Skyrme模型中的拓扑结构

邹丽平*, 张鹏鸣*

中国科学院近代物理研究所, 兰州 730000

*联系人, 邹丽平, E-mail: zoulp@impcas.ac.cn; 张鹏鸣, E-mail: zhpm@impcas.ac.cn

收稿日期: 2018-05-03; 接受日期: 2018-05-14; 网络出版日期: 2018-07-06

国家自然科学基金(批准号: 11575254, 11447105)资助

摘要 Skyrme模型具有丰富的拓扑结构, 包括重子数拓扑 $\pi_3(S^3)$ 、磁单极拓扑 $\pi_2(S^2)$ 和壳层拓扑(径向激发量子数) $\pi_1(S^1)$ 等. 首先讨论QCD与Skyrme模型之间的关系, 并通过QCD中的磁单极拓扑性质进一步讨论Skyrme模型中重子数拓扑分解问题. 此外还将具体求解Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) Skyrme模型中的具有不同磁单极拓扑数和壳层拓扑数的BPS skyrmion解.

关键词 Skyrme模型, skyrmion重子数拓扑, skyrmion磁单极拓扑, skyrmion壳层拓扑, BPS Skyrme模型

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Jp, 67.40.Vs, 74.72.-h

1 引言

Skyrme模型是描述强相互作用的一个低能有效模型, 被广泛应用于描述强子和原子核的相关性质. 在该模型中最基本的物理场是 π 场, 重子则表现为模型中的拓扑孤立子(Skyrmion)^[1]. 在Skyrme提出该模型之后, 就很快被用来描述氦核和其他一些轻核^[2,3]. 近年来, 由于计算机模拟的发展人们已经能够用Skyrme模型构造许多原子核^[4-6], 甚至是重子数高达108的原子核^[7]. 因此理论上讲任意原子核都可以通过Skyrme模型来构造.

Skyrme模型具有丰富的拓扑性质^[8,9]. 除了skyrmion之外, 模型中还存在baby skyrmion、扭结(Knot)等拓扑孤立子. 此外, 研究表明磁单极

拓扑也在Skyrme模型中起着重要作用^[10]. Duan-Ge-Cho规范势分解理论^[11-13]是研究规范场结构性质的重要方法, 它能够分离出非阿贝尔规范场的拓扑部分, 在规范场拓扑性质研究中有广泛应用. 尤其是在研究量子色动力学(Quantum Chromodynamics, QCD)磁单极拓扑以及QCD真空的扭结拓扑性质中有着重要应用^[14-16]. 通过Duan-Ge-Cho规范势分解理论, QCD拉氏量可以与Skyrme模型拉氏量紧密联系起来^[8]. 然而人们对Skyrme模型中的磁单极物理少有讨论, 只是通过重子数拓扑描述skyrmion. 磁单极是非微扰QCD中非常重要的物理内容, 磁单极凝聚可以解释QCD中的色禁闭现象. 鉴于QCD与Skyrme模型之间的关系, 磁单极在Skyrme模型中也必然存在重要物理效应.

引用格式: 邹丽平, 张鹏鸣. Skyrme模型中的拓扑结构. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 100005

Zou L P, Zhang P M. The topological structures in Skyrme model (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 100005, doi: [10.1360/SSPMA2018-00175](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00175)

文献[9, 10]提出Skyrme模型中的拓扑孤立子可以通过磁单极(或者磁单极-反磁单极对)来理解, 其中skyrmion可以理解为一个内嵌磁单极的拓扑孤立子, baby skyrmion是磁单极-反磁单极对产生的涡旋, 而扭结则是由螺旋baby skyrmion在特定边界条件下形成的稳定构型. 人们虽然不讨论Skyrme模型中的磁单极拓扑, 然而在研究Skyrme模型非常重要的方法rational map中就用了具有磁单极拓扑的物理场 $\hat{n}$. 最近在文献[10]中, 提出描述skyrmion的重子数拓扑 $\pi_3(S^3)$ 可以进一步分解为磁单极拓扑以及径向激发量子数, 分别描述 $\pi_2(S^2)$ 和 $\pi_1(S^1)$ 拓扑. 径向激发量子数(壳层拓扑)是该文提出的一种独立拓扑数, 但最早由Manton等人^[17]在模拟多重子数原子核时曾用来构造原子核的壳层结构. 在重子数拓扑分解框架下, 由于系统能量的关系壳层量子数也被认为是描述基态skyrmion的激发态量子数. 高激发态skyrmion并不能稳定存在并最终会衰变到基态. 然而从拓扑上来讲, 由于磁单极和壳层拓扑数各自满足不同的拓扑性质, 因此径向激发skyrmion的衰变不会是随意的, 必将分别满足磁单极拓扑、壳层拓扑数的守恒性质.

