中 国 科 学

1989 年 11 月　　A 辑　　第 11 期

关于算术级数中素数分布的一个定理*

陈景润　　王天泽

（中国科学院数学研究所，北京）　（河南大学数学系，开封）

摘　要

设 x 是一个实数，a，q 是正整数并且满足 $1 \leqslant q \leqslant (\log x)^3$，$(a, q) = 1$．在本文中我们证明了：如果 $x \geqslant e^{e^{11.5}}$，则有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x; q, l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| \leqslant 0.13xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-10.35}.$$

其中 $\sum\limits_{l=1}^{q}{}'$ 表示 $\sum\limits_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}$．$\mu(n)$ 表示 Möbius 函数，$\psi(x; q, l) = \sum\limits_{\substack{n \equiv l(\bmod q)\\ n \leqslant x}} \Lambda(n)$，$\tau(\tilde{\chi}) = \sum\limits_{h=1}^{q} \tilde{\chi}(h)e\left(\frac{h}{q}\right)$．当存在模 q 的实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s, \tilde{\chi})$ 有实零点 $\tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{0.1077}{\log q}$ 时 $\tilde{E} = 1$；否则 $\tilde{E} = 0$．

关键词：素数，算术级数，零点

一、引　言

关于算术级数中素数分布的最简单而又最重要的结果是：

$$\psi(x; q, l) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{E_1 x^{\beta_1}\chi_1(l)}{\beta_1\varphi(q)} + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right),$$

其中当存在模 q 的"例外"特征 χ_1 以及相应的"例外"零点 β_1 时 $E_1 = 1$；否则 $E_1 = 0$．这一结果在证明 Goldbach-Vinogradov 定理（每一个奇数 $N \geqslant N_0$ 都能够表示成为 3 个素数的和）时是必须的，其中 N_0 充分大．为了具体确定出 N_0 的数值，我们必须计算 c_0 的数值以及蕴含于"O"常数之中的数值．而为了得出尽可能好的 N_0[1)]的值，我们必须采用 $O(x(\log x)^{-A})$ 型余项估计，其中 A 是一个绝对常数．在这篇文章中，我们得到了如下的结果：

定理．设 $x \geqslant e^{e^{11.5}}$ 是一个实数，a，q 是正整数满足 $(a, q) = 1$，$1 \leqslant q \leqslant (\log x)^3$．记 $\sum\limits_{l=1}^{q}{}' = \sum\limits_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}$．用 $\mu(n)$ 表示 Möbius 函数，p 表示素数，令

$$\Lambda(n) = \begin{cases}\log p, & \text{当 } n = p^k \text{ 时},\\ 0, & \text{其它},\end{cases} \qquad \psi(x; q, l) = \sum_{\substack{n \equiv l(\bmod q)\\ n \leqslant x}} \Lambda(n),$$

本文 1988 年 4 月 26 日收到，1989 年 6 月 9 日收到修改稿．

1) 在另文中我们将证明 $N_0 \doteq 10^{43001}$．

* 国家自然科学基金资助项目．

$$\tau(\chi)=\sum_{l=1}^{q}\chi(l)e\left(\frac{l}{q}\right),$$

其中 χ 是模 q 的任一特征，则我们有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x;q,l)-\frac{\mu(q)x}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\beta}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\leqslant 0.13xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-10.35}.$$

其中当存在模 q 的实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s,\tilde{\chi})$ 有实零点 $\tilde{\beta}\geqslant 1-\dfrac{0.1077}{\log q}$ 时 $\tilde{E}=1$；否则 $\tilde{E}=$

二、一些引理

引理 1. 设 $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^s}$ 当 $\mathrm{Re}\,s=\sigma>1$ 时绝对收敛，$A(t)$ 是 $t\geqslant 0$ 的单调增数，$|a_n|\leqslant A(n)$，则对于任何实数 $b>1$，$T\geqslant 1$ 及 $x=N+\dfrac{1}{2}$ (N 是正整数)，有

$$\sum_{n\leqslant x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+R_1,$$

其中

$$|R_1|\leqslant\frac{x^b}{\pi T\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b}+\frac{2^bA(x)}{\pi T\log 2}\left(x\log x+\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{xA(2x)}{\pi T\log 2}(\log x+\log 2+2).$$

