回波信号的幅度是恒定的, 即各路接收天线的回波信号复包络可以认为是固定不变的。且由于米波波束较宽, 俯仰维波束容易打地, 造成回波信号中包含地面(或海面)多径反射信号, 因此第 l 个接收天线接收的第 k 个发射天线的回波信号为

$$\begin{aligned} S_{rkl}(t) &= (1+r) g(t - \tau_{kl}) A_k \exp \left(j2\pi \left(f_k t - \frac{1}{2} u t^2 \right) \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(j2\pi \left(u \tau_{kl} t - f_k \tau_{kl} - \frac{1}{2} u \tau_{kl}^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $r = \rho \exp(j(\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2))$ 为水平极化下地面反射系数, ρ 为地面反射系数幅值, $\Delta\phi_1 = \pi$, $\Delta\phi_2$ 为多径信号相对直达波的相位延迟; $f_k = f_0 + c_k \Delta f$ 为第 k 个发射天线的发射载频, Δf 为发射信号之间的频率间隔, $c_k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_e/2\}$ 为发射信号频率编码; u 为调频斜率; $g(t)$ 为门控信号用于对调频信号截断; A_k 为发射单元的信号幅度; $\tau_{kl} = \tau_0 - \Delta\tau_{kl} - v_l t' / C$ 为第 k 个发射天线到目标再到第 l 个接收天线的延迟, $\tau_0 = 2R_0/C$ 为目标初始距离 R_0 对应的回波延迟; v_l 为目标的径向速度, t 为采样时间; $\Delta\tau_{kl} = \Delta\tau_{k0} + \Delta\tau_{l0}$, $\Delta\tau_{k0} = d_k (\sin \theta_T \cos \varphi_T \cos \varphi_k + \sin \varphi_T \sin \varphi_k) / C$ 为目标相对于第 k 个发射天线和阵列中心的波程时延差, $\Delta\tau_{l0} = d_l (\sin \theta_T \cos \varphi_T \cos \varphi_l + \sin \varphi_T \sin \varphi_l) / C$ 为目标相对于第 l 个接收天线和阵列中心的波程差, d_k, d_l 分别为第 k 个发射天线和第 l 个接收天线到阵列中心的距离。将第 l 个接收天线的回波信号与参考发射信号

$$\begin{aligned} &\exp \left(-j2\pi \left(f_0 t - \frac{1}{2} u t^2 \right) \right) \text{混频, 得到如下信号表达式} \\ S_{rl}(t) &\approx \sum_{k=1}^{N_e} S_{rkl} = (1+r) \sum_{k=1}^{N_e} g(t - \tau_{kl}) A_k \\ &\quad \cdot \exp \left(j2\pi \left((f_k - f_0) + u \tau_{kl} \right) t - f_k \tau_{kl} - \frac{1}{2} u \tau_{kl}^2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

将上式分别与复信号 $\exp(-j2\pi(c_k \Delta f t))$ 相乘, 并分别经过低通滤波, 得到第 l 个接收天线的 N_e 路等效发射信号

$$\begin{aligned} r_{lk}(t) &= (1+r) g(t - \tau_{kl}) A_k \\ &\quad \cdot \exp \left(j2\pi \left(u \tau_{kl} t - f_k \tau_{kl} - \frac{1}{2} u \tau_{kl}^2 \right) \right), \quad k=1, \dots, N_e. \end{aligned} \quad (9)$$

由于目标位于远场, 其 $\tau_0 \gg \Delta\tau_{kl}$, $\tau_0 \gg v_t t' / c$, 因此 $u\tau_{kl} \approx u\tau_0$, 可见 N_e 路等效信号均与目标的距离有关, 窄带情况下, 当调频率不大时, 相比相位项 $-f_k \tau_{kl}$, $-\frac{1}{2}u\tau_{kl}^2$ 的影响可以忽略. 对(9)式进行脉冲压缩、相干积累即可得到目标的距离和速度. 为方便后续数据处理, 将所有接收天线的回波数据表示成矩阵形式

$$\mathbf{X} = [\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \dots, \mathbf{r}_{N_r}^T] = \mathbf{A}(\theta_T, \varphi_T) \mathbf{s}(nT_r) + \mathbf{N}, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_{N_r}^T)$ 为方向矩阵; $\mathbf{s}(nT_r) = (1 +$

$r)A' \exp(j2\pi f_d nT_r)$ 可看作脉冲压缩后目标回波信号的复包络, A' 为脉冲压缩后目标回波的幅度; $\mathbf{r}_l(R_0, nT_r) = \mathbf{a}_l(R_0, \theta_T, \varphi_T) \mathbf{s}(nT_r)$ 为第 l 路接收天线的回波信号,

$$\mathbf{a}_l(R_0, \theta_T, \varphi_T) = [\exp(-j2\pi f_1(\tau_0 - \Delta\tau_{1l})), \dots, \exp(-j2\pi f_{N_e}(\tau_0 - \Delta\tau_{N_e l}))]^T$$

为第 l 路接收天线的 N_e 路等效接收信号的方向矢量; $\mathbf{N}$ 表示零均值平稳高斯噪声矩阵.

