L^0 -线性函数的 Hahn-Banach 扩张定理的几何形式与随机赋范模中的 Goldstine-Weston 定理

赵世恩*, 石光

北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191

E-mail: zsefh@ss.buaa.edu.cn, g_shi@ss.buaa.edu.cn

收稿日期: 2011-01-26; 接受日期: 2011-05-24; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10871016) 资助项目

摘要 本文给出了关于 L^0 -线性函数的 Hahn-Banach 扩张定理的几何形式并证明这个几何形式等价于它的代数形式. 进一步, 我们利用这个几何形式给出了随机局部凸模中熟知的基本分离定理的一个新的且简单的证明. 最后, 利用这个分离定理, 我们同时在两种拓扑 — (ϵ, λ) -拓扑和局部 L^0 -凸拓扑下证明了随机赋范模中的 Goldstine-Weston 稠密性定理, 并举出一个反例说明在局部 L^0 -凸拓扑下如果随机赋范模不具有可数连接性质, 则 Goldstine-Weston 稠密性定理不一定成立.

关键词 Hahn-Banach 扩张定理 随机局部凸模 随机赋范模 (ϵ, λ) -拓扑 局部 L^0 -凸拓扑 分离定理 Goldstine-Weston 稠密性定理

MSC (2000) 主题分类 46H25, 46C50, 45R05, 47B80, 60G57

1 引言

Guo 在 [1, 2] 和 [3] 中分别给出了随机赋范模 (简记为 RN -模) 以及更为广泛的随机局部凸模的概念. 2009 年以前, RN -模以及随机局部凸模上都赋予一种自然的拓扑, 称为 (ϵ, λ) -拓扑. 由于 (ϵ, λ) -拓扑通常不是局部凸拓扑, 故传统的共轭空间理论对于 RN -模以及随机局部凸模理论的发展普遍失效. 为了克服这一困难, Guo 在 [1, 2, 4–12] 系统地提出和发展了随机共轭空间理论. 2009 年, 在金融应用的推动下, Filipović, Kupper 和 Vogelpoth 在随机局部凸模上提出了一种新的拓扑, 称为局部 L^0 -凸拓扑, 并在 [13] 中开始将 RN -模以及随机局部凸模理论应用到条件风险度量的研究中. 紧接着, Guo 在 [14] 建立了在随机局部凸模上由这两种拓扑导出的一些基本结果的联系. 这之后, Guo 等在 [15–17] 中结合上述两种拓扑各自的优点对随机局部凸模理论以及条件风险度量进行了深入的研究.

熟知, 对于线性泛函的 Hahn-Banach 扩张定理有代数形式和几何形式. 对于随机线性泛函, Guo 在 [14, 18] 给出了 Hahn-Banach 扩张定理相应的代数形式. L^0 -线性函数是特殊的随机线性泛函, 对于它的 Hahn-Banach 扩张定理的研究首先在 [13] 出现, 即下面的命题 1.1. 但比这更广泛的结果在 [18–20] 中已经得到. 特别地, 在 [14] 中, Guo 给出了对于 L^0 -线性函数的 Hahn-Banach 扩张定理的一个极其简单的证明. 本文的目的是给出关于 L^0 -线性函数 Hahn-Banach 扩张定理的几何形式并证明这个几何形式等价于它的代数形式. Guo 等在 [10] 中建立了随机局部凸模上一个基本的严格分离定理, 即下面的命题 1.3, 这个定理对于建立 L^0 -凸分析中的 Fenchel-Moreau 对偶定理是一个非常有利的工具,

英文引用格式: Zhao S E, Shi G. A geometric form of the Hahn-Banach extension theorem for L^0 -linear functions and the Goldstine-Weston theorem in random normed modules (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(9): 827–836, doi: 10.1360/012011-75

见 [15]. 但是在 [10] 中这个分离定理的证明是间接的并且十分复杂. 本文, 我们利用上面的几何形式给出该定理一个直接并简单的证明. 最后, 利用这个分离定理, 我们同时在两种拓扑 — (ε, λ) - 拓扑和局部 L^0 - 凸拓扑下证明了随机赋范模中的 Goldstine-Weston 稠密性定理, 并举出一个反例说明在局部 L^0 - 凸拓扑下如果随机赋范模不具有可数连接性质, 则 Goldstine-Weston 稠密性定理可能不成立.

在给出命题 1.1 之前, 我们首先回忆一些记号和术语.

本文将采用如下记号, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 表示一个概率空间, $\mathbb{N}$ 为正整数集合, K 为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$, $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 表示 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上广义实值随机变量等价类全体, $L^0(\mathcal{F}, K)$ 表示 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上 K - 值随机变量等价类全体在通常的数乘、加法以及乘法下所构成的代数, 0 和 1 分别表示零元和单位元.

由 [21], 我们知道 $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 在序关系 $\leq$ 下是一个完备格, 其中 $\xi \leq \eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega) \leq \eta^0(\omega)$ 对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$ (简记为 a.s.) 成立, 这里 ξ^0 和 η^0 分别为 ξ 和 η 的任意代表元 (亦见下面的命题 2.1). 进一步, 对于 $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 中每一个集合 G 都具有上确界和下确界, 分别记为 $\vee G$ 和 $\wedge G$. 特别地, 作为 $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 的一个子格, $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 在下述意义下是完备格: 每一个具有上界的集合一定具有上确界.

进一步, $L^0_+ = \{\xi \in L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R}) \mid \xi \geq 0\}$, $L^0_{++} = \{\xi \in L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R}) \mid \text{在 } \Omega \text{ 上 } \xi > 0\}$, 这里 $\forall A \in \mathcal{F}$ “在 A 上 $\xi > \eta$ ” 表示 $\xi^0(\omega) > \eta^0(\omega)$ 对于几乎所有的 $\omega \in A$ 成立. 特别地, $\xi > \eta$ 表示 $\xi \geq \eta$ 且 $\xi \neq \eta$.

给定一个数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模 $(E, \mathcal{P})$, $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ 和 $\mathcal{T}_c$ 分别表示 E 上的 (ε, λ) - 拓扑和局部 L^0 - 凸拓扑, 见 [13, 14] 和下文中对这两种拓扑的定义.