证. 设 h 是一个正实数，Γ 是以 $b\pm iT$，$-U\pm iT$ 为顶点的矩形，Γ_1 是以 $b\pm iT$，$U\pm iT$ 为顶点的矩形. 对于 $h>1$ 和 $0<h<1$ 分别考虑积分 $\int_{\Gamma}\dfrac{h^s}{s}ds$ 和 $\int_{\Gamma_1}\dfrac{h^s}{s}ds$，则由残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{h^s}{s}ds=\begin{cases}1+A, & \text{当 } h>1 \text{ 时},\\ B, & \text{当 } 0<h<1 \text{ 时},\end{cases}\tag{1}$$

其中 $|A|\leqslant h^b(\pi T|\log h|)^{-1}$，$|B|\leqslant h^b(\pi T|\log h|)^{-1}$. 由(1)式可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right.$$
$$=\sum_{n\leqslant x}a_n(1+A)+\sum_{n>x}a_nB=\sum_{n\leqslant x}a_n-R_1.\tag{2}$$

其中

$$|R_1|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\frac{(xn^{-1})^b}{\pi T\left|\log\dfrac{x}{n}\right|}\leqslant\frac{x^b}{\pi T\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b}+\frac{1}{\pi T}\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}|a_n|\frac{(xn^{-1})^b}{\left|\log\dfrac{x}{n}\right|}.$$

由于当 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时有 $\log t\geqslant(t-1)\log 2$，故由(2)式可知本引理成立.

引理 2. 设 $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n(n=1,2,\cdots)$ 是 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点，t 是一个实数，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1.25+(4)(t-\gamma_n)^2}\leqslant\frac{1}{2}\log(|t|+2)+\frac{0.25}{0.0625+t^2}+2.6459.$$

证．令 $s=1.25+it$，则由文献[1]中的(63)式，(70)到(75)式可得

$$\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}\leqslant\frac{1}{2}\log(|t|+2)+\frac{0.25}{0.0625+t^2}-\frac{1}{2}\log 2\pi+0.095+\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\log(|t|+2)+\frac{0.25}{0.0625+t^2}+2.6459. \tag{3}$$

由于对实数 $0.25\leqslant a\leqslant 1.25$ 及任何实数 b 我们有 $(4a-1)b^2\geqslant(a-1.25)a$，故由(3)式知道本引理成立．

引理 3. 设 $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n(n=1,2,\cdots)$ 是 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点，t 是一个实数，$-0.01\leqslant\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant 1.0001$，则当 $s=\sigma+it\neq 1$ 时有

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho_n}+R_2.$$

其中

$$|R_2|\leqslant(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}+((\sigma-1)^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}+0.6105+(2-\sigma_0)$$
$$\cdot\left(2.625\log(|t|+2)+14.141+\frac{1.25}{0.0625+t^2}\right).$$

证．由

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)=\frac{1}{1+it}-\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2+it+2n}\right)$$

和引理 2 即可证明本引理．

引理 4. 设 $x\geqslant e^{20000}$ 是一个实数，令 $s=\sigma+it$，则 $\zeta(s)$ 在区域 $1-\frac{0.057812}{\log\log x}<\sigma\leqslant 1$，$|t|\leqslant\log x$，中没有零点．

证．设 $\rho=\beta+it$ 是$\zeta(s)$的一个非显然零点，令 $\sigma=1+\frac{0.36}{\log\log x}$，$\beta=1-\frac{b}{\log\log x}$，$\sigma_1=\frac{1+\sqrt{1+4\sigma^2}}{2}$，当 $|t|\geqslant 0.48$ 时，则由 $\sigma\leqslant\frac{5}{4}$ 和文献[1]中的(76)，(93)，(94)式可得

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\leqslant 0.27641\log\log x-\frac{1}{\sigma-\beta}+0.891. \tag{4}$$

当 $|t|\geqslant 0.48$ 时，由文献[1]中的定理 3 可得

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\leqslant 0.29575\log\log x+0.049. \tag{5}$$

1) Chen Jingrun & Wang Tianze, On Zeros of Dirichlet's L-function s, to appear.