除了标准的Skyrme模型, Skyrme模型家族还有许多推广的模型^[18]. 标准的Skyrme模型只考虑 π 场微分的二次方和四次方项, 但在推广的Skyrme模型中可以根据一定的对称性原则添加其他高次方项, 在文献[19]中讨论了包含有12次方项的推广Skyrme模型动力学问题. 除此之外, Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) Skyrme模型是另一种非常重要的推广Skyrme模型, 其拉氏量只包含了场微分的0次方和6次方项. 标准的Skyrme模型解释原子核时存在核子间束缚能偏大的问题^[20-22]. 而BPS模型由于满足Bogomol'nyi条件, 因此其能量正比于重子数^[23], 属于零束缚能体系. 但在引入合适的库仑相互作用和量子化修正等修正项, BPS模型可以很好地解释原子核束缚能问题^[24]. 此外, 也可以利用较小的二次方和四次方Skyrme项并作为BPS Skyrme模型的微扰项, 解决Skyrme模型束缚能过大的问题^[25]. BPS Skyrme模型类似于核物理中的液滴模型, 并成功用于描述重核、核物质以及中子星等相关问题^[24, 26].

由于BPS Skyrme模型中skyrmion之间的结合能为零, 因此其径向激发态也不存在能量过高的问题. 本文将讨论BPS skyrmion $\pi_1(S^1)$ 拓扑荷大于1的解, 通过一定的相互作用势, 我们可以得到精确的解析解. 与常规BPS Skyrme解不同的是, 在 $\pi_1(S^1)$ 拓扑荷大于1时, 我们可以从能量密度以及重子数密度图中看到skyrmion的壳层结构.

2 从QCD到Skyrme模型

在引言中我们提到Skyrme模型与QCD存在密切关系. 实际上, QCD拉氏量通过一定的变换关系可以得到Skyrme模型拉氏量. 首先, 让我们先回顾Duan-Ge-Cho规范势分解理论^[11, 13]. 引入内部空间常矢量 $\hat{n}$, 满足条件

$$\hat{D}_\mu \hat{n} = \partial_\mu \hat{n} + g \hat{A}_\mu \times \hat{n} = 0. \quad (1)$$

由此可以解得

$$\hat{A}_\mu = A_\mu \hat{n} + \mathbf{C}_\mu, \quad \mathbf{C}_\mu = -\frac{1}{g} \hat{n} \times \partial_\mu \hat{n}. \quad (2)$$

$\hat{A}_\mu$ 也被称为限制规范势(Restricted Potential), 满足完整的SU(2)规范变换:

$$\delta \hat{A}_\mu = \frac{1}{g} \hat{D}_\mu \alpha, \quad \delta \hat{n} = -\alpha \times \hat{n}, \quad (3)$$

并且保留了非阿贝尔规范场所有的拓扑性质. 其中场 $\hat{n}$ 描述了同伦映射 $\pi_2(S^2)$, 因此, $\hat{A}_\mu$ 具有非阿贝尔规范场的磁单极拓扑, 其中 $\mathbf{C}_\mu$ 即为磁单极势. 磁单极在QCD的色禁闭问题中扮演了重要角色, 对偶超导模型告诉我们磁单极凝聚形成的QCD真空束缚了所有带色电荷的粒子, 因此QCD禁闭势来源于QCD胶子场中的限制规范场. 而这一结论也得到了QCD格点计算的确认^[27]. 但由于条件(1), $\hat{A}$ 只能描述QCD胶子场的低能部分动力学. 因此, 在Duan-Ge-Cho分解理论下要表述完整的QCD胶子场 $\mathbf{A}_\mu$ 还需要引入色场 $\mathbf{X}_\mu$:

$$\mathbf{A}_\mu = \hat{A}_\mu + \mathbf{X}_\mu = A_\mu \hat{n} - \frac{1}{g} \hat{n} \times \partial_\mu \hat{n} + \mathbf{X}_\mu, \quad (4)$$