该雷达系统的处理流程如图3所示. 首先对接收信号进行混频、A/D 变换、低通滤波、脉冲压缩等处理, 获得目标的距离信息; 然后通过 N_r 个接收天线获

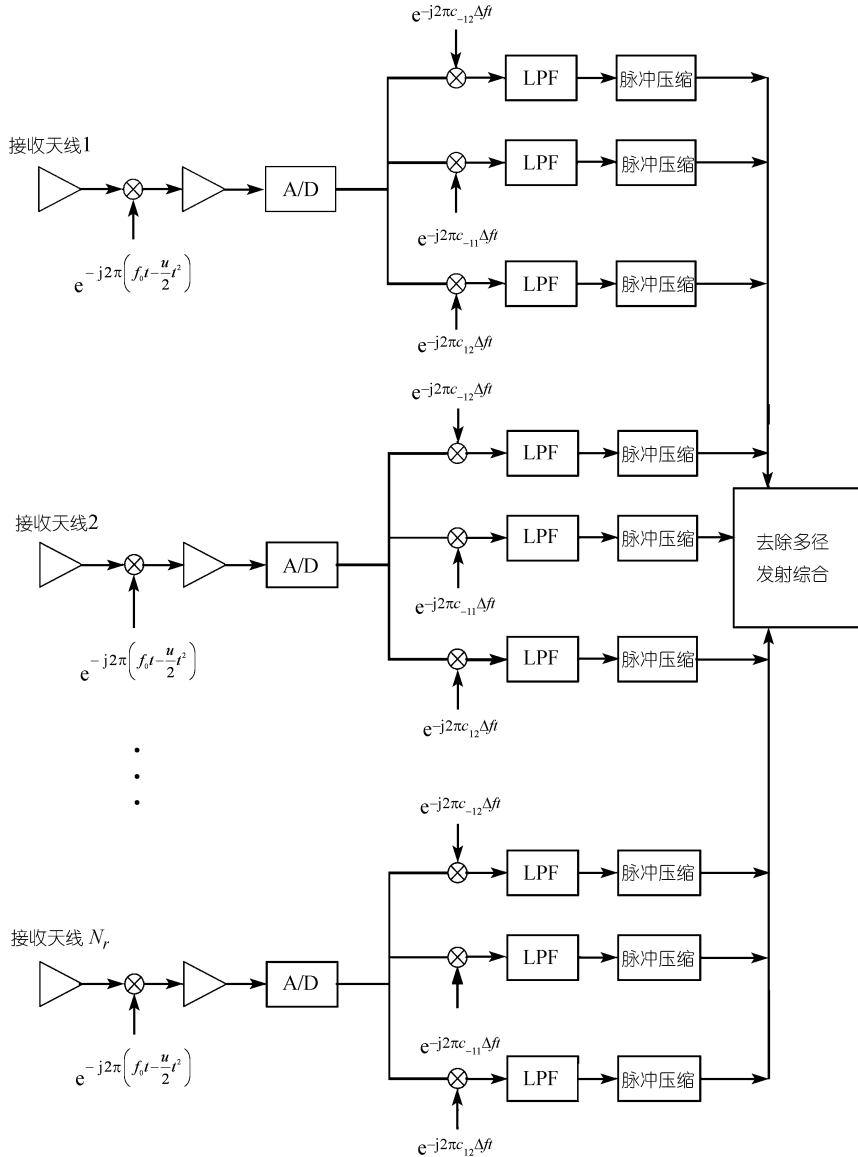


图3 单基地 MIMO 雷达信号处理流程图

得 $N_r \times N_e$ 路等效信号, 对其进行方位、俯仰两维波束综合, 获得目标的方位、俯仰信息; 再对多周期的信号作相干积累即可获得目标的速度信息^[8,9].

4 SIAR 体制下单基地 MIMO 雷达方位、俯仰两维波束形成及其超分辨算法

从(10)式可以看出, 脉冲压缩之后, 单根接收天线的接收信号经分离处理后得到的数据模型与常规非均匀面阵接收的数据模型等效^[14,15], 不同之处在于接收信号为多载频回波. 常规 DBF 方法同样适用于单基地 MIMO 雷达, 但是对多载频发射信号来说, 存在发射信号资源浪费问题, 且由于回波信号载频不同, 可以获得的目标信息多于常规雷达, 因此采用多载频(即异频)处理更适用于目标方位、俯仰的二维角度的精确测量.

由第 2 节的原理可知, 基于 SIAR 体制的单基地 MIMO 雷达在完成图 3 所示的信号处理后, 首先是在接收端形成等效发射方向图, 即首先补偿发射信号相位, 使得发射信号在某一空域形成窄波束, 然后在该波束范围内补偿接收信号相位, 从而形成接收方向图, 因此可以按照上述步骤进行数字波束形成.

(10)式中的方向矩阵 $\mathbf{A}$, 其每个元素都是发射天线位置、接收天线位置以及目标方向的函数, 即进行波束综合时, 需要对发射天线和接收天线的相位延迟分别补偿, 因此它是一个收发天线联合的波束综合过程. 以下即为收发天线联合 DBF 表达式

$$\text{DBF}(\theta, \varphi) = \sum \sum (\mathbf{W}_e \odot \mathbf{X} \odot \mathbf{W}_r), \quad (11)$$

其中, $\mathbf{W}_e$ 为发射天线相位补偿矩阵, $\mathbf{W}_e = [\mathbf{w}_{e1}^T, \mathbf{w}_{e2}^T, \dots, \mathbf{w}_{eN_e}^T]$, $\mathbf{w}_{ek} = \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_{ek}$, $\mathbf{I} = [1, 1, \dots, 1]_{1 \times N_r}$, $\boldsymbol{\tau}_{ek} = \exp(j2\pi f_k(2R_0 - d_k(\sin \theta \cos \varphi \cos \varphi_k + \sin \varphi \sin \varphi_k))/C)$; $\mathbf{W}_r$ 为接收天线相位补偿矩阵, $\mathbf{W}_r = [\mathbf{w}_{r1}, \mathbf{w}_{r2}, \dots, \mathbf{w}_{rN_r}]^T$, $\mathbf{w}_{rl} = [\mathbf{w}_{r1l}, \mathbf{w}_{r2l}, \dots, \mathbf{w}_{rN_e l}]$, $\mathbf{w}_{rkl} = \exp(-j2\pi f_k d_l(\sin \theta \cos \varphi \cos \varphi_l + \sin \varphi \sin \varphi_l)/C)$, $l = 1, \dots, N_r$, $k = 1, \dots, N_e$.

由于回波中包含多径分量, 采用上式 DBF 公式只能得到目标角度的大致位置. 为了解决多径问题, 提出先采用 DBF 进行方位、俯仰两维角度粗测, 再采用超分辨算法进行角度细测的方法.