由于 $-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leqslant \frac{\log\log x}{0.36} - 0.57037$，故由 (4)，(5) 两式和另文[1)]中的引理 3 可得 $57.442 - \frac{24}{0.36 + b} \geqslant 0$，所以此时本引理能够成立．由于当 $|s-1| < \sqrt{3} - 1$ 时有

$$|(s-1)\zeta(s) - 1| = |s-1| \cdot \left|\frac{1}{2} + s\int_1^\infty \frac{\frac{1}{2} - \{u\}}{u^{s+1}} du\right|$$

$$\leqslant (\sqrt{3} - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sigma}\right) < 1.$$

所以 $\zeta(s)$ 在区域 $|s-1| < \sqrt{3} - 1$ 中没有零点，故当 $|t| \leqslant 0.48$ 时有

$$\beta \leqslant 1 - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 - 0.48^2} \leqslant 1 - \frac{0.057812}{\log\log x}.$$

这就完成了本引理的证明．

引理 5. 设 $x \geqslant e^{20000}$ 是一个实数，令 $s = \sigma + it$，则 $\zeta(s)$ 在区域

$$1 - \frac{0.06085}{A\log\log x} < \sigma \leqslant 1, \ \log x \leqslant |t| \leqslant (\log x)^A$$

中没有零点，其中 $A \geqslant 1$ 是一个绝对常数．

证．与引理 4 相类似即可证明本引理．

引理 6. 在引理 5 的条件下，$\zeta(s)$ 在区域

$$1 - \frac{f_1(A)}{\log\log x} < \sigma \leqslant 1, \quad \log x \leqslant |t| \leqslant (\log x)^A$$

中至多有两个零点，其中 $f_1(A) = \frac{3}{4.58033A + 0.8416} - \frac{0.378}{A}$.

证． 设 $\rho_j = \beta_j + i\gamma_j (j = 1, 2, 3)$ 是 $\zeta(s)$ 的 3 个非显然零点满足 $\log x \leqslant |\gamma_j| \leqslant (\log x)^A$，令 $\sigma = 1 + \frac{0.378}{A\log\log x}$，$\beta_j = 1 - \frac{b_j}{\log\log x}$，则我们有

$$0 \leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \sum_{j=1}^{3}\left(1 + \mathrm{Re}\,\frac{1}{n^{i\gamma_j}}\right) = S(\rho_1, \rho_2, \rho_3) + S(\rho_1, \rho_2, \bar\rho_3)$$
$$+ S(\rho_1, \bar\rho_2, \rho_3) + S(\rho_1, \bar\rho_2, \bar\rho_3). \tag{6}$$

其中

$$S(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\gamma_j) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant 3}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_j + \gamma_k)) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3))\right\}.$$

由文献[1]中的(76)，(93)和(94)式可得

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\gamma_j) \leqslant 0.2764\log(2 + (\log x)^A)$$
$$-\mathrm{Re}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{3}\frac{1}{\sigma - \beta_k + i(\gamma_j + \gamma_k)} - \frac{1}{\sigma - \beta_k} + 2.18034. \tag{7}$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant 3$. 类似地我们有

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_1 + \gamma_j)) \leqslant \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + (\gamma_1 + \gamma_j)^2} + 0.2764\log(2 + (\log x)^A)$$

$$- \frac{1}{\sigma - \beta_k + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} + 0.92471, \tag{8}$$

其中 $2 \leqslant j \neq k \leqslant 3$. 由 $|\gamma_i| \geqslant 20000$ 和文献[1]中的定理 3 可得

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_2 + \gamma_3)) \leqslant \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + (\gamma_2 + \gamma_3)^2}$$

$$+ 0.2764\log(2 + (\log x)^A) + 0.2011, \tag{9}$$

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) \leqslant \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)^2}$$

$$+ 0.2764\log(2 + (\log x)^A) + 0.3132. \tag{10}$$

当 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}\{1 - \beta_j\} \leqslant \sigma - 1$ 时，则由(7)到(10)式，文献[2]中的引理 11，以及

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leqslant \frac{A\log\log x}{0.378} - 0.57$$

可得

$$S(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \leqslant 4.58033A\log\log x + 8.33475 - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma - \beta_j}. \tag{11}$$

对于(6)式中的其余三项，有与 $S(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ 完全相同的估计，故由(6)和(11)式即可完成本引理的证明。

引理 7. 设 $x \geqslant e^{e^{11.5}}$ 是一个实数，则有

$$|\psi(x) - x| = \left|\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) - x\right| \leqslant 0.0012x(\log x)^{-10.35}.$$

证. 设 $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点，令 $T = (\log x)^{13}$，则由引理 2 可得

$$\sum_{|T-\gamma_n|\leqslant 1} 1 \leqslant 5.25 \sum_{|T-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{1.25 + 4(T - \gamma_n)^2} \leqslant 35.42\log\log x - 1. \tag{12}$$

由(12)式可知存在一个实数 T_1 满足 $|T_1 - T| \leqslant 1$ 使得 $\zeta(s)$ 在区域 $|\mathrm{Im}s - T_1| \leqslant \frac{1}{35.42\log\log x}$ 中没有非显然零点。取 $f(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$，$b = 1 + \frac{1}{(\log x)^2}$. 则由引理 1 可得