命题 1.1 (L^0 - 线性函数 Hahn-Banach 定理的代数形式^[13, 14, 19, 20]) 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 上的左模, M 为 E 中 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ - 子模, $g: M \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 为 L^0 - 线性函数且 $p: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 为 L^0 - 次线性泛函, 使得 $g(x) \leq p(x), \forall x \in M$. 则存在一个 L^0 - 线性函数 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 使得 f 为 g 的扩张并且 $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$.

本文, 我们将给出命题 1.1 的几何形式, 即下面的命题 1.2, 并证明几何形式等价于它的代数形式.

命题 1.2 (L^0 - 线性函数 Hahn-Banach 定理的几何形式) 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 上的左模, M 为 E 中一 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ - 子模, G 为 E 中 L^0 - 凸且 L^0 - 吸收子集. 如果 $g: M \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 为 L^0 - 线性函数并且 $g(y) \leq 1, \forall y \in M \cap G$, 则存在一个 L^0 - 线性函数 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 使得 f 为 g 的扩张并且 $f(x) \leq 1, \forall x \in G$.

进一步, 我们利用这个几何形式给出下面随机局部凸模中熟知的基本分离定理的一个新的证明:

命题 1.3^[10] 设 $(E, \mathcal{P})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模, G 为 E 中 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ - 闭且 L^0 - 凸子集, $x_0 \in E \setminus G$, $\xi_Q = \wedge\{\|x_0 - h\|_Q \mid h \in G\}, \forall Q \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ 以及 $\xi = \vee\{\xi_Q \mid Q \in \mathcal{F}(\mathcal{P})\}$. 则存在一个由 $(E, \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 连续模同态 f , 使得

$$\text{Ref}(x_0) > \vee\{\text{Ref}(y) \mid y \in G\},$$

这里 Ref 表示 f 的实部, 即 $f(x) = \text{Ref}(x) - i\text{Ref}(ix), \forall x \in E$ 并且在 $[\xi > 0]$ 上

$$\text{Ref}(x_0) > \vee\{\text{Ref}(y) \mid y \in G\}.$$

在文章的最后一部分, 我们在两种拓扑下建立了随机赋范模中的 Goldstine-Weston 稠密性定理如下:

定理 1.1 设 $(E, \|\cdot\|)$ 数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模, $J: E \rightarrow E^{**}$ 为典型映射, $E(1) = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ 并且 $\overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}$ 表示 $\sigma_{\varepsilon, \lambda}(E^{**}, E^*)$ 下 $J(E(1))$ 的闭包. 则 $\overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*} = E^{**}(1)$, 这里 $E^{**}(1) = \{\phi \in E^{**} \mid \|\phi\|^{**} \leq 1\}$.

定理 1.2 设 $(E, \|\cdot\|)$ 数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模, 使得 E 具有可数连接性质, J 和 $E(1)$ 与定理 1.1 相同, 并且 $\overline{J(E(1))}_c^{w*}$ 表示 $\sigma_c(E^{**}, E^*)$ 下 $J(E(1))$ 的闭包. 则 $\overline{J(E(1))}_c^{w*} = E^{**}(1)$.

进一步, 我们给出一个例子表明: 如果 E 不具有可数连接性质, 则在 $\sigma_c(E^{**}, E^*)$ 下 $J(E(1))$ 未必稠于 $E^{**}(1)$.

本文被组织如下: 第 2 节, 我们给出一些熟知的结果; 第 3 节, 我们证明 L^0 -线性函数 Hahn-Banach 扩张定理的几何形式等价于它的代数形式; 第 4 节, 我们在两种拓扑下建立 RN -模上的 Goldstine-Weston 定理.

2 预备知识

命题 2.1 ^[21] 设 G 为 $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 中任一子集. 则存在 G 中可数子集 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 以及 $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\vee G = \vee_{n \geq 1} a_n$ 并且 $\wedge G = \wedge_{n \geq 1} b_n$. 进一步, 如果 G 关于 $\leq$ 是上定向的 (相应地, 下定向的), 则 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (相应地, $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$) 可以是关于 $\leq$ 的非降序列 (相应地, 非增序列).

设 $\xi \in L^0(\mathcal{F}, K)$, ξ^0 为 ξ 的任意代表元, 我们定义如下两个随机变量 $(\xi^0)^{-1}$ 和 $|\xi^0|$: 如果 $\xi^0(\omega) \neq 0$, 则 $(\xi^0)^{-1}(\omega) = 1/\xi^0(\omega)$, 否则 $(\xi^0)^{-1}(\omega) = 0$, $|\xi^0|(\omega) = |\xi^0(\omega)|$, $\forall \omega \in \Omega$. 则 $(\xi^0)^{-1}$ 的等价类 $Q(\xi)$ 叫做 ξ 的广义逆, $|\xi^0|$ 的等价类 $|\xi|$ 叫做 ξ 的绝对值.

另外, 设 $A \in \mathcal{F}$, A^c 表示 A 的补集, $\tilde{A} := \{B \in \mathcal{F} \mid P(A \Delta B) = 0\}$ 为 A 的等价类, 其中 Δ 为对称差算子, I_A 为 A 上的特征函数, $\tilde{I}_A$ 为 I_A 的等价类. 给定 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 中的两个元 ξ 和 η , $A = \{\omega \in \Omega \mid \xi^0(\omega) \neq \eta^0(\omega)\}$, 其中 ξ^0 和 η^0 分别为 ξ 和 η 的等价类, 则我们记 $[\xi \neq \eta]$ 为 A 的等价类且 $I_{[\xi \neq \eta]}$ 为 $\tilde{I}_A$, 类似地, 读者可以理解记号 $I_{[\xi \leq \eta]}$, $I_{[\xi < \eta]}$ 以及 $I_{[\xi = \eta]}$.