从(11)式可以看出, DBF 对接收信号回波 $\mathbf{X}$ 进行

了两次加权处理, 首先是发射天线位置的异频相位加权(即补偿发射天线的信号延迟), 由于混频后的信号是同频信号, 故其等效同频接收阵信号回波可以表示为

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{W}_e \odot \mathbf{X}, \quad (12)$$

$\mathbf{X}_r$ 可以认为是由不同载频信号经过脉冲压缩后得到的目标所在距离单元的快拍阵, 该矩阵只包含接收天线阵的相位延迟, 其等效同频接收阵的协方差矩阵定义为

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{X}_r \mathbf{X}_r^H], \quad (13)$$

(13)式中, E 表示数学期望, H 表示复共轭转置. 将阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}_x$ 进行特征值分解有

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sum_{i=m+1}^{N_r} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H = \mathbf{P}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{P}_s^H + \mathbf{P}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{P}_n^H, \quad (14)$$

其中, $\{\lambda_i; i=1, \dots, N_r; \lambda_i \geq \lambda_{i+1}\}$ 和 $\{\mathbf{e}_i; i=1, \dots, N_r\}$ 是按降序排列的矩阵 $\mathbf{R}_x$ 的特征值与对应的特征矢量. $\mathbf{P}_s = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m]$ 和 $\mathbf{P}_n = [\mathbf{e}_{m+1}, \mathbf{e}_{m+2}, \dots, \mathbf{e}_{N_r}]$ 分别为矩阵 $\mathbf{R}_x$ 的信号子空间和噪声子空间. 通常情况下, 矩阵 $\mathbf{R}_x$ 由有限快拍数据估计得到, 其统计一致估计为

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \mathbf{X}_r \mathbf{X}_r^H, \quad (15)$$

相应地, 估计协方差矩阵的特征值分解表示为

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \hat{\mathbf{P}}_s \hat{\mathbf{\Lambda}}_s \hat{\mathbf{P}}_s^H + \hat{\mathbf{P}}_n \hat{\mathbf{\Lambda}}_n \hat{\mathbf{P}}_n^H. \quad (16)$$

由于此时的信号模型等效为同频非均匀面阵的数学模型, 所以可以直接采用非均匀面阵超分辨算法进行方位、俯仰两维角度搜索. 在本文的应用条件下, 结合线阵广义 MUSIC 算法^[16], 推导面阵的广义 MUSIC 空间谱函数

$$S_\rho(\theta, \varphi_d, \varphi_s) = \left[\min_{\rho} \frac{\rho^H \mathbf{A}^H(\theta, \varphi_d, \varphi_s) \hat{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}(\theta, \varphi_d, \varphi_s) \rho}{\rho^H \mathbf{A}^H(\theta, \varphi_d, \varphi_s) \mathbf{A}(\theta, \varphi_d, \varphi_s) \rho} \right]^{-1}, \quad (17)$$

其中, $\mathbf{A}(\theta, \varphi_d, \varphi_s) = [\mathbf{a}(\theta, \varphi_d), \mathbf{a}(\theta, \varphi_s)]$ 为方位、俯仰两维方向矩阵; $\mathbf{a}(\theta, \varphi_d)$ 和 $\mathbf{a}(\theta, \varphi_s)$ 分别为直达波和多径信号的方向矢量.

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi_d) = [\mathbf{a}(\theta, \varphi_{d1}), \mathbf{a}(\theta, \varphi_{d2}), \dots, \mathbf{a}(\theta, \varphi_{dN_r})],$$

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi_s) = [\mathbf{a}(\theta, \varphi_{s1}), \mathbf{a}(\theta, \varphi_{s2}), \dots, \mathbf{a}(\theta, \varphi_{sN_e})],$$

$$a(\theta, \varphi_{dl}) = \exp(-j2\pi f_0 d_l (\sin \theta \cos \varphi_d \cos \varphi_l + \sin \varphi_d \sin \varphi_l)/C), \quad \varphi_d \in (0^\circ \sim 90^\circ),$$

$$a(\theta, \varphi_{sl}) = \exp(-j2\pi f_0 d_l (\sin \theta \cos \varphi_s \cos \varphi_l + \sin \varphi_s \sin \varphi_l)/C), \quad \varphi_s \in (-90^\circ \sim 0^\circ).$$

(17)式中的方位、俯仰角度搜索是个三维角度搜索过程, 从工程实现的角度出发, 为提高搜索速度以及降低运算量, 结合低仰角目标高度测量中的几何关系, 对上式进行了如下的修改。

考虑到平坦阵地上某一远场目标, 目标低空飞行, 接收信号的几何关系如图4所示。图4中 R_d 为目标直达波到接收天线的距离, h_r 表示参考天线架设高度, h_t 表示目标高度。从图4中可以看出, 目标的直达波入射角与多径信号入射角存在如下的等式关系

$$\frac{R_d \cos(\theta_d)}{\sin(90 - \theta_s)} \approx \frac{2h_r + h_t}{\sin(\theta_s)}, \quad (18)$$

$$\theta_s \approx \arctan \frac{3h_r + R_d \sin(\theta_d)}{R_d \cos(\theta_d)}. \quad (19)$$

(18)~(19)式将(17)式的三维搜索转变为二维搜索, 降低了运算量。第6节中将给出简化方法的性能分析。

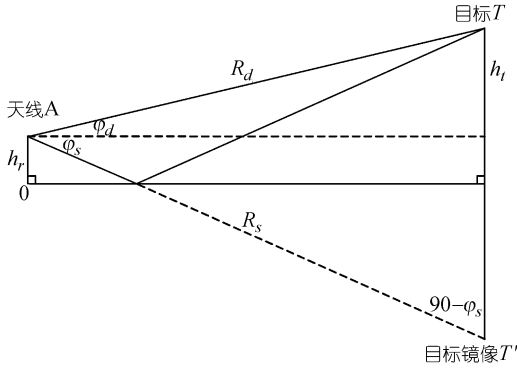


图4 多径情况下低空目标模型

根据以上推导, 可将整个超分辨处理的具体步骤归纳如下。

1) 按照图3的信号流程得到脉冲压缩后的回波信号, 然后根据(11)式对其进行收发天线联合波束形成, 即对目标方位、俯仰两维角度粗测, 确定目标的方位角、俯仰角的大致位置。

2) 根据步骤1中目标角度的大致位置确定角度 (θ, φ) 的搜索范围, 然后每给定一组角度值, 按(12)式补偿发射天线的相位延迟, 得到等效同频接收阵

信号回波 $\mathbf{X}_r$ 。

3) 按照(15)式对补偿后的同频接收阵信号 $\mathbf{X}_r$ 进行协方差矩阵构造, 通过(16)式进行特征值分解, 得到噪声子空间, 最后通过对(17)式的空间谱函数的求解完成对目标俯仰角和方位角的遍历搜索。