$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s}ds + R_3 \tag{13}$$

其中 $|R_3| \leqslant 0.0011x(\log x)^{-10.35}$. 设 Γ 是以 $b \pm iT_1$，$1 - b \pm iT_1$ 为顶点的矩形，则由残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s}ds = x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho|<T_1}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0). \tag{14}$$

由引理 2 和引理 3 可得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1-b+iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \leqslant \frac{1}{2\pi T_1}\int_{1-b}^{b}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT_1)\right|x^{\sigma}d\sigma$$
$$\leqslant 0.00001x(\log x)^{-10.35}. \tag{15}$$

类似地,我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1-b+iT_1}^{1-b-iT_1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \leqslant 0.00001x(\log x)^{-10.35},$$

以及

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1-b-iT_1}^{b-iT_1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \leqslant 0.00001x(\log x)^{-10.35}$$

故由(13)到(15)式和 $\frac{\zeta'}{\zeta}(0)=\log 2\pi$ 可得

$$|\psi(x)-x| \leqslant \left|\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leqslant T_1}\frac{x^{\rho}}{\rho}\right| + 0.00114x(\log x)^{-10.35}. \tag{16}$$

当 $x \geqslant e^{20000}$ 时,则由引理 2 和引理 4 可得

$$\left|\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leqslant\log x}\frac{x^{\rho}}{\rho}\right| \leqslant \left(\frac{0.057812}{\log\log x}\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leqslant 1}1+\sum_{k=1}^{\log x}\frac{1}{k}\sum_{k\leqslant|\mathrm{Im}\rho|\leqslant k+1}1\right)x^{1-\frac{0.057812}{\log\log x}}$$
$$\leqslant (62)(\log\log x)^2x^{1-\frac{0.057812}{\log\log x}} \leqslant e^{-14.87}x(\log x)^{-10.35}. \tag{17}$$

取 $A=13.001$, 当 $x \geqslant e^{e^{11.5}}$ 时,则由引理 2 和引理 6 可得

$$\left|\sum_{\log x\leqslant|\mathrm{Im}\rho|\leqslant T_1}\frac{x^{\rho}}{\rho}\right| \leqslant \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}+\left(\sum_{k=[\log x]}^{(\log x)^{13.001}}\frac{1}{k}\sum_{k\leqslant|\mathrm{Im}\rho|\leqslant k+1}1\right)x^{1-\frac{0.020602}{\log\log x}}$$
$$\leqslant \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}+(484)(\log\log x)^2x^{1-\frac{0.020602}{\log\log x}} \leqslant \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}$$
$$+e^{-45}x(\log x)^{-10.35}. \tag{18}$$

由 $\log x \leqslant |\mathrm{Im}\rho_1| \leqslant T_1$ 和引理 5 容易得出 $\frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|} \leqslant e^{-13}x(\log x)^{-10.35}$, 同样地有 $\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|} \leqslant e^{-13}x(\log x)^{-10.35}$, 故由(16)到(18)式即可得出本引理的证明.

引理 8. 设 χ 是模 q 的一个原特征, $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n(n=1,2,\cdots)$ 是 $L(s,\chi)$ 的所有非显然零点, $T\geqslant 2$ 是一个实数,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1.5+2(T-\gamma_n)^2} \leqslant \frac{1}{2}\log qT+0.9443.$$

证. 令 $s=\frac{3}{2}+iT$, 则由文献[1]中的定理 1 得

$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n} \leqslant \mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{1}{2}\log\frac{q(T+2)}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2}\log qT+0.9443. \tag{19}$$

由(19)式和 $\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_n} \geqslant \frac{1}{1.5+2(T-\gamma_n)^2}$ 即知本引理成立.

引理 8'. 在引理 8 的条件下,以 $T\geqslant 0$ 代替 $T\geqslant 2$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1.5+2(T-\gamma_n)^2} \leqslant \frac{1}{2} \log q(T+2)+0.59773.$$

证．仿引理 8 即可证得本引理．

引理 9. 设 χ 是模 q 的一个原特征，$s=\sigma+it$，$|t| \geqslant 2$，$\rho_n=\beta_n+i\gamma_n (n=1,2,\cdots)$ 是 $L(s,\chi)$ 的所有非显然零点，则当 $-\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1.2$ 时有

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{|\gamma_n-t| \leqslant 1} \frac{1}{s-\rho_n}+R_4.$$