定义 2.1 ^[3, 22] (1) 设 E 为数域 K 上的线性空间, 若 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 是线性的, 则称 f 为 E 上的随机线性泛函;

(2) 设 E 为数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, 如果对于任意正实数 α , $x, y \in E$ 都有 $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$ 和 $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, 则称 f 为 E 上随机次线性泛函;

(3) 设 E 为数域 K 上的线性空间, $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, 如果 $\forall \alpha \in K$, $x, y \in E$ 都有 $f(\alpha x) = |\alpha| \cdot f(x)$ 和 $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, 则称 f 为 E 上随机半范数;

(4) 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, 若 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 为一个模同态, 则称 f 为 E 上 L^0 -线性函数;

(5) 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 上的左模以及 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, 若 f 为 E 上的随机次线性泛函, 使得 $f(\xi \cdot x) = \xi \cdot f(x)$, $\forall \xi \in L^0_+$ 以及 $x \in E$, 则称 f 为 E 的 L^0 -次线性泛函;

(6) 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模以及 $f: E \rightarrow L^0_+$, 若 f 为 E 上的随机半范数, 使得 $f(\xi \cdot x) = |\xi| \cdot f(x)$, $\forall \xi \in L^0(\mathcal{F}, K)$ 以及 $x \in E$, 则称 f 为 E 上的 L^0 -半范数.

定义 2.2 ^[3, 14, 15] 称有序对 $(E, \mathcal{P})$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间, 若 E 是 K 上的线性空间, $\mathcal{P}$ 为 E 上一族随机半范数且满足下面的公理:

(1) $\bigvee \{\|x\| \mid \|\cdot\| \in \mathcal{P}\} = 0$ 蕴含 $x = \theta$.

进一步, 如果 E 是代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, 且每一个 $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ 都是 L^0 -半范数, 则这样的随机局部凸空间叫做随机局部凸模.

注 2.1 设 $(E, \mathcal{P})$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间 (随机局部凸模). 如果 $\mathcal{P}$ 退化成单点集 $\{\|\cdot\|\}$, 则 $(E, \|\cdot\|)$ 为一个随机赋范空间 (简记为 RN -空间) (相应地, 随机赋范模 (简记为 RN -模)). 特别地, $(L^0(\mathcal{F}, K), |\cdot|)$ 为一个 RN -模.

对于一个数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间 $(E, \mathcal{P})$, $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{P}$ 的所有有限子集所构成的集族. 对于 $\mathcal{P}$ 中每一个有限子族 $\mathcal{Q}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : E \rightarrow L^0_+(\mathcal{F})$ 表示 E 上的一个随机半范数: $\|x\|_{\mathcal{Q}} = \vee\{\|x\| \mid \|\cdot\| \in \mathcal{Q}\}, \forall x \in E$.

对于一个数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间 $(E, \mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ 总可以诱导如下两种拓扑, 即 (ε, λ) -拓扑和局部 L^0 -凸拓扑.

定义 2.3 ^[3, 14, 15] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间. 对于任意正实数 ε 和 λ 满足 $0 < \lambda < 1$, 以及任意 $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, 令 $N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon, \lambda) = \{x \in E \mid P\{\omega \in \Omega \mid \|x\|_{\mathcal{Q}}(\omega) < \varepsilon\} > 1 - \lambda\}$, 则 $\{N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon, \lambda) \mid \mathcal{Q} \in \mathcal{F}(\mathcal{P}), \varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1\}$ 构成 E 上某个 Hausdorff 线性拓扑 θ 点的一个局部基, 这个拓扑叫做由 $\mathcal{P}$ 诱导的 E 上的 (ε, λ) -拓扑.

在这篇文章中, 对于每一个随机局部凸空间, 在不引起混淆的前提下, $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ 表示其上的 (ε, λ) -拓扑.

定义 2.4 ^[13, 15] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间. 对于任意 $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ 以及 $\varepsilon \in L^0_{++}$, 令 $N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon) = \{x \in E \mid \|x\|_{\mathcal{Q}} \leq \varepsilon\}$. E 中的一个子集 G 叫做 $\mathcal{T}_c$ -开集, 如果 $\forall x \in G$ 都存在某个 $N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon)$ 使得 $x + N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon) \subset G$. $\mathcal{T}_c$ 表示 E 的所有 $\mathcal{T}_c$ -开集所构成的集族, 则 $(E, \mathcal{T}_c)$ 关于 E 上的加法构成一个 Hausdorff 拓扑群. $\mathcal{T}_c$ 叫做由 $\mathcal{P}$ 诱导的 E 上的局部 L^0 -凸拓扑.

在这篇文章中, 对于每一个随机局部凸空间, 在不引起混淆的前提下, $\mathcal{T}_c$ 表示其上的局部 L^0 -凸拓扑.

下面, 我们介绍随机局部凸空间上随机共轭空间的概念. 历史上, 在 [3, 5] 中最早分别给出了两种随机共轭空间的概念. 由 [14, 15], 这两种概念恰恰分别对应了随机局部凸模上的两种拓扑.

定义 2.5 ^[5] 设 $(E, \mathcal{P})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间. 随机线性泛函 $f : E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 叫做 I 型几乎处处有界的随机线性泛函, 如果存在某个 $\xi \in L^0_+$ 以及 $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ 使得 $|f(x)| \leq \xi \cdot \|x\|_{\mathcal{Q}}, \forall x \in E$. 记 I 型几乎处处有界的随机线性泛函所组成的集合为 $E^*_I, \cdot : L^0(\mathcal{F}, K) \times E^*_I \rightarrow E^*_I$ 为 E^*_I 上的模乘运算: $(\xi f)(x) = \xi(f(x)), \forall \xi \in L^0(\mathcal{F}, K), f \in E^*_I$ 以及 $x \in E$. E^*_I 叫做 E 的 I 型随机共轭空间, 且容易看出 E^*_I 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模.

定义 2.6 ^[22] 设 $(E, \mathcal{P})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模. 随机线性泛函 $f : E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 叫做 II 型几乎处处有界的随机线性泛函, 如果存在 Ω 的一个可数 $\mathcal{F}$ -可测分划 $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, L^0_+ 中序列 $\{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ 以及 $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ 中的序列 $\{\mathcal{Q}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ 使得 $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_i} \cdot \xi_i \cdot \|x\|_{\mathcal{Q}_i}, \forall x \in E$. 记 II 型几乎处处有界的随机线性泛函所组成的集合为 E^*_{II}, E^*_{II} 叫做 E 的 II 型随机共轭空间.