其中, $\hat{A}_\mu$ 也被称为色中性限制胶子场, $\mathbf{X}_\mu$ 被称为价胶子场(Valence Potential). 理论认为限制胶子场不

能够作为组分存在于核子中, 而价胶子场可以作为组分存在于胶球混杂态等强子态中^[28].

由Duan-Ge-Cho分解, 可以得到

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu \quad (5)$$

$$= \hat{F}_{\mu\nu} + \hat{D}_\mu \mathbf{X}_\nu - \hat{D}_\nu \mathbf{X}_\mu + g \mathbf{X}_\mu \times \mathbf{X}_\nu, \quad (6)$$

并且QCD拉氏量可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} (\hat{D}_\mu \mathbf{X}_\nu - \hat{D}_\nu \mathbf{X}_\mu)^2 \\ & - \frac{g}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \cdot (\mathbf{X}_\mu \times \mathbf{X}_\nu) - \frac{g^2}{4} (\mathbf{X}_\mu \times \mathbf{X}_\nu)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

让我们回到Skyrme模型, 其拉氏量由标量场 ω 和描述 π 介子的矢量场 $\hat{\mathbf{n}}$ 构成. 进一步可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\mu^2}{4} \text{tr} L_\mu^2 + \frac{\alpha}{32} \text{tr} \left([L_\mu, L_\nu]^2 \right) \\ = & -\frac{\mu^2}{4} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \omega)^2 + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}})^2 \right] \\ & - \frac{\alpha}{16} \left[\sin^2 \frac{\omega}{2} (\partial_\mu \omega \partial_\nu \hat{\mathbf{n}} - \partial_\nu \omega \partial_\mu \hat{\mathbf{n}})^2 \right. \\ & \left. + 4 \sin^4 \frac{\omega}{2} (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}} \times \partial_\nu \hat{\mathbf{n}})^2 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

其中, μ 和 α 是相互作用常数, 并且

$$\begin{aligned} L_\mu &= U \partial_\mu U^\dagger, \\ U &= \exp \left(\frac{\omega}{2i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) = \cos \frac{\omega}{2} - i (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sin \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

有意思的是仅仅通过引入条件

$$\omega(r) = \pi, \quad (10)$$

Skyrme拉氏量可以进一步简化到Skyrme-Faddeev模型:

$$\mathcal{L} \rightarrow -\frac{\mu^2}{2} (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}})^2 - \frac{\alpha}{4} (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}} \times \partial_\nu \hat{\mathbf{n}})^2. \quad (11)$$

Skyrme-Faddeev模型在物理中有重要应用, 被认为是QCD低能有效模型. 该模型中研究较多的是baby skyrmion和扭结拓扑孤立子. 也有许多理论研究用以解释胶球, 胶球可以通过有限能量的扭结拓扑孤立子来理解.

现在让我们来比较QCD拉氏量(7)与Skyrme模型拉氏量(8)和(11). 在QCD中, 考虑真空凝聚后限制规范场 $\hat{A}_\mu$ 将获得质量, 其拉氏量可以进一步表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\mu^2}{2} \hat{A}_\mu^2 - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} (\hat{D}_\mu \mathbf{X}_\nu - \hat{D}_\nu \mathbf{X}_\mu)^2 \\ & - \frac{g}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \cdot (\mathbf{X}_\mu \times \mathbf{X}_\nu) - \frac{g^2}{4} (\mathbf{X}_\mu \times \mathbf{X}_\nu)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

当不考虑价场 $\mathbf{X}_\mu$ 时, 并且把场 $\mathbf{A}_\mu$ 积分掉以后得到的有效场即为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}} \times \partial_\nu \hat{\mathbf{n}})^2 - \frac{\mu^2}{2} (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}})^2. \quad (13)$$