其中

$$|R_4| \leqslant (1.75)(2-\sigma)(\log q|t|)+(2-\sigma)\left(\frac{1}{2.25+t^2}+\frac{1}{|t| \sqrt{2.25+t^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4|t|}+(3.5)(0.9443)\right)+0.6105.$$

证．令 $s_1=2+it$，则由文献[3]中第八章的(14)和(16)式可得

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{L'}{L}(s_1,\chi)=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{s_1-\rho_n}\right)\right)-\frac{1}{s+\delta}+\frac{1}{s_1+\delta}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n}-\frac{1}{s_1+\delta+2n}\right), \tag{20}$$

其中 $\delta=\begin{cases}0, & \chi(-1)=1, \\ 1, & \chi(-1)=-1.\end{cases}$ 由(20)式和引理 8 通过简单的计算即知本引理能够成立．

引理 9′. 设 χ 是模 q 的一个原特征，$\rho_n=\beta_n+i\gamma_n (n=1,2,\cdots)$ 是 $L(s,\chi)$ 的所有非显然零点，令 $s=-\frac{1}{2}+it$，则有

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{|\gamma_n-t| \leqslant 1} \frac{1}{s-\rho_n}+R_4'.$$

其中

$$|R_4'| \leqslant (1.75)(2.5) \log q(2+|t|)+(2.5)\left(\frac{1}{2.25+t^2}+\frac{1}{3}+(3.5)(0.59773)\right.$$
$$\left.+\left((4+t^2)\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)+0.6105.$$

证．仿引理 9 即可证得本引理．

引理 10. 设 χ 是模 q 的一个原特征，$x \geqslant e^{20000}$ 是一个实数；$q \leqslant(\log x)^3$，$A \geqslant 1$ 是一个绝对常数，当 χ 是复特征时，则 $L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{f_2(A)}{\log \log x} \leqslant \sigma<1, \quad |t| \leqslant(\log x)^A$$

中至多有两个零点；当 χ 是实特征时，则 $L(s,\chi)$ 在上述区域中至多有两对共轭零点，其中

$$f_2(A)=\frac{3}{4.10872 A+12.3385}-\frac{0.46}{A+3}.$$

证．当χ是复特征时，设 $\rho_j=\beta_j+i\gamma_j(j=1,2,3)$ 是 $L(s,\chi)$ 的3个互不相同的零点，其中 $\beta_j=1-\frac{b_j}{\log\log x}$，$|\gamma_j|\leqslant(\log x)^A$．取 $\sigma=1+\frac{0.46}{(A+3)\log\log x}$，则有

$$0\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\sum_{j=1}^{3}\left(1+\mathrm{Re}\,\frac{\chi(n)}{n^{i\gamma_j}}\right)=S(\chi,\chi,\chi;\rho_1,\rho_2,\rho_3)+S(\chi,\bar{\chi},\chi;\rho_2,\bar{\rho}_2,\rho_3)$$
$$+S(\chi,\chi,\bar{\chi};\rho_1,\rho_2,\bar{\rho}_3)+S(\chi,\bar{\chi},\bar{\chi};\rho_1,\bar{\rho}_2,\bar{\rho}_3),\tag{21}$$

其中

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)=-\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)+\sum_{j=1}^{3}\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_j,\chi_j)\right.$$
$$\left.+\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 3}\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_j+i\gamma_k,\chi_j\chi_k)+\frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3),\chi_1\chi_2\chi_3)\right\}.$$

当 $\chi^3\neq\chi_0$ 时，则由 $-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\leqslant\frac{A+3}{0.46}\log\log x-0.57465$，以及另文[1)]中的引理2和引理4可得

$$S(\chi,\chi,\chi;\rho_1,\rho_2,\rho_3)\leqslant\frac{A+3}{0.46}\log\log x-0.57495+(3)(0.72361)+2.3072$$
$$+(3)(0.2764)\log q(2+(\log x)^A)+(3)(0.2764)\log q(2+2(\log x)^A)$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}+0.2764\log q(2+3(\log x)^A)\leqslant(4.10872A+12.808963)\log\log x$$
$$-\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\sigma-\beta_j}.\tag{22}$$

当 $\chi^3=\chi_0$ 时，由 $\chi^2=\bar{\chi}$ 而得 $L(\bar{\rho}_j,\chi^2)=0$，$1\leqslant j\leqslant 3$．故由另文[1)]中的引理4可得