定义 2.7 设 $(E, \mathcal{P})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模. 定义 $E^*_{\varepsilon, \lambda}, E^*_c$ 如下:

- (1) $E^*_{\varepsilon, \lambda} = \{f \mid f \text{ 是由 } (E, \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}) \text{ 到 } (L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}) \text{ 的连续模同态}\};$
- (2) $E^*_c = \{f \mid f \text{ 是由 } (E, \mathcal{T}_c) \text{ 到 } (L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c) \text{ 的连续模同态}\}.$

下面的命题 2.2 和 2.3 分别给出了 E^*_I 和 E^*_{II} 的拓扑特征.

命题 2.2 ^[14] 设 $(E, \mathcal{P})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模以及 $f : E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 为随机线性泛函. 则 $f \in E^*_I$ 当且仅当 f 为由 $(E, \mathcal{T}_c)$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 的连续模同态, 即 $E^*_I = E^*_c$.

命题 2.3 ^[14, 23] 设 $(E, \mathcal{P})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模以及 $f : E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 为随机线性泛函. 则 $f \in E^*_{II}$ 当且仅当 f 为由 $(E, \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 的连续模同态, 即 $E^*_{II} = E^*_{\varepsilon, \lambda}$.

注 2.2 由命题 2.2 和 2.3, 容易看出 $E^*_c \subset E^*_{\varepsilon, \lambda}$. 特别地, 如果 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模, 则 $E^*_c = E^*_{\varepsilon, \lambda}$ (见 [14]), 这时我们将 $E^*_{\varepsilon, \lambda}$ 或 E^*_c 记为 E^* , 进一步, 定义 $\|\cdot\|^* : E^* \rightarrow L^0_+$ 以

及 $\cdot: L^0(\mathcal{F}, K) \times E^* \rightarrow E^*$ 如下: $\|f\|^* = \vee\{|f(y)| \mid y \in E, \|y\| \leq 1\}$, $(\xi \cdot f)(x) = \xi \cdot (f(x))$, $\forall \xi \in L^0(\mathcal{F}, K)$, $f \in E^*$ 以及 $x \in E$. 则 $(E^*, \|\cdot\|^*)$ 叫做 $(E, \|\cdot\|)$ 的随机共轭空间, 且容易看出 $(E^*, \|\cdot\|^*)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模 (见 [2]).

下面规泛函的概念是由 Filipović 等在 [13] 首次提出.

定义 2.8 ^[13, 14] 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, A 为 E 的子集. 则

- (1) 若对于任意 $x, y \in A$ 以及 $\xi, \eta \in L^0_+$, $\xi + \eta = 1$, 都有 $\xi \cdot x + \eta \cdot y \in A$, 则称 A 是 L^0 -凸的;
- (2) 若对于任意 $x \in E$ 都存在某个 $\xi \in L^0_{++}$ 使得 $x \in \xi \cdot A := \{\xi \cdot a \mid a \in A\}$, 则称 A 为 L^0 -吸收的;
- (3) 若对于任意 $x \in A$, $\xi \in L^0(\mathcal{F}, K)$, $|\xi| \leq 1$, 都有 $\xi \cdot x \in A$, 则称 A 为 L^0 -均衡的.

定义 2.9 ^[13] 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, $G \subset E$, 映射 $p_G: E \rightarrow \bar{L}^0_+$ 为

$$p_G(x) := \wedge\{\xi \in L^0_+ \mid x \in \xi \cdot G\}.$$

则称 p_G 为集合 G 上的规泛函.

命题 2.4 ^[13] 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, $G \subset E$. 则集合 G 上的规泛函 p_G 具有下面的性质:

- (1) $p_G(x) \leq 1, \forall x \in G$;
- (2) $\tilde{I}_A \cdot p_G(\tilde{I}_A \cdot x) \leq \tilde{I}_A \cdot p_G(x), \forall x \in E$ 以及 $\forall A \in \mathcal{F}$;
- (3) $\xi \cdot p_G(\tilde{I}_{[\xi > 0]} \cdot x) = p_G(\xi \cdot x), \forall x \in E$ 以及 $\xi \in L^0_+$; 特别地, 若 $\xi \in L^0_{++}$, 则 $\xi \cdot p_G(x) = p_G(\xi \cdot x)$.

每个 L^0 -吸收的, L^0 -凸集 $G \subset E$ 均包含零点; 根据 G 的选取, 其上的规泛函可能是 L^0 -次线性泛函或 L^0 -半范数.

命题 2.5 ^[13] 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, G 为 E 中 L^0 -吸收, L^0 -凸子集. 则 G 上的规泛函 p_G 满足:

- (1) $p_G(x) = \wedge\{\xi \in L^0_{++} \mid x \in \xi \cdot G\}, \forall x \in E$;
- (2) $\xi \cdot p_G(x) = p_G(\xi \cdot x), \forall \xi \in L^0_+$ 以及 $\forall x \in E$;
- (3) $p_G(x + y) \leq p_G(x) + p_G(y), \forall x, y \in E$;
- (4) $\forall x \in E$ 都存在 L^0_{++} 中的序列 $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$\eta_n \searrow p_G(x) \text{ a.s.,}$$

特别地, 因为 $0 \in G$, 故 p_G 为 L^0 -次线性泛函;

如果 G 还是 L^0 -均衡的, 则 p_G 满足:

- (5) $p_G(\xi \cdot x) = |\xi| \cdot p_G(x), \forall \xi \in L^0$ 以及 $\forall x \in E$, 即 p_G 为 L^0 -半范数.

命题 2.6 ^[13] 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, G 为 E 中 L^0 -吸收, L^0 -凸子集, $x \in E$. 若 $\tilde{I}_A \cdot x \notin \tilde{I}_A \cdot G, \forall A \in \mathcal{F}, P(A) > 0$. 则 G 上的规泛函 p_G 满足 $p_G(x) \geq 1$.

3 关于 L^0 -线性函数的 Hahn-Banach 扩张定理的几何形式

定理 3.1 命题 1.1 等价于命题 1.2.