此即Skyrme-Faddeev模型拉氏量(11). 因此QCD在Duan-Ge-Cho规范势分解理论下可以严格得到Skyrme-Faddeev模型. 不仅如此, QCD拉氏量还可以等价地表示为完整的Skyrme模型拉氏量(8). 为此, 我们可以将价场 $\mathbf{X}_\mu$ 简单表示为

$$\mathbf{X}_\mu = f_1 \partial_\mu \hat{\mathbf{n}} + f_2 \hat{\mathbf{n}} \times \partial_\mu \hat{\mathbf{n}}, \quad \phi = f_1 + i f_2. \quad (14)$$

当满足 $\partial_\mu \phi = 0$, $A_\mu = \partial_\mu \omega$ 条件时, QCD拉氏量简化为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4g^2} (1 - g^2 \phi^* \phi)^2 (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}} \times \partial_\nu \hat{\mathbf{n}})^2 - \frac{1}{4} \phi^* \phi (\partial_\mu \omega \partial_\nu \hat{\mathbf{n}} \\ & - \partial_\nu \omega \partial_\mu \hat{\mathbf{n}})^2 - \frac{\mu^2}{2} \left[(\partial_\mu \omega)^2 + \frac{1}{g^2} (\partial_\mu \hat{\mathbf{n}})^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

得到了一个与Skyrme模型拉氏量基本一致的QCD低能有效拉氏量. 式(11)和(15)告诉我们Skyrme模型实际上是一个磁单极场与标量场 ω 相互作用的QCD有效模型. 这意味着磁单极是Skyrme模型的基本物理之一, Skyrme模型中的baby skyrmion、扭结以及重子数拓扑也可以通过磁单极拓扑来解释.

在引言中我们提到本文将讨论Skyrme模型中新的拓扑解, 尤其是求解Skyrme模型中的 $\pi_1(S^1)$ 拓扑径向激发态解. 然而在标准的Skyrme模型该径向激发态解的能量过高, 不能够用来解释高重子数的基态原子核, 因此我们将进一步讨论BPS Skyrme模型中的相关问题. BPS Skyrme模型拉氏量与式(8)不同, 它是推广的Skyrme模型, 由场微分的6次方项和0次方势能项组成. 其拉氏量表示为

$$\mathcal{L}_{\text{BPS}} = \mathcal{L}_6 + \mathcal{L}_0 = \frac{\lambda^2}{24} \left[\text{tr} (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} U^\dagger \partial_\mu U U^\dagger \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U) \right]^2$$

$$-\mu^2 V(U^\dagger U). \quad (16)$$

事实上在推广的Skyrme模型中, 其拉氏量中可以有更高次方的微分项, 这些微分项可能与QCD也有存在着密切关系. 这是因为QCD有效拉氏量可以表示为^[29]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{1}{4}(D_\nu^{ab}F_{\rho\mu}^b D_\nu^{ac}F_{\rho\mu}^c + D_\mu^{ab}F_{\nu\rho}^b D_\mu^{ac}F_{\nu\rho}^c) \\ & -\frac{1}{12}\text{tr}\left[C_1 F^2 + \frac{4}{3}C_2 F^4 - \frac{16}{9}C_3 F^6\right], \end{aligned} \quad (17)$$

存在 $F_{\mu\nu}$ 的高次方项.

3 Skyrme模型中的 $\pi_2(S^2)$ 磁单极拓扑以及 $\pi_1(S^1)$ 壳层拓扑

严格求解Skyrme模型是很困难的, 尤其是在重子数大于1的原子核体系, 其空间构型不再具有球对称性. 因此人们也通常采用一定的方法针对不同的原子核引入相应的试探函数, rational map是求解高重子数Skyrme模型通常采用的方法. 在该方法中, 不同重子数的skyrmion具有不同的pion场 $\hat{\mathbf{n}}$. 但从QCD与Skyrme模型的关系中我们知道场 $\hat{\mathbf{n}}$ 是可以表征 $\pi_2(S^2)$ 拓扑的, 即磁单极拓扑. Rational map提供了一种求解Skyrme模型的方法, 但磁单极拓扑并不依赖于rational map具体形式. 通过场 $\hat{\mathbf{n}}$ 我们可以得到磁单极拓扑荷:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pm 1}{8\pi} \int \epsilon_{ijk} H_{ij} d\sigma_k \\ &= \frac{\pm 1}{8\pi} \int \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_i \hat{\mathbf{n}} \times \partial_j \hat{\mathbf{n}}) d\sigma_k. \end{aligned} \quad (18)$$