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_j+\gamma_k),\chi^2)\leqslant 0.2764\log q(2+2(\log x)^A)+0.72361$$
$$+c_q-\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma+i(\gamma_j+\gamma_k)-(\beta_k-i\gamma_k)}.\tag{23}$$

其中 $1\leqslant j\neq k\leqslant 2$，$c_q$ 的定义见另文[1)]中的引理2及其(39)式可得

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3),\chi^3)\leqslant\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)}+0.38065$$
$$+e_q+(0.2764A+0.3307)\log\log x,\tag{24}$$

其中

$$e_q=\begin{cases}0.9\log 2, & \text{当 } 2|q,\ 3\nmid q \text{ 时},\\ 0.4\log 3, & \text{当 } 3|q,\ 2\nmid q \text{ 时},\\ 0.9\log 2+0.4\log 3, & \text{当 } 6|q \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } (q,6)=1 \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\{1-\beta_j\}\leqslant\sigma-1$ 时，则由(23)，(24)式，及另文[1)]中的引理2和文献[2]中的引理11

1) 见1123页脚注．

可得

$$S(\chi, \chi, \chi; \rho_1, \rho_2, \rho_3) \leqslant (4.10872A + 12.3)\log\log x - \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\sigma - \beta_j}. \tag{25}$$

使用同样的方法我们可以得到

$$S(\chi, \chi, \chi; \rho_1, \bar{\rho}_2, \rho_3) \leqslant (4.10872A + 12.181631)\log\log x - \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\sigma - \beta_j}. \tag{26}$$

对于 $S(\chi, \chi, \bar{\chi}; \rho_1, \rho_2, \bar{\rho}_3)$ 和 $S(\chi, \bar{\chi}, \bar{\chi}; \rho_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$ 有与 $S(\chi, \bar{\chi}, \chi; \rho_1, \bar{\rho}_2, \rho_3)$ 完全相同的估计，所以当 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} \{1 - \beta_j\} \leqslant \sigma - 1$ 时，则由(21)，(22)，(25)和(26)式可得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 3} \{b_j\} \geqslant \frac{3}{4.10872A + 12.3385} - \frac{0.46}{A+3}.$$

当 χ 是模 q 的实特征时，使用相同的方法容易证得引理的结论．于是本引理得证．

引理 11. 设 χ_1 是模 q_1 的实原特征，χ_2 是模 q_2 的实原特征，实数 β_1，β_2 满足 $L(\beta_1, \chi_1) = L(\beta_2, \chi_2) = 0$，$0 \leqslant \beta_1, \beta_2 \leqslant 1$，则当 χ_1 与 χ_2 不同时，有

$$\min(\beta_1, \beta_2) \leqslant 1 - \frac{0.2154}{\log q_1 q_2}.$$

证．令 $\sigma = 1 + \dfrac{1}{2\log q_1 q_2}$，$\sigma_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\sigma^2}}{2}$，则由文献[1]中的定理 2 和 $\sigma_1 \geqslant 1.618$ 可得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_j) \leqslant 0.2764\log q_j - \frac{1}{\sigma - \beta_j} + 0.92464. \tag{27}$$

其中 $j = 1, 2$．由 $\chi_1\chi_2$ 是模 $q_1 q_2$ 的非主特征和另文[1)]中的引理 2 可得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) \leqslant 0.2764\log q_1 q_2 + 0.94839. \tag{28}$$

由文献[1]中的定理 1 有

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_j) \leqslant \frac{1}{2}\log q_j - \frac{1}{\sigma - \beta_j} - 0.57236, \ (j = 1, 2). \tag{29}$$

使用证明另文[1)]中引理 2 的方法，由文献[1]中的定理 1 可得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) \leqslant \frac{1}{2}\log q_1 q_2 - 0.22578. \tag{30}$$

由于 χ_1 和 χ_2 都是实特征，故有

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) - \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_2) - \frac{L'}{L}(\sigma_2, \chi_1\chi_2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n))\Lambda(n)n^{-\sigma} \geqslant 0. \tag{31}$$

由(27)到(31)式以及 $-\dfrac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leqslant \dfrac{1}{\sigma - 1} - 0.534487$ 可得

1) 见1123页脚注．

$$0 \leqslant 2.79562 \log q_1 q_2 - \frac{2}{\sigma - \min(\beta_1, \beta_2)}.$$

由此即可得出本引理的结论.

引理 12. 设 χ 是模 q 的原特征, $x \geqslant e^{10000}$ 是一个实数, $q \leqslant x$, $T = (\log x)^{12.6}$, 则有

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) = -\sum_{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T_1} \frac{x^\rho}{\rho} + R_5.$$

其中 $|R_5| \leqslant 2.08664x(\log x)^{-10.6}$, $|T_1 - T| \leqslant 1$.