证明 设 p_G 为集合 G 上的规泛函, 即

$$p_G(x) = \wedge\{\xi \in L^0_{++} \mid \xi \cdot x \in G\}, \quad \forall x \in E.$$

由于 G 为 E 中 L^0 -吸收且 L^0 -凸子集, 根据命题 2.5, p_G 为 E 上 L^0 -次线性泛函. 又因为 $g(y) \leq 1$, $\forall y \in M \cap G$, 故 $\forall x \in M$ 以及 $\forall \lambda \in L^0_{++}$, 我们有 $g(x) \leq \lambda, \forall x \in \lambda \cdot G$, 即 $g(x) \leq p_G(x)$. 由命题 3.1, 存在一个 L^0 -线性函数 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 使得 f 为 g 的扩张并且 $f(x) \leq p_G(x), \forall x \in E$. 因此我们有

$$f(x) \leq 1, \quad \forall x \in G.$$

反过来, 令 $G = \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$, 则容易看到 g, M 以及 G 满足命题 1.2, 因此存在一个 L^0 -线性函数 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 使得 f 为 g 的扩张, 且根据命题 1.2 我们有

$$f(x) \leq 1, \quad \forall x \in G.$$

故 $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$. □

若 $K = \mathbb{C}$, 我们有如下几何形式:

定理 3.2 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ 上的左模, M 为 E 中 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ -子模, G 为 E 中 L^0 -凸并且 L^0 -吸收子集. 若 $g: M \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ 为一个 L^0 -线性函数并且 $(\text{Reg})(y) \leq 1, \forall y \in M \cap G$, 则存在一个 L^0 -线性函数 $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ 使得 f 为 g 的扩张且 $(\text{Ref})(x) \leq 1, \forall x \in G$.

下面, 我们利用 L^0 -线性函数 Hahn-Banach 扩张定理的几何形式来给出命题 1.3 的一个新证明. 事实上, 我们只需证明如下 RN -模在这种特殊情况的严格分离定理, 即命题 3.1. 由这个命题, 很容易完成命题 1.3 的证明.

令 $(E, \|\cdot\|)$ 为一个 RN -模, G 为 E 中 $\mathcal{T}_{\epsilon, \lambda}$ -闭的 L^0 -凸子集, $x_0 \in E \setminus G$. 则 $\{\|x_0 - g\| \mid g \in G\}$ 为 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 中一个定向集. 由 [14] 中的引理 3.8, 我们容易得到下面的断言: 存在 $A \in \mathcal{F}, P(A) > 0$, 使得在 A 上 $\wedge\{\|x_0 - g\| \mid g \in G\} > 0$.

命题 3.1 ^[10] 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 $\mathbb{R}$ 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模, G 为 E 中 $\mathcal{T}_{\epsilon, \lambda}$ -闭的且 L^0 -凸子集, $x_0 \in E \setminus G$ 且 $\xi = \wedge\{\|x_0 - h\| \mid h \in G\}$. 则存在一个由 $(E, \mathcal{T}_{\epsilon, \lambda})$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R}), \mathcal{T}_{\epsilon, \lambda})$ 的连续模同态 f 使得

$$f(x_0) > \vee\{|f(y)| \mid y \in G\},$$

并且在 $[\xi > 0]$ 上

$$f(x_0) > \vee\{|f(y)| \mid y \in G\}.$$

证明 不失一般性, 我们可以设 $\theta \in G$. 容易证明 $\forall B \in \mathcal{F}, B \subset A$ 以及 $P(B) > 0$, 有 $\tilde{I}_B \cdot x_0 \notin G$. 事实上, 假设 $\tilde{I}_B \cdot x_0 \in G$, 则在 B 上 $\xi = 0$, 这与 $\tilde{A} = [\xi > 0]$ 以及 $B \subset A$ 矛盾. 令 $M = \{x \in E \mid \text{在 } A \text{ 上 } \|x\| \leq \frac{1}{3}\tilde{I}_A \cdot \xi\}$, 则 M 为 L^0 -吸收且 L^0 -凸子集. 进一步, 令 $G + M = \{h + x \mid h \in G, x \in M\}$, 则 $G + M$ 仍是 E 中 L^0 -吸收且 L^0 -凸子集. 因为 $\theta \in G + M$ 且 $G + M$ 是 L^0 -凸的, 故 $\forall F \in \mathcal{F}$ 满足 $P(F) > 0$, 我们有 $\tilde{I}_F \cdot (G + M) \subset G + M$.

设 p_{G+M} 为 $G + M$ 上的范泛函, 则根据命题 2.5, p_{G+M} 为 E 上的 L^0 -次线性泛函. 容易看到对于任意 $x \in E$, 都有在 A^c 上 $p_{G+M}(x) = 0$. 下面我们证明在 A 上 $p_{G+M}(x_0) > 1$. 事实上, 对于任意 $z = z_G + z_M$, 这里 $z_G \in G$ 以及 $z_M \in M$, 因为 $\|(x_0 - z)\| \geq \|x_0 - z_G\| - \|z_M\|, \|x_0 - z_G\| \geq \xi$ 并且在 A 上 $\|z_M\| \leq \frac{1}{3} \cdot \xi$, 故我们有在 A 上 $\|(x_0 - z)\| \geq \frac{2}{3}\xi > 0$. 因此根据定义 2.8, 我们有 $x_0 \notin G + M$ 以及 $p_{G+M}(x_0) \neq 0$. 由命题 2.5, 存在序列 $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset L^0_{++}$ 使得 $x_0 \in \eta_n \cdot (G + M)$ 并且 $\eta_n \searrow p_{G+M}(x_0)$. 又因为 $x_0 \in E \setminus (G + M)$ 并且在 A 上 $\wedge\{\|x_0 - h\| \mid h \in G + M\} > \frac{1}{3}\xi$, 我们有对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 在 A 上 $\eta_n > 1$ 以及 $p_{G+M}(x_0) \geq 1$. 令 $\tilde{D} = [p_{G+M}(x_0) = 1] \cap \tilde{A}$, 下面我们证明 $P(D) > 0$ 是不可能的: 如果 $P(D) > 0$, 则容易验证在 D 上 $\eta_n \searrow \tilde{I}_D$ 以及 $Q(\eta_n) \nearrow \tilde{I}_D$; 因为

$x_0 \in \eta_n \cdot (G+M)$ 以及在 D 上 $\eta_n > 1$, 我们有 $Q(\eta_n) \cdot x_0 \in (Q(\eta_n) \cdot \eta_n) \cdot (G+M) \subset G+M$ 并且在 D 上 $\|x_0 - Q(\eta_n) \cdot x_0\| = \|(1 - Q(\eta_n)) \cdot x_0\| \searrow 0$, 这与下面的事实矛盾: 在 A 上 $\wedge\{\|x_0 - h\| \mid h \in G+M\} > \frac{1}{3}\xi$. 因此 $P(D) = 0$ 并且在 A 上 $p_{G+M}(x_0) > 1$.