5 基于 SIAR 体制的单基地 MIMO 雷达方位、俯仰二维角度的克拉美·罗界

定理1 基于 SIAR 体制单基地 MIMO 雷达, 其单目标(考虑多径)方位、俯仰二维角度的 CRB

$$\text{CRB}(\theta) = \{\mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{O}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Theta}\}^{-1}, \quad (20)$$

$$\text{CRB}(\varphi) = \{\mathbf{O} - \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{M}\}^{-1}, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi = 2 \cdot \text{SNR} \cdot & \left\{ \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}| \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}|^2 \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right) \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = 2 \cdot \text{SNR} \cdot & \left\{ \left(j \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} Q_{kl}^* F_{kl} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}|^2 \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right) \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \right. \\ & \left. \cdot \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} F_{kl}^* Q_{kl} \right)^H \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} = 2 \cdot \text{SNR} \cdot & \left\{ \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |F_{kl}|^2 \right) \right. \\ & \left. - \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} F_{kl}^* Q_{kl} \right) \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta} = 2 \cdot \text{SNR} \cdot & \left\{ \left(j \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} Q_{kl}^* F_{kl} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) - \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} F_{kl}^* Q_{kl} \right) \right. \\ & \left. \cdot \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \left(j \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}|^2 \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

$$F_{kl} = \frac{\partial Q_{kl}}{\partial \varphi} - j Q_{kl} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial Q_{kl}}{\partial \varphi} = -j \rho \exp(j \Phi_{kl}) \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \varphi} = 4\pi f_k z_{rl} \cos \varphi / C.$$

$Q_{kl} = 1 + r = 1 - \rho \exp(j\phi_{kl})$, $\phi_{kl} \approx 2\pi f_k \Delta\tau_l$ 表示对于第 l 个接收天线来说, 其接收到的第 k 个发射天线的目标回波的多径分量较直达波的相位差; $\Delta\tau_l \approx 2d_l \sin \varphi_T \sin \varphi_l / C$ 为直达波与反射波的时延差。

若令 $\Phi_{kl} = -2\pi f_k (\tau_0 - \Delta\tau_{kl})$, 则考虑多径情况下的方向矩阵 $\mathbf{A}_r$ 如下所示

$$\mathbf{A}_r = [Q_{11} \exp(-j\Phi_{11}), Q_{21} \exp(-j\Phi_{21}), \dots, Q_{N_e 1} \exp(-j\Phi_{N_e 1}), \dots, Q_{1N_r} \exp(-j\Phi_{1N_r}), Q_{2N_r} \exp(-j\Phi_{2N_r}), \dots, Q_{N_e N_r} \exp(-j\Phi_{N_e N_r})]^T.$$

(具体公式推导参见附录 A)

6 计算机仿真和实测数据处理

为验证本文超分辨算法的有效性和理论分析的正确性, 我们作了如下的计算机仿真. 采用图 1 所示的天线位置, 图 1 中发射阵元 15 个, 接收阵元 16 个. 每个天线单元包含 3×2 共 6 个阵子, 天线单元之间存在水平维和垂直维的间距约束, 即水平间隔大于 1.1λ , 垂直间隔大于 1.65λ , λ 为波长. 发射中心频率为 240 MHz. 考虑一远场低仰角目标, 目标距参考发射阵元的中心距离为 140 km, 高度为 2445 m, 方位角为 -3° , 俯仰角为 0.4° , 地面反射系数为 0.7, 信噪比为 7 dB. 图 5(a) 和 (b) 分别为采用收发联合 DBF、改进的面阵超分辨算法搜索的结果. 从图 5(a) 可以看出, 存在多径影响的情况下, 收发天线联合 DBF 处理只能得到目标的大致角度位置, 图中目标方位角位于 -3° 附近, 俯仰角在 0.6° 左右, 偏离了目标真实角度值; 从图 5(b) 搜索结果来看, 目标方位角位于 -3° , 俯仰角在 0.4° ,

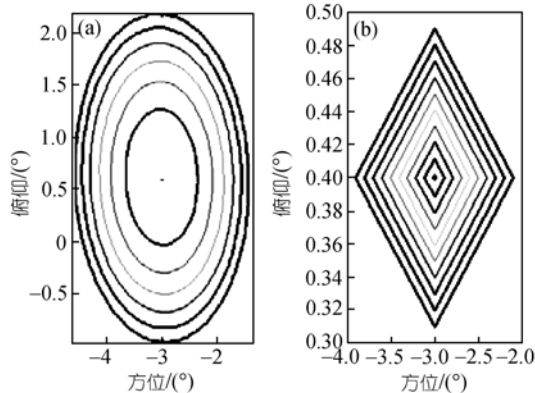


图 5 方位-俯仰等高图

正确得到了目标的二维角度值; 为便于显示, 给出了图 6 所示的收发联合面阵广义 MUSIC 算法俯仰维超分辨三维图。

超分辨过程中, 由于 $\mathbf{X}_r$ 被理解为由多载频信号经脉冲压缩后得到的目标所在距离单元的快拍阵, 即处理过程中综合考虑了所有发射信息, 进行了异频处理, 因此其信息量大于同频信号处理. 为对比两种方法的处理性能进行了如下的仿真: 目标方位角为 13° , 俯仰角为 1.1° , 地面反射系数为 0.7, 信噪比由 0 dB 变化到 25 dB, 目标距参考发射阵元的中心距离为 150 km, 高度为 2880 m, 图 7 为目标俯仰角的均方根误差随信噪比变化曲线. 由图可见, 相对于同频信号, 异频处理方法在低信噪比、少快拍的情况下可以得到更好的测量结果。