证. 由引理 8 可得 $\sum\limits_{|\gamma_n - T| \leqslant 1} 1 \leqslant 1.7876 \log qT - 1$, 故存在实数 T_1 满足 $|T_1 - T| \leqslant 1$ 使得

$$|T_1 - \mathrm{Im}\rho_n| \geqslant \frac{1}{1.7876 \log qT}. \tag{32}$$

其中 ρ_n 表示 $L(s, \chi)$ 的任一零点. 令 $b = 1 + \frac{1}{(\log x)^2}$, 则由残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right) \frac{x^s}{s}\, ds = -\sum_{|\mathrm{Im}\rho_n| \leqslant T_1} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + \theta \log x. \tag{33}$$

其中 Γ 是以 $b \pm iT_1$, $-\frac{1}{2} \pm iT_1$ 为顶点的矩形, $|\theta| \leqslant 1$. 取 $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n) n^{-s}$, $A(n) = \log n$, 则由引理 1 可得

$$\psi(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right) \frac{x^s}{s}\, ds + R_6, \tag{34}$$

其中 $|R_6| \leqslant 1.88283x(\log x)^{-10.6}$. 由(32)式,引理 8 和引理 9 可得

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}+iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right) \frac{x^s}{s}\, ds\right| \leqslant 0.1019x(\log x)^{-10.6}. \tag{3 }$$

类似地我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-iT_1}^{b-iT_1} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right) \frac{x^s}{s}\, ds\right| \leqslant 0.1019x(\log x)^{-10.6}. \tag{36}$$

由引理 8′ 和引理 9′ 可得 $\left|\frac{L'}{L}\left(-\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right| \leqslant 12.8211 + 6.4964 \log q(2 + |t|)$. 所以有

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{-T_1}^{T_1} \left(-\frac{L'}{L}\left(-\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right) \frac{x^{-\frac{1}{2}+it}}{-\frac{1}{2} + it}\, dt\right| \leqslant 4.25x^{-\frac{1}{2}}(\log x)^2. \tag{37}$$

由(33)到(37)式知道本引理成立.

三、定理的证明

由引理 11 可知,至多存在模 q 的一个实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s, \tilde{\chi})$ 有实零点 $\tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{0.1077}{\log q}$, 并且这样的实零点至多有一个,故由

$$\sum_{\chi \bmod q} \psi(x, \chi)\bar{\chi}(l) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \sum_{\chi \bmod q} \chi(n)\bar{\chi}(l) = \varphi(q)\psi(x; q, l).$$

可得

$$\psi(x;q,l)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0,\tilde{\chi}}\psi(x,\chi)\bar{\chi}(l)+\frac{\tilde{E}}{\varphi(q)}\psi(x,\tilde{\chi})\bar{\tilde{\chi}}(l).$$

将此式两端同时乘以 $e\left(\frac{al}{q}\right)$，然后对 l 经过模 q 的简化剩余系求和可得

$$\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x;q,l)-\frac{\mu(q)x}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\bar{\tilde{\chi}})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}=\frac{\mu(q)(\psi(x)-x)}{\varphi(q)}$$
$$-\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)>1}}\Lambda(n)+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0,\tilde{\chi}}\psi(x,\chi)\tau(\bar{\chi})\chi(a)+\Big(\psi(x,\tilde{\chi})$$
$$+\frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\Big)(\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\bar{\tilde{\chi}})(\varphi(q))^{-1}). \tag{38}$$

当 $\chi\neq\chi_0,\tilde{\chi}$ 时，设 χ^* 是模 q^* 的与 χ 相对应的原特征，则有

$$\psi(x,\chi)=\psi(x,\chi^*)+R_7 \tag{39}$$

其中 $|R_7|\leqslant\frac{1}{\log 2}(\log x)^2$. 取 $T=(\log x)^{42.6}$，当 χ^* 是复特征时，则由引理 12 可得

$$|\psi(x,\chi^*)|\leqslant\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant\log x}\frac{x^{\beta}}{|\rho|}+\sum_{\log x\leqslant|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T_1}\frac{x^{\beta}}{|\rho|}+|R_5|. \tag{40}$$