下面我们证明 $G+M$ 上的规范函数 p_{G+M} 在 (ϵ, λ) -拓扑下是连续的. 设 x 为 E 中任意元素, H_x 为 $\{\|x\| \neq 0\}$ 的任意代表元并且 $\bar{t} = \frac{1}{3}\tilde{I}_{A \cap H_x} \cdot \xi \cdot \|x\|^{-1}$, 则 $\bar{t} \cdot x \in M \subset G+M$. 因此我们有在 H_x^c 上

$$p_{G+M}(x) = 0,$$

并且在 H_x 上

$$p_{G+M}(x) \leq 3\tilde{I}_{A \cap H_x} \cdot Q(\xi) \cdot \|x\|.$$

因此我们有

$$p_{G+M}(x) \leq (3Q(\xi) + 1) \cdot \|x\|,$$

并且 p_{G+M} 在 (ϵ, λ) -拓扑下是连续的.

令 $U = \{k \cdot x_0 \mid k \in L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})\}$, 则 U 为 E 中一个 L^0 -子模. 定义一个 U 上的 L^0 -线性函数 $g: U \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 如下: $g(k \cdot x_0) = k \cdot \tilde{I}_A \cdot p_{G+M}(x_0)$. 则我们有 $g(y) \leq 1, \forall y \in U \cap (G+M)$. 由命题 1.2, 存在一个 L^0 -线性函数 $\bar{g}: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, 使得 $\bar{g}$ 为 g 的扩张并且 $\bar{g}(x) \leq 1, \forall x \in G+M$. 因此, 在 A 上 $\bar{g}(x_0) > 1$ 并且

$$\bar{g}(x_0) > \vee\{|f(y)| \mid y \in G\}.$$

令 $f = \tilde{I}_A \cdot \bar{g}$, 根据注 3.1, 因为 $f \leq p_{G+M}$, 容易证明 $f \in E_{\epsilon, \lambda}^*$ 并且在 A^c 上 $f(x) = 0$. 因此, 我们有

$$f(x_0) > \vee\{|f(y)| \mid y \in G\},$$

并且在 A 上

$$f(x_0) > \vee\{|f(y)| \mid y \in G\}.$$

□

4 RN-模上的 Goldstine-Weston 定理

在证明定理 1.1 和 1.2 的之前, 我们先给出一些必要的定义和引理.

定义 4.1 ^[14, 15] 设 E 是代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为 E 中一个序列, $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ 为 Ω 的一个可数 $\mathcal{F}$ -可测分划, 则称这样的形式和 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 为 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 关于 $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的可数连接. 进一步, 如果存在 $x \in E$ 使得 $\tilde{I}_{A_n} x = \tilde{I}_{A_n} x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 则称 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 是良定义的或 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n \in E$. 我们称 E 中的一个子集 G 具有可数连接性质, 若对于 G 中任意序列 $x_n \in G$ 都有 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n \in G$, 即 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 是良定义的并且存在 $x \in G$ 使得 $x = \sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$.

引理 4.1 ^[14] 设 $(E, \mathcal{P})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模, $G \subset E$ 具有可数连接性质. 则 $\bar{G}_{\epsilon, \lambda} = \bar{G}_c$, 其中 $\bar{G}_{\epsilon, \lambda}$ 和 $\bar{G}_c$ 分别表示 G 的 $\mathcal{T}_{\epsilon, \lambda}$ -闭包和 $\mathcal{T}_c$ -闭包.

下面, 我们回忆随机弱拓扑以及随机弱星拓扑的概念.

定义 4.2 ^[15, 22] 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN-模, $(E^*, \|\cdot\|^*)$ 为 E 的随机共轭空间. 对于任一 $f \in E^*$, 我们定义 $\|\cdot\|_f: E \rightarrow L_+^0$ 为 $\|x\|_f = |f(x)|, \forall x \in E$, 并且记 $\{\|\cdot\|_f \mid f \in E^*\}$ 为 $\sigma(E, E^*)$, 容易看出 $(E, \sigma(E, E^*))$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模. 则 E 上由 $\sigma(E, E^*)$ 诱导的 (ϵ, λ) -拓扑 $\sigma_{\epsilon, \lambda}(E, E^*)$ 和局部 L^0 -凸拓扑 $\sigma_c(E, E^*)$ 叫做随机弱 (ϵ, λ) -拓扑和随机弱局部 L^0 -凸拓扑.

注 4.1 类似的, 我们可以定义 E^* 上随机弱星 (ε, λ) -拓扑和随机弱星局部 L^0 -凸拓扑.

引理 4.2 ^[22] 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模, 则 $(E^*, \sigma_c(E^*, E))^* = E$. 进一步, 如果 E 具有可数连接性质, 则 $(E^*, \sigma_{\varepsilon, \lambda}(E^*, E))^* = E$.

如果 $(B, \|\cdot\|)$ 为一个赋范空间且 $(B', \|\cdot\|')$ 为 B 的经典的共轭空间, 根据著名的 Banach-Alaoglu 定理, 我们有 $B'(1) = \{f \in B' \mid \|f\|' \leq 1\}$ 在弱星拓扑下是紧的. 因此在弱星拓扑下 $B'(1)$ 是闭的. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模, $(E^*, \|\cdot\|)$ 为 E 的随机共轭空间. Guo 在 [8] 证明了 $E^*(1) = \{f \in E^* \mid \|f\|^* \leq 1\}$ 在 $\sigma_c(E^*, E)$ 下不是紧的, 除非 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为本质纯 P -原子的. 但是下面的引理 4.3 表明 $E^*(1)$ 在 $\sigma_{\varepsilon, \lambda}(E^*, E)$ 和 $\sigma_c(E^*, E)$ 下均是闭集.