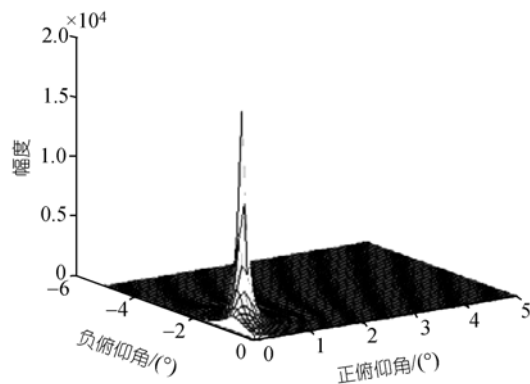


图 6 收发联合广义 MUSIC 俯仰角精测结果

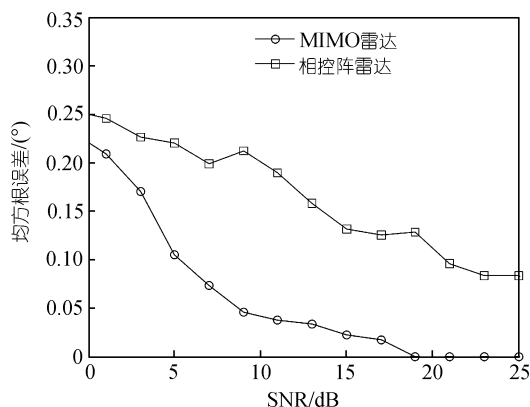


图 7 异频、同频超分辨性能比较

图 8 为采用改进算法, 将三维角度搜索转变为二维搜索, 得到的俯仰角均方根误差随信噪比(脉冲压缩前信噪比)变化曲线. 仿真条件同上. 由图 8 可见,

改进算法在一定信噪比下同样可以满足测角要求。

为比较本文算法的性能, 将收发联合广义 MUSIC 算法与单基地 MIMO 雷达方位、俯仰二维角度的克拉美·罗界^[18]进行了均方根误差对比, 图 9 即为性能对比结果, 图 9 中‘□’为采用超分辨算法进行 100 次

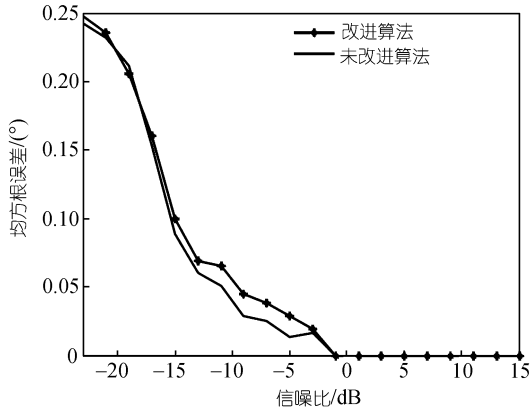


图 8 降维后的改进算法与未改进算法性能比较

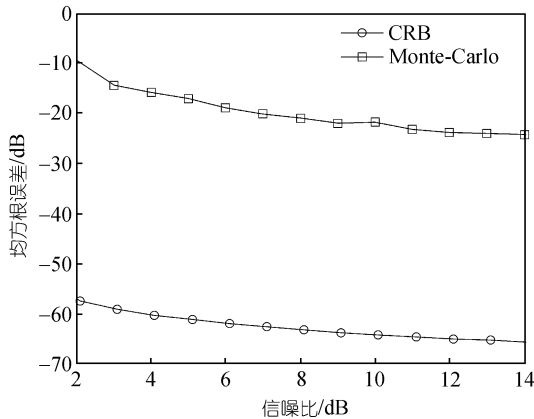


图 9 二维超分辨算法与克拉美·罗界的性能比较

Monte-Carlo 实验统计得到的结果, ‘○’为单基地 MIMO 雷达单目标方位、俯仰二维角度的克拉美·罗界。从仿真结果可以看出, 该算法的测量误差随着信噪比的升高而逐渐减少。

7 结束语

由于本文讨论的基于 SIAR 体制的单基地 MIMO 雷达收发天线不共用且稀疏分布, 考虑到发射天线的正交性以及低空目标回波存在多径信号等问题, 文中详细给出了目标距离、方位角、俯仰角的处理流程, 并针对多径情况下信号相干问题, 提出了收发天线联合 DBF、改进的面阵广义 MUSIC 超分辨处理方法, 最后推导了 SIAR 体制下单基地 MIMO 雷达方位、俯仰二维角度的克拉美·罗界(CRB)。仿真结果证实了该方法的有效性以及正确性。

8 展望

近年来, MIMO 雷达成为国内外雷达界研究的热点, 但是对其研究仍处于初级阶段, 本文研究了基于 SIAR 体制的单基地 MIMO 雷达二维角度参量估计问题, 本文的假设前提是在距离、多普勒等参量已知情况下完成的, 实际处理中由于现有技术等瓶颈使得这些参量只能大致估计得到, 造成实际高度测量中存在偏差; 从 SIAR 体制雷达的四维模糊函数^[17]可以看出该四维参量(距离、速度、方位、俯仰)间存在相互耦合问题; 在接收端进行发射方向图综合时, 如果接收通道幅相不一致会造成相位补偿不当, 直接影响超分辨的测量。以上诸多问题将成为日后研究工作的重点。

参考文献

- 1 Fishler E, Haimovich A, Blum R, et al. MIMO radar: An idea whose time has come. In: 2004 IEEE International Conference Radar. Philadelphia, 2004. 71—78
- 2 Hammad A K, Wasim Q M, David J E, et al. Ultra wideband multiple-input multi-output radar. In: IEEE International Radar Conference. Arlington Virginia, 2005
- 3 Forsythe K W, Bliss D W, Fawcett G S. Multiple-input multiple-output (MIMO) radar: Performance issues. In: Proceedings of IEEE Radar Conference. Pacific Grove, 2004
- 4 daniel R F, Geoffrey S A. Transmit beamforming for MIMO radar systems using partial signal correlation. In: Proceedings of IEEE Radar Conference. Pacific Grove, 2004
- 5 Frank C R, Scott C, Dennis W, et al. Mimo radar theory and experimental results. In: Proceedings of IEEE Radar Conference. Pacific Grove, 2004
- 6 Bliss D W, Forsythe K W. Multiple-input multiple-output (MIMO) radar and imaging: Degrees of freedom and resolution. In: Pro-

- ceedings of 37th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, 2003
- 7 J Dorey, G Garnier, G Auvray, et al. Synthetic impulse and antenna radar. In: proceedings of International Conference on Radar. Paris, 1989. 556—562
 - 8 保铮, 张庆文. 一种新型的米波雷达-综合脉冲与孔径雷达. 现代雷达, 1995, 17(1): 1—13
 - 9 陈伯孝. SIAR 四维跟踪及其长相干积累等技术研究. 博士学位论文. 西安: 西安电子科技大学, 1997
 - 10 Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Trans Antenna Propag, 1986, 34(3): 276—280
 - 11 Kumaresan R, Tufts D W. Estimating the angles of arrival of multiple plane waves. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1983, 19(1): 134—139
 - 12 Rao B D, Hari K V S. On spatial smoothing and weighted subspace methods. In: Process 24th Asilomar Conference on Signals, Systems, Computers. 1990, 2(5-7): 936—940
 - 13 Ziskind I, Wax M. Maximum likelihood localization at multiple sources by alternating projection. IEEE Trans ASSP, 1988, 36(10): 1553—1560
 - 14 陈伯孝, 许辉, 张守宏. 舰载无源综合脉冲/孔径雷达及其若干关键问题. 电子学报, 2003, 31(12): 1776—1779
 - 15 苏洪涛. 超视距雷达目标检测与干扰抑制方法研究. 博士学位论文. 西安: 西安电子科技大学, 2004
 - 16 Zoltowski M, Haber F. Vector space approach to direction finding in a coherent multipath environment. IEEE Trans Antennas Propagation, 1986, 34(9): 1069—1079 [DOI](#)
 - 17 陈伯孝, 张守宏. 稀布阵综合脉冲孔径雷达的四维模糊函数及其分辨率. 信号处理, 1998, 14(12): 33—37