Skyrme模型中存在特殊的磁单极解, 即

$$\omega(r) = \pi, \quad \hat{\mathbf{n}} = \hat{r}, \quad (19)$$

其中, $\hat{r}$ 是球坐标系中径向单位矢量. 可以验证该磁单极解具有磁荷

$$\begin{aligned} M &= \pm \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_i \hat{\mathbf{n}} \times \partial_j \hat{\mathbf{n}}) d\sigma_k \\ &= \pm \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{ijk} \hat{r} \cdot (\partial_i \hat{r} \times \partial_j \hat{r}) d\sigma_k = \pm 1. \end{aligned} \quad (20)$$

当然, 磁单极解是发散的, 系统能量不收敛. 因此一般情况下要求标量场 $\omega(r) \neq 0$, 这时候Skyrmion的重子数:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{24\pi^2} \int \epsilon_{ijk} \text{Tr}(L_i L_j L_k) dx^3 \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int \epsilon_{ijk} \partial_i \omega \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_j \hat{\mathbf{n}} \times \partial_k \hat{\mathbf{n}}) \sin^2 \frac{\omega}{2} dr^3 \\ &= \frac{1}{\pi} \int \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega. \end{aligned} \quad (21)$$

我们可以看到这里重子数 B 依赖于函数 ω 的边界条件. 在以往的工作中, 人们通常取边界条件:

$$\omega(0) = 2\pi, \quad \omega(\infty) = 0. \quad (22)$$

从而满足重子数 $B = 1$. 从这里我们也可以看出重子数与磁单极拓扑数在数学形式上并不相等, 但它们都描述了skyrmion的某些拓扑性质. 并且skyrmion也可以由磁单极解理解, 在 ω 取不同的边界条件时, 比如 $\omega(0) = 2\pi, \omega(\infty) = \pi$ 或者 $\omega(0) = \pi, \omega(\infty) = 0$ 可以得到重子数为1/2能量发散的skyrmion解, 分别在空间无穷远处以及原点处包含了一个磁单极, 这也是为什么它们的能量是发散的. 这些结果告诉我们, 常规的skyrmion解实际上内嵌有磁单极, 磁单极场 $\hat{\mathbf{n}}$ 与标量场 $\omega(r)$ 的相互作用消除了磁单极带来的发散性质.

另一方面, 当场 $\omega(r)$ 在零点处的边界条件取为 $\omega(0) = 2n\pi$, 这就使得式(21)中的重子数为 $B = n$. 通过求解, 此时系统的能量为^[10]

$$E_n \simeq \frac{n(n+1)}{2} E_1. \quad (23)$$

因此在物理上, 该边界条件给出的结果不能很好地用来解释原子核. 原子核中由于核子间结合能的存在, skyrmion能量需要满足要求:

$$E_B < B \cdot E_1. \quad (24)$$

因此, $\omega(0) = 2n\pi$ 解可以认为是基态skyrmion的激发态, 这也是我们称呼 $U(1)$ 参数 n 为径向激发量子数的原因.