引理 4.3 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模且具有可数连接性质. 则 $E^*(1) = \{f \in E^* \mid \|f\|^* \leq 1\}$ 在 $\sigma_{\varepsilon, \lambda}(E^*, E)$ 和 $\sigma_c(E^*, E)$ 下均是闭集.

证明 因为 $E^*(1)$ 具有可数连接性质, 故我们只需证明 $E^*(1)$ 在 $\sigma_c(E^*, E)$ 下是闭的. 对于任意 $f \in E^* \setminus E^*(1)$, 存在 $A \in \mathcal{F}$ 使得 $P(A) > 0$ 且在 A 上 $\|f\|^* > 1$. 因为 $\|f\|^* = \vee\{|f(x)| \mid \|x\| \leq 1\}$, 因此存在 $x_f \in E$, $\|x_f\| \leq 1$, $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$, $P(B) > 0$ 使得在 B 上 $|f(x_f)| > 1$. 令

$$\varepsilon = \tilde{I}_{B^c} + \frac{|f(x_f)| - 1}{2} \cdot \tilde{I}_B,$$

以及

$$B(x_f, \varepsilon) = \{g \in E^* \mid |g(x_f)| \leq \varepsilon\},$$

则 $B(x_f, \varepsilon)$ 为 E^* 中 $\sigma_c(E^*, E)$ 下零点的一个邻域, 并且对于任意 $h \in B(x_f, \varepsilon)$, 容易看出

$$|(f+h)(x_f)| \geq |f(x_f)| - |h(x_f)|,$$

并且在 B 上

$$(f+h)(x_f) \geq \frac{|f(x_f)| + 1}{2} > 1.$$

因此, $f+h \notin E^*(1)$, 即 $f+B(x_f, \varepsilon) \subset E^* \setminus E^*(1)$. 最终, 我们有 $E^*(1)$ 在 $\sigma_c(E^*, E)$ 下是闭的. $\square$

引理 4.4 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模且具有可数连接性质, $J, E(1)$, $J(E(1))$ 以及 $\overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}$ 如定理 1.1 所示. 则 $\overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*} = E^{**}(1)$.

证明 由引理 4.3, 在 $\sigma_{\varepsilon, \lambda}(E^{**}, E^*)$ 下 $E^{**}(1) = \{\varphi \in E^{**}(1) \mid \|\varphi\|^{**} \leq 1\}$ 为闭集, 故 $\overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*} \subset E^{**}(1)$.

下面我们证明 $E^{**}(1) \subset \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}$. 我们只需证明对于任意 $\psi \in E^{**} \setminus \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}$ 都存在 $A_\psi \in \mathcal{F}$, $P(A_\psi) > 0$ 使得在 A_ψ 上 $\|\psi\|^{**} > 1$. 因为 E 具有可数连接性质, 根据引理 4.2 以及命题 1.3, 我们有 $(E^{**}, \sigma_{\varepsilon, \lambda}(E^{**}, E^*))^* = E^*$ 并且存在 $\bar{f} \in E^*$ 使得

$$(\text{Re} \bar{f})(\psi) > \vee\{(\text{Re} \bar{f})(g) \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\},$$

并且在 $[\xi > 0]$ 上

$$(\text{Re} \bar{f})(\psi) > \vee\{(\text{Re} \bar{f})(g) \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\},$$

这里 ξ 如命题 1.3 所示. 对于任意 $y \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}$, 容易看到在 Ω 上 $\|\bar{f}(y)\| \cdot Q(\bar{f}(y)) \leq 1$, $(|\bar{f}(y)| \cdot Q(\bar{f}(y))) \cdot y \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}$ 并且 $\bar{f}((|\bar{f}(y)| \cdot Q(\bar{f}(y))) \cdot y) = |\bar{f}(y)|$. 因此, 我们有

$$\vee\{(\text{Re} \bar{f})(g) \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\} = \vee\{(|\bar{f}(g)| \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\}.$$

设 $f = Q(\|f\|^*) \cdot \bar{f}$ 以及 A_ψ 为 $[\xi > 0]$ 的任一代表元, 则我们有在 A_ψ 上 $\|f\|^* = 1$,

$$(\text{Ref})(\psi) > \vee \{(\text{Ref})(g) \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\},$$

并且在 A_ψ 上

$$(\text{Ref})(\psi) > \vee \{(\text{Ref})(g) \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\}.$$

最终, 我们得到在 A_ψ 上

$$\begin{aligned} \|\psi\|^{**} &\geq |f(\psi)| \geq (\text{Ref})(\psi) > \vee \{(\text{Ref})(g) \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\} \\ &= \vee \{|f(g)| \mid g \in \overline{J(E(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*}\} \geq \vee \{|f(y)| \mid y \in E(1)\} = \|f\|^*, \end{aligned} \quad (4.1)$$

即在 A_ψ 上 $\|\psi\|^{**} > 1$. □

定义 4.4 ^[14] 设 E 为代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, G 为 E 中一个子集. 则可数连接 $\sum_{n \geq 1} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 所组成的集合叫做 G 的可数连接包, 其中 $x_n \in G$, 记作 $H_{cc}(G)$.

定理 1.1 的证明 记 E_{cc} 为 $H_{cc}(E)$, 定义映射 $\|\cdot\|_{cc}: E_{cc} \rightarrow L_+^0$ 如下: $\|x\|_{cc} = \sum_{n \leq 1} \tilde{I}_{A_n} \cdot \|x_n\|$, $\forall x = \sum_{n \leq 1} \tilde{I}_{A_n} \cdot x_n \in E_{cc}$, 其中 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为 Ω 的一个可数 $\mathcal{F}$ -可测分划以及 $x_n \in E$. 容易证明 $E_{cc}^{**} = E^{**}$. 由定理 4.1, 我们有 $\overline{J(E_{cc}(1))}_{\varepsilon, \lambda}^{w*} = E^{**}(1)$. 由于 $J(E(1))$ 在由 $\|\cdot\|_{cc}$ 诱导的 (ε, λ) -拓扑下稠于 $J(E_{cc}(1))$ 且这个 (ε, λ) -拓扑强于 $\sigma_{\varepsilon, \lambda}(E^{**}, E^*)$, 故我们的结论显然成立. □

定理 1.2 的证明 由定理 1.1 和引理 4.1, 结论显然成立. □

下面的例子表明如果 E 不具有可数连接性质, 则 $J(E(1))$ 在 $\sigma_c(E^{**}, E^*)$ 下未必稠于 $E^{**}(1)$.