附录 A 定理 1 推导过程

不考虑多径影响情况下, 当接收回波仅包含单个目标的直达波信号时, 单根天线的接收信号模型可用下式表示

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_l(R, \theta, \varphi, t) &= \begin{bmatrix} r_{1l} \\ r_{2l} \\ \vdots \\ r_{N_e l} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A' \exp(j2\pi f_d t) \exp(-j2\pi f_l(\tau_0 - \Delta\tau_{1l})) \\ A' \exp(j2\pi f_d t) \exp(-j2\pi f_l(\tau_0 - \Delta\tau_{2l})) \\ \vdots \\ A' \exp(j2\pi f_d t) \exp(-j2\pi f_{N_e}(\tau_0 - \Delta\tau_{N_e l})) \end{bmatrix} + \mathbf{N}_l \\
 &= \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi f_l(\tau_0 - \Delta\tau_{1l})) \\ \exp(-j2\pi f_l(\tau_0 - \Delta\tau_{2l})) \\ \vdots \\ \exp(-j2\pi f_{N_e}(\tau_0 - \Delta\tau_{N_e l})) \end{bmatrix} [A' \exp(j2\pi f_d t)] + \mathbf{N}_l \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}(\theta, \varphi) \\ a_{21}(\theta, \varphi) \\ \vdots \\ a_{N_e 1}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} x(t) = \mathbf{a}_l(R, \theta, \varphi) x(t) + \mathbf{N}_l. \quad (\text{A1})
 \end{aligned}$$

各参量定义参见文中所述. 所有接收天线的回波数据可以通过如下的矩阵形式表示, 其中 $\mathbf{N}$ 表示接收天线的回波噪声

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(R, \theta, \varphi, t) \\ \mathbf{r}_2(R, \theta, \varphi, t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_r}(R, \theta, \varphi, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(R, \theta, \varphi) \\ \mathbf{a}_2(R, \theta, \varphi) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_r}(R, \theta, \varphi) \end{bmatrix} x(t) + \mathbf{N}. \quad (\text{A2})$$

当接收回波中包含多个目标时, (2)式可以表示成如下矩阵形式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_r} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(R_1, \theta_1, \varphi_1) & \mathbf{a}_1(R_2, \theta_2, \varphi_2) & \cdots & \mathbf{a}_1(R_p, \theta_p, \varphi_p) \\ \mathbf{a}_2(R_1, \theta_1, \varphi_1) & \mathbf{a}_2(R_2, \theta_2, \varphi_2) & \cdots & \mathbf{a}_2(R_p, \theta_p, \varphi_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N_r}(R_1, \theta_1, \varphi_1) & \mathbf{a}_{N_r}(R_2, \theta_2, \varphi_2) & \cdots & \mathbf{a}_{N_r}(R_p, \theta_p, \varphi_p) \end{bmatrix} \\
 &\quad \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{bmatrix} + \mathbf{N} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{N}, \quad (\text{A3})
 \end{aligned}$$

其中, $x_i(t) = A'_i \exp(j2\pi f_{di} t)$, $i = 1, 2, \dots, p$. 根据以上的信号模型, 令 $m = N_e \times N_r$ 为等效接收天线个数, N 为采样点个数, p 为目标个数, 则以上信号模型所对应的似然函数可以表示为

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(N)) &= \frac{1}{(2\pi)^{mN} (\sigma/2)^{mN}} \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N [\mathbf{y}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t)]^H [\mathbf{y}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t)] \right\}, \quad (\text{A4})
 \end{aligned}$$

其对数似然函数为

$$\ln L = \text{const} - mN \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{t=1}^N [\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)]^H [\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)]. \quad (\text{A5})$$

由于(5)式是关于 σ , $\{\tilde{x}(t) \triangleq \text{Re}x(t)\}$, $\{\tilde{x}(t) \triangleq \text{Im}x(t)\}$, θ 以及 φ 的函数, 对其分别求导可得

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} \right| = -\frac{mN}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N e^H(t) e(t), \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| &= \frac{1}{\sigma} [\mathbf{A}^H e(k) + \mathbf{A}^T e^*(k)] \\ &= \frac{2}{\sigma} \text{Re}[\mathbf{A}^H e(k)], \quad k=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| &= \frac{1}{\sigma} [-i\mathbf{A}^H e(k) + i\mathbf{A}^T e^*(k)] \\ &= \frac{2}{\sigma} \text{Im}[\mathbf{A}^H e(k)], \quad k=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right| = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re}[\mathbf{X}^H \mathbf{D}^H e(t)], \quad (\text{A9})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} \right| = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re}[\mathbf{X}^H \mathbf{B}^H e(t)], \quad (\text{A10})$$

其中

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & x_n(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = [d(\theta_1, \varphi_1), \dots, d(\theta_n, \varphi_n)], \quad d(\theta_i, \varphi_i) = da(\theta_i, \varphi_i) / d(\theta);$$

$$\mathbf{B} = [b(\theta_1, \varphi_1), \dots, b(\theta_n, \varphi_n)], \quad b(\theta_i, \varphi_i) = da(\theta_i, \varphi_i) / d(\varphi).$$

定义协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Omega} = (E\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^T)^{-1}, \quad (\text{A11})$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}^T \triangleq \partial \ln L / \partial [\sigma \tilde{x}(1) \tilde{x}(1) \dots \tilde{x}(N) \tilde{x}(N) \theta^T \varphi^T]$.