前面我们只讨论了单位磁单极荷情况下的重子数在 $\omega(r)$ 场不同边界条件下的情况, 事实上

我们也可以推广到任意磁单极荷 $M = m$. 这主要是因为 $S^3 \simeq S^2 \times S^1$, 因此重子数拓扑 $\pi_3(S^3)$ 可以进一步分解为 $\pi_2(S^2)$ 和 $\pi_1(S^1)$, 分别描述了场 $\hat{\mathbf{n}}$ 的磁单极拓扑和 $\omega(r)$ 场的壳层拓扑. 具体可以表示为 $\pi_3(S^3) \simeq \pi_2(S^2) \times \pi_1(S^1)$, 重子数为

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{8\pi^2} \int \epsilon_{ijk} \partial_i \omega \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_j \hat{\mathbf{n}} \times \partial_k \hat{\mathbf{n}}) \sin^2 \frac{\omega}{2} dr^3 \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int \sin^2 \frac{\omega}{2} \frac{d\omega}{dx^i} \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_j \hat{\mathbf{n}} \times \partial_k \hat{\mathbf{n}}) dx^j dx^k \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \int \hat{\mathbf{n}} \cdot (d\hat{\mathbf{n}} \wedge d\hat{\mathbf{n}}) = mn, \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $\omega = \omega(x^i)$, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(x^i)$, 磁单极荷为 m , 壳层拓扑数为 n . 当然这里 $B = mn$ 的 skyrmion 可以是不稳定的, 在一定程度上可以认为是高重子数原子核的激发态, 它们可以衰变到 $n = 1$, $B = m$ 的基态. 但是由于拓扑性质的存在, 这些 skyrmion 的衰变也必须满足拓扑荷守恒的性质, 即磁单极荷和壳层拓扑荷必须分别守恒. 对于前面我们提到的 BPS Skyrme 模型, 由于 Bogomol'nyi 条件的存在系统束缚能为零, 能量满足 $E_B = BE_1$. 因此可以认为 BPS 模型中壳层拓扑数大于 1 的解是稳定的.

4 BPS Skyrme 模型中的 $n > 1$ 的解

让我们回到 BPS Skyrme 模型拉氏量(16), 在此引入测地投影 [23]:

$$\begin{aligned} U &= e^{i\xi \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\tau}}, \\ \hat{\mathbf{n}} &= \frac{1}{1+|u|^2} \begin{pmatrix} u + \bar{u} \\ -i(u - \bar{u}) \\ |u|^2 - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $\hat{\mathbf{n}}$ 为磁单极场, $\xi = \frac{\omega}{2}$. 由此可以得到运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2 \sin^4 \xi}{(1+|u|^2)^4} \partial_\mu (\sin^2 \xi H^\mu) - \mu^2 V_\xi &= 0, \\ \partial_\mu \left(\frac{K^\mu}{(1+|u|^2)^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $V_\xi = \partial_\xi V$, 并且

$$\begin{aligned} H_\mu &= \frac{\partial(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \xi_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2}{\partial \xi^\mu}, \\ K_\mu &= \frac{\partial(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \xi_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2}{\partial \bar{u}^\mu}. \end{aligned} \quad (28)$$

在球对称条件下, 函数满足

$$\xi = \xi(r), \quad u(\theta, \phi) = g(\theta) e^{im\phi}. \quad (29)$$

关于函数 u 的运动方程可以简化为

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \left(\frac{g^2 g_\theta}{(1+g^2)^2 \sin \theta} \right) - \frac{g g_\theta^2}{(1+g^2)^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (30)$$

方程存在解析解:

$$g(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (31)$$

此时磁单极场即为我们前面讨论的简单情况 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$, 可以看出式(29)中常数 m 即为磁单极荷. 此外标量场 $\xi(r)$ 的运动方程为

$$\frac{m^2 \lambda^2 \sin^2 \xi}{2r^2} \partial_r \left(\frac{\sin^2 \xi \xi_r}{r^2} \right) - \mu^2 V_\xi = 0. \quad (32)$$

该方程可以进一步简化, 在一定的相互作用势的条件下, 方程存在 compacton 解 [23, 24].