例 4.1 设 $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 使得对于每个 Ω 中的子集 Λ 都有 $P(\Lambda) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} |\Lambda \cap \{n\}|$, 其中 $|A|$ 表示 A 中所含元素个数, 则 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间. 令 $(E, \|\cdot\|) = (L^0(\mathcal{F}, K), |\cdot|)$ 以及 $F = \{\varphi \in E \mid \text{存在一个正整数 } n_\varphi \text{ 使得 } \varphi(k) = 0, \forall k \geq n_\varphi\}$, 则容易看到 F 为 E 的一个 L^0 -子模, 并且 $(F, |\cdot|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN -模. 设 $F(1) = \{x \in F \mid |x| \leq 1\}$, 则容易验证 $F(1)$ 在由 $|\cdot|$ 所诱导的 $\mathcal{T}_c$ 下为 $(E, |\cdot|)$ 和 $(F, |\cdot|)$ 中的闭集. 因此, 我们有 $F(1)$ 在 $\mathcal{T}_c$ 下不稠于 $E(1)$. 进一步, 容易看出 $(F^*, \|\cdot\|^*) = (F^{**}, \|\cdot\|^{**}) = (E, |\cdot|)$, 并且 $\sigma_c(F^{**}, F^*)$ 仍为 $|\cdot|$ 所诱导的局部 L^0 -凸拓扑. 最终, 我们有在 $\sigma_c(F^{**}, F^*)$ 下 $J(F(1))$ 不稠于 $F^{**}(1)$.

致谢 作者由衷感谢导师郭铁信教授对本文可读性方面的诸多有益建议.

参考文献

- Guo T X. Extension theorems of continuous random linear operators on random domains. J Math Anal Appl, 1995, 193: 15–27
- Guo T X. Some basic theories of random normed linear spaces and random inner product spaces. Acta Anal Funct Appl, 1999, 1: 160–184
- Guo T X. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China (II). Acta Anal Funct Appl, 2001, 3: 208–230
- 郭铁信. 共轭空间的 Radon-Nikodým 性质及其中弱星可测函数的弱星等价性定理. 中国科学 A 辑, 1996, 39: 604–610
- Guo T X. Module homomorphisms on random normed modules. Chin Northeast Math J, 1996, 12: 102–114
- 郭铁信. Lebesgue-Bochner 函数空间的对偶表示定理. 中国科学 A 辑, 1999, 42: 769–776
- Guo T X. Several applications of the theory of random conjugate spaces to measurability problems. Sci China Ser A, 2007, 50: 737–747
- Guo T X. The relation of Banach-Alaoglu theorem and Banach-Bourbaki-Kakutani-Smulian theorem in complete random normed modules to stratification structure. Sci China Ser A, 2008, 51: 1651–1663

- 9 Guo T X, Li S B. The James theorem in complete random normed modules. *J Math Anal Appl*, 2005, 308: 257–265
- 10 Guo T X, Xiao H X, Chen X X. A basic strict separation theorem in random locally convex modules. *Nonlinear Anal Ser A*, 2009, 71: 3794–3804
- 11 Guo T X, You Z Y. The Riesz’s representation theorem in complete random inner product modules and its applications. *Chinese Ann Math Ser A*, 1996, 17: 361–364
- 12 Guo T X, Zeng X L. Random strict convexity and random uniform convexity in random normed modules. *Nonlinear Anal*, 2010, 73: 1239–1263
- 13 Filipović D, Kupper M, Vogelpoth N. Separation and duality in locally L^0 -convex modules. *J Funct Anal*, 2009, 256: 3996–4029
- 14 Guo T X. Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module. *J Funct Anal*, 2010, 258: 3024–3047
- 15 Guo T X. Recent progress in random metric theory and its applications to conditional risk measures. *Sci China Math*, 2011, 54: 633–660
- 16 Guo T X, Shi G. The algebraic structure of finitely generated $L^0(\mathcal{F}, K)$ -modules and the Helly theorem in random normed modules. *J Math Anal Appl*, 2011, 381: 833–842
- 17 Guo T X, Zhao S E. On the random conjugate spaces of a random locally convex module. *Acta Math Sinica English Ser*, in press
- 18 Guo T X. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China (I). *Acta Anal Funct Appl*, 2001, 3: 129–158
- 19 Breckner W W, Scheiber E. A Hahn-Banach extension theorem for linear mappings into ordered modules. *Mathematica*, 1977, 19: 13–27
- 20 Vuza D. The Hahn-Banach theorem for modules over ordered rings. *Rev Roumaine Math Pures Appl*, 1982, 9: 989–995
- 21 Dunford N, Schwartz J T. *Linear Operators*. London: Interscience, 1957
- 22 Guo T X, Chen X X. Random duality. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 2084–2098
- 23 Guo T X, Zhu L H. A characterization of continuous module homomorphisms on random seminormed modules and its applications. *Acta Math Sinica English Ser*, 2003, 19: 201–208

A geometric form of the Hahn-Banach extension theorem for L^0 -linear functions and the Goldstine-Weston theorem in random normed modules

ZHAO ShiEn & SHI Guang

Abstract In this paper, we present a geometric form of the Hahn-Banach extension theorem for L^0 -linear functions and prove that the geometric form is equivalent to the algebraic form of the Hahn-Banach extension theorem. Further, we use the geometric form to give a new and simpler proof of a known basic strict separation theorem in random locally convex modules. Finally, using the basic strict separation theorem we establish the Goldstine-Weston theorem in random normed modules under the two kinds of topologies—the (ε, λ) -topology and the locally L^0 -convex topology, while we also provide a counterexample showing that the Goldstine-Weston theorem under the locally L^0 -convex topology may not hold for random normed modules without the countable concatenation property.

Keywords: Hahn-Banach extension theorem, random locally convex module, random normed module, (ε, λ) -topology, locally L^0 -convex topology, separation theorem, Goldstine-Weston theorem

MSC(2000): 46H25, 46C50, 45R05, 47B80, 60G57

doi: 10.1360/012011-75