对其求导可得如下公式

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} \right|^2 = \frac{mN}{\sigma^2}, \quad (\text{A12})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(l)} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \text{Re}[\mathbf{A}^H \mathbf{A}] \delta_{k,l}, \quad (\text{A13})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(l)} \right|^T = -\frac{2}{\sigma} \text{Im}[\mathbf{A}^H \mathbf{A}] \delta_{k,l}, \quad (\text{A14})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \text{Re}[\mathbf{A}^H \mathbf{D} \mathbf{X}(k)], \quad (\text{A15})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \text{Re}[\mathbf{A}^H \mathbf{B} \mathbf{X}(k)], \quad (\text{A16})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(l)} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \text{Re}[\mathbf{A}^H \mathbf{A}] \delta_{k,l}, \quad (\text{A17})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \text{Im}[\mathbf{A}^H \mathbf{D} \mathbf{X}(k)], \quad (\text{A18})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \text{Im}[\mathbf{A}^H \mathbf{B} \mathbf{X}(k)], \quad (\text{A19})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(k)} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{x}(l)} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \text{Re}[\mathbf{A}^H \mathbf{A}] \delta_{k,l}, \quad (\text{A20})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re}[\mathbf{X}^H(t) \mathbf{D}^H \mathbf{D} \mathbf{X}(t)] = \Gamma, \quad (\text{A21})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re}[\mathbf{X}^H(t) \mathbf{B}^H \mathbf{B} \mathbf{X}(t)] = \Lambda, \quad (\text{A22})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re}[\mathbf{B}^H(t) \mathbf{D}^H \mathbf{B} \mathbf{X}(t)] = T, \quad (\text{A23})$$

$$E \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} \right| \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right|^T = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re}[\mathbf{X}^H(t) \mathbf{B}^H \mathbf{D} \mathbf{X}(t)] = \Upsilon. \quad (\text{A24})$$

为简化公式, 引入以下变量

$$\text{var}_{CR}(\sigma) = \sigma^2 / mN,$$

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\sigma} \mathbf{A}^H \mathbf{A},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1},$$

$$\Delta_k = \frac{2}{\sigma} \mathbf{A}^H \mathbf{D} \mathbf{X}(k),$$

$$\nabla_k = \frac{2}{\sigma} \mathbf{A}^H \mathbf{B} \mathbf{X}(k).$$

将(12)~(24)式带入(11)式得

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \text{var}_{CR}^{-1}(\sigma) & 0 & & & \\ & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}} & -\bar{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{H}} & \bar{\mathbf{H}} \end{bmatrix} & 0 & & \\ & & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}} & -\bar{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{H}} & \bar{\mathbf{H}} \end{bmatrix} & & \\ 0 & & & \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 & -\bar{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_1 & \bar{\Delta}_1 \end{bmatrix} & \\ & 0 & & & \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_N & -\bar{\Delta}_N \\ \tilde{\Delta}_N & \bar{\Delta}_N \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_1 & \bar{\nabla}_1 \\ \tilde{\nabla}_1 & \bar{\nabla}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{\nabla}_N & \bar{\nabla}_N \\ \tilde{\nabla}_N & \bar{\nabla}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & T \\ \Upsilon & \Lambda \end{bmatrix} \quad (\text{A25})$$

通过对(25)式进行矩阵分块处理, 可以得到如下 $\text{CRB}(\theta)$, $\text{CRB}(\varphi)$ 表达式

$$\text{CRB}^{-1}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \Gamma & T \\ \Upsilon & \Lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 & \tilde{\Delta}_1 & \dots & \bar{\Delta}_N & \tilde{\Delta}_N \\ \bar{\nabla}_1 & \tilde{\nabla}_1 & \dots & \bar{\nabla}_N & \tilde{\nabla}_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}} & -\tilde{\mathbf{G}} & & \\ \tilde{\mathbf{G}} & \bar{\mathbf{G}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \bar{\mathbf{G}} & -\tilde{\mathbf{G}} \\ & & \tilde{\mathbf{G}} & \bar{\mathbf{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 & \bar{\mathbf{v}}_1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_N & \bar{\mathbf{v}}_N \\ \tilde{\mathbf{a}}_N & \tilde{\mathbf{v}}_N \end{bmatrix} \quad (\text{A26})$$

推导过程中由于

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}} & -\tilde{\mathbf{G}} \\ \tilde{\mathbf{G}} & \bar{\mathbf{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\Delta \\ \widetilde{\mathbf{G}}_\Delta \end{bmatrix},$$

且

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^T & \tilde{\Delta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\Delta \\ \widetilde{\mathbf{G}}_\Delta \end{bmatrix} &= \text{Re} \left[\Delta^H \mathbf{G}_\Delta \right], \\ \text{CRB}^{-1}(\theta, \varphi) &= \begin{bmatrix} \Gamma & T \\ \Upsilon & \Lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] & \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \\ \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] & \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \end{bmatrix}, \\ \text{CRB}(\theta, \varphi) &= \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma & T \\ \Upsilon & \Lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] & \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \\ \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] & \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] & T - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \\ \Upsilon - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] & \Lambda - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \end{bmatrix} \right\}^{-1} \quad (\text{A27}) \\ &= \begin{bmatrix} \Pi & M \\ \Theta & O \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\theta) &= \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] \\ \Lambda - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \\ \Upsilon - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \Lambda - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \\ \Gamma - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A28}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\varphi) &= \left\{ \begin{bmatrix} \Lambda - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \\ \Gamma - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Upsilon - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\mathbf{v}_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] \\ T - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \Gamma - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\Delta_t} \right] \\ T - \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[\Delta_t^H \mathbf{G}_{\mathbf{v}_t} \right] \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A29}) \end{aligned}$$

以上推导过程中没有考虑多径情况, 当考虑多径信号影响时, 假设接收信号仍为单目标回波, 坐标系如图2所示,

此时目标与接收天线直达波距离为

$$\begin{aligned} |TE_l| &= \sqrt{(x_T - x_l)^2 + (y_T - y_l)^2 + (z_T - z_l)^2} \\ &\approx R - d_l (\sin \theta_T \cos \varphi_T \cos \varphi_l + \sin \varphi_T \sin \varphi_l). \end{aligned}$$

目标与接收天线反射波距离为

$$\begin{aligned} |T'E_l| &= \sqrt{(x_T - x_l)^2 + (y_T - y_l)^2 + (z_T + z_l)^2} \\ &\approx R - d_l (\sin \theta_T \cos \varphi_T \cos \varphi_l - \sin \varphi_T \sin \varphi_l). \end{aligned}$$