在引理 10 中取 $A=1$，则由引理 8′ 可得

$$\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant\log x}\frac{x^{\beta}}{|\rho|}\leqslant\frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}+\Big(\frac{\log\log x}{0.066777}\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant 1}1+\sum_{1\leqslant k\leqslant\log x}\frac{1}{k}\sum_{k\leqslant|\operatorname{Im}\rho|\leqslant k+1}1\Big)$$
$$\cdot x^{1-\frac{0.066777}{\log\log x}}\leqslant\frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}+(97.85)(\log\log x)^2x^{1-\frac{0.066777}{\log\log x}}. \tag{41}$$

由另文[1] 中的定理可知，当 $x\geqslant e^{e^{11.5}}$ 时有 $\frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}\leqslant e^{-14.8}x(\log x)^{-10.35}$ 以及 $\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}\leqslant e^{-14.8}$ $\cdot x(\log x)^{-10.35}$. 故由(41)式可得

$$\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant\log x}\frac{x^{\beta}}{|\rho|}\leqslant(7.5\times10^{-7})x(\log x)^{-10.35}. \tag{42}$$

在引理 10 中取 $A=12.7$，当 $x\geqslant e^{e^{11.5}}$ 时，则由引理 8′ 和引理 10 可得

$$\sum_{\log x\leqslant|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T_1}\frac{x^{\beta}}{|\rho|}\leqslant\frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|}+\frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|}+\Big(\sum_{[\log x]\leqslant k\leqslant T_1}\frac{1}{k}\sum_{k\leqslant|\operatorname{Im}\rho|\leqslant k+1}1\Big)x^{1-\frac{0.017157}{\log\log x}}$$
$$\leqslant\frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|}+\frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|}+(444.58)(\log\log x)^2x^{1-\frac{0.017157}{\log\log x}}\leqslant\frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|}+\frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|}$$
$$+e^{-17.5}x(\log x)^{-10.35}. \tag{43}$$

当 $x\geqslant e^{e^{11.5}}$ 时，则由另文[1]中的定理容易得到 $\frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|}\leqslant e^{-10.4}x(\log x)^{-10.35}$ 以及 $\frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|}\leqslant e^{-10.4}$ $\cdot x(\log x)^{-10.35}$. 故由(40)到(43)式可得

---

1) 见1123页脚注.

$$|\psi(x, \chi^*)| \leqslant \left(7.5 \times 10^{-7} + e^{-17.5} + \frac{2}{e^{10.4}}\right) x(\log x)^{-10.35} + |R_5|$$

$$\leqslant 0.12x(\log x)^{-10.35}. \tag{44}$$

当 χ^* 是模 q^* 的实特征时,类似地可得

$$|\psi(x, \chi^*)| \leqslant 0.12x(\log x)^{-10.35}. \tag{45}$$

当 $\chi \neq \chi_0, \tilde{\chi}, x \geqslant e^{e^{11.5}}$ 时,则由(39),(44)和(45)式得

$$|\psi(x, \chi)| \leqslant 0.12x(\log x)^{-10.35} + \left(\frac{1}{\log 2}\right)(\log x)^2 \leqslant 0.13x(\log x)^{-10.35}. \tag{46}$$

设 $\tilde{\chi}^*$ 是模 $\tilde{q}^*$ 的与 $\tilde{\chi}$ 相对应的原特征,则由引理 10, 引理 11, 引理 12 和另文[1)]中的定理可知当 $x \geqslant e^{e^{11.5}}$ 时有

$$\left|\psi(x, \tilde{\chi}) + \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\right| \leqslant \left|\psi(x, \tilde{\chi}^*) + \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\right| + \left(\frac{1}{\log 2}\right)(\log x)^2 \leqslant \sum_{\substack{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant \log x \\ \rho \neq \tilde{\beta}}} \frac{x^{\beta}}{|\rho|}$$

$$+ \sum_{\log x \leqslant |\operatorname{Im}\rho| \leqslant T_1} \frac{x^{\beta}}{|\rho|} + \left(\frac{1}{\log 2}\right)(\log x)^2 + |R_5| \leqslant 0.13x(\log x)^{-10.35}. \tag{47}$$

当 $x \geqslant e^{e^{11.5}}$ 时,则由(38),(46),(47)式和引理 7 可得

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x; q, l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| \leqslant 0.13xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-10.35}.$$

这就完成了本文定理的证明.

参 考 文 献

[1] 陈景润,曲阜师范大学学报(自然科学版), 1986, 2: 3.
[2] Chen Jingrun, *Scientia Sinica*, 22 (1979), 859—889.
[3] 潘承彪译,解析数论基础,科学出版社, 1984.

1) 见1123页脚注.