则直达波与反射波时延差为

$$\Delta \tau_l \approx 2d_l \sin \theta_T \sin \varphi_l / C,$$

则对于第 l 个接收天线来说, 其接收到的第 k 个发射天线的目标回波的多径分量较直达波的相位差为

$$\phi_{kl} \approx 2\pi f_k \Delta \tau_l = 4\pi f_k d_l \sin \theta_T \sin \varphi_l / C = 4\pi f_k z_{rl} \sin \varphi / C,$$

由此, 反射系数 $1+r$ 可以表示为

$$Q_{kl} = 1+r = 1 - \rho \exp(j\phi_{kl}),$$

(3)式可以表示为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{N},$$

其中, $\mathbf{x}_l(t) = A_l' \exp(j2\pi f_d t)$; $\mathbf{A}_r = [\mathbf{a}_1(R_1, \theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}_2(R_1, \theta_1, \varphi_1), \dots, \mathbf{a}_{N_r}(R_1, \theta_1, \varphi_1)]^T$; $\mathbf{a}_l(R, \theta, \varphi) = [Q_{l1} \exp(-j2\pi f_1(\tau_0 - \Delta \tau_{l1})), \dots, Q_{N_e l} \exp(-j2\pi f_{N_e}(\tau_0 - \Delta \tau_{N_e l}))]^T$.

若令 $\Phi_{kl} = -2\pi f_k(\tau_0 - \Delta \tau_{kl})$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r &= [Q_{11} \exp(-j\Phi_{11}), Q_{21} \exp(-j\Phi_{21}), \dots, Q_{N_e 1} \exp(-j\Phi_{N_e 1}), \dots, \\ &\quad Q_{1N_r} \exp(-j\Phi_{1N_r}), Q_{2N_r} \exp(-j\Phi_{2N_r}), \dots, Q_{N_e N_r} \exp(-j\Phi_{N_e N_r})]^T. \end{aligned}$$

因为 $\frac{\partial Q_{kl}}{\partial \theta} = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_r &= \begin{bmatrix} -jQ_{11} \exp(-j\Phi_{11}) \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \theta}, -jQ_{21} \exp(-j\Phi_{21}) \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial \theta}, \dots, \\ -jQ_{N_e 1} \exp(-j\Phi_{N_e 1}) \frac{\partial \Phi_{N_e 1}}{\partial \theta}, \dots, -jQ_{1N_r} \exp(-j\Phi_{1N_r}) \frac{\partial \Phi_{1N_r}}{\partial \theta}, \\ -jQ_{2N_r} \exp(-j\Phi_{2N_r}) \frac{\partial \Phi_{2N_r}}{\partial \theta}, \dots, \\ -jQ_{N_e N_r} \exp(-j\Phi_{N_e N_r}) \frac{\partial \Phi_{N_e N_r}}{\partial \theta} \end{bmatrix}^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_r &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial Q_{11}}{\partial \varphi} - jQ_{11} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \varphi} \right) \exp(-j\Phi_{11}), \dots, \\ \left(\frac{\partial Q_{N_e 1}}{\partial \varphi} - jQ_{N_e 1} \frac{\partial \Phi_{N_e 1}}{\partial \varphi} \right) \exp(-j\Phi_{N_e 1}), \dots, \\ \left(\frac{\partial Q_{1N_r}}{\partial \varphi} - jQ_{1N_r} \frac{\partial \Phi_{1N_r}}{\partial \varphi} \right) \exp(-j\Phi_{1N_r}), \dots, \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial Q_{N_e N_r}}{\partial \varphi} - j Q_{N_e N_r} \frac{\partial \Phi_{N_e N_r}}{\partial \varphi} \right) \exp(-j \Phi_{N_e N_r}) \Big]^T;$$

若令

$$\begin{aligned} F_{kl} &= \frac{\partial Q_{kl}}{\partial \varphi} - j Q_{kl} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial Q_{kl}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial (1 - \rho \exp(j \Phi_{kl}))}{\partial \varphi} = -j \rho \exp(j \Phi_{kl}) \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \varphi} &= 4\pi f_k z_{rl} \cos \varphi / C, \end{aligned}$$

则

$$\mathbf{B}_r = [F_{11} \exp(-j \Phi_{11}), F_{21} \exp(-j \Phi_{21}), \dots, F_{N_e 1} \exp(-j \Phi_{N_e 1}), \dots, F_{1N_r} \exp(-j \Phi_{1N_r}), F_{2N_r} \exp(-j \Phi_{2N_r}), \dots, F_{N_e N_r} \exp(-j \Phi_{N_e N_r})]^T.$$

令 $\text{SNR} = \left(\sum_{t=1}^N |x_1(t)|^2 \right) / \sigma$, 得到如下表达式

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[x_1^H(t) \mathbf{D}_r^H [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r (\mathbf{A}_r^H \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^H] \mathbf{D}_r x_1(t) \right] \\ &= 2 \cdot \text{SNR} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}| \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}|^2 \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right) \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

$$M = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[x_1^H(t) \mathbf{D}_r^H [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r (\mathbf{A}_r^H \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^H] \mathbf{B}_r x_1(t) \right],$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \text{SNR} \cdot \left\{ \left(j \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} Q_{kl}^* F_{kl} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}|^2 \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right) \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} F_{kl}^* Q_{kl} \right)^H \right\}, \end{aligned}$$

$$O = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[x_1^H(t) \mathbf{B}_r^H [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r (\mathbf{A}_r^H \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^H] \mathbf{B}_r x_1(t) \right]$$

$$= 2 \cdot \text{SNR} \cdot \left\{ \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |F_{kl}|^2 \right) - \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} F_{kl}^* Q_{kl} \right) \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \right\},$$

$$\Theta = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left[x_1^H(t) \mathbf{B}_r^H [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r (\mathbf{A}_r^H \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^H] \mathbf{D}_r x_1(t) \right]$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \text{SNR} \cdot \left\{ \left(j \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} Q_{kl}^* F_{kl} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} F_{kl}^* Q_{kl} \right) \left(\sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} |Q_{kl}|^2 \right)^{-1} \left(j \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_e} \left(|Q_{kl}|^2 \cdot \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \theta} \right) \right)^H \right\}. \end{aligned}$$

将以上各式代入(28)和(29)式即得定理 1.