同时由于 BPS Skyrme 模型可以满足 Bogomol'nyi 条件, 因此存在一阶微分方程. 根据式(26), 我们可以得到 BPS Skyrme 模型的能量积分函数

$$\begin{aligned} E &= \int dx^3 \left(\frac{\lambda^2 \sin^4 \xi}{(1+|u|^2)^4} (\epsilon^{mnl} i \xi_m u_n \bar{u}_l)^2 + \mu^2 V \right) \\ &= \int dx^3 \left(\frac{\lambda \sin^2 \xi}{(1+|u|^2)^2} (\epsilon^{mnl} i \xi_m u_n \bar{u}_l) \pm \mu \sqrt{V} \right)^2 \\ &\quad \mp \int dx^3 \frac{2\mu \lambda \sin^2 \xi \sqrt{V}}{(1+|u|^2)^2} (\epsilon^{mnl} i \xi_m u_n \bar{u}_l) \\ &\geq \mp \int dx^3 \frac{2\mu \lambda \sin^2 \xi \sqrt{V}}{(1+|u|^2)^2} (\epsilon^{mnl} i \xi_m u_n \bar{u}_l) \\ &= \pm (2\lambda \mu \pi^2) \left[\frac{-i}{\pi^2} \int dx^3 \frac{\sin^2 \xi \sqrt{V}}{(1+|u|^2)^2} (\epsilon^{mnl} i \xi_m u_n \bar{u}_l) \right] \\ &= 2\lambda \mu \pi^2 C_1 B, \end{aligned} \quad (33)$$

其中, B 为重子数, C_1 为积分常数. 在 Bogomol'nyi 条件下, 能量最低的解满足一阶微分 BPS 方程:

$$\frac{\lambda \sin^2 \xi}{(1+|u|^2)^2} (\epsilon^{mnl} i \xi_m u_n \bar{u}_l) = \mp \mu \sqrt{V}. \quad (34)$$

通过条件(29), 方程(34)可以简化为

$$\frac{m\lambda}{2r^2} \sin^2 \xi(r) \xi'(r) = \mp \mu \sqrt{V}. \quad (35)$$

因此比较式(32)和(35), 可以发现运动方程(32)实际上是BPS方程(34)的平方形式. 通过无量纲化 $r \rightarrow \sqrt[3]{\frac{\mu}{\lambda}}r$, 方程可以简化为

$$\int m \frac{\sin^2 \xi}{\sqrt{V(\xi)}} d\xi = \int 2r^2 dr. \quad (36)$$

通过选取一定的相互作用势 $V(\xi)$, 可以严格求解上述方程. 根据拓扑边界条件, 通常取为

$$V = \frac{1}{2}Tr(1 - U) = 1 - \cos \xi. \quad (37)$$

在此条件下可以得到解为

$$\cos^3 \frac{\xi}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4n} r^3 + c_0, \quad (38)$$

其中, c_0 是积分常数, 并满足 $c_0 = \cos^3 \frac{\xi(r=0)}{2}$. 由此, 重子数可以表示为

$$\begin{aligned} B &= \frac{2m}{\pi} \int \sin^2 \xi \xi' dr = \frac{2m}{\pi} \int \mathcal{B} dr \\ &= \frac{m}{\pi} \left(\xi - \frac{1}{2} \sin(2\xi) \right) \Big|_{\xi(0)}^{\xi(\infty)}. \end{aligned} \quad (39)$$

在边界条件

$$\xi(0) = n\pi, \quad \xi(\infty) = 0, \quad (40)$$

重子数表示为 $B = mn$, 其中 m 为磁单极拓扑数, n 为壳层拓扑数. 同时根据Bogomol'nyi条件, 系统能量可以表示为

$$\begin{aligned} E &= 4\pi\lambda\mu \int \mathcal{E} dr = 4\pi\lambda\mu \int \left(\frac{n^2 \sin^4 \xi}{4r^4} + V \right) r^2 dr \\ &= 8\pi\lambda\mu \int V r^2 dr. \end{aligned} \quad (41)$$

由于三角函数的特殊性质, 这里我们只讨论 $n = 1, 2$ 情况下的解. 当 $n = 1$, 我们有

$$\xi(r) = \begin{cases} 2 \arccos \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4n} r^3}, & r \in [0, \sqrt{2}\sqrt[3]{m}], \\ 0, & r \geq \sqrt{2}\sqrt[3]{m}. \end{cases} \quad (42)$$

相应的能量为

$$E = \frac{64\sqrt{2}}{15} \pi m \mu \lambda. \quad (43)$$

图1中的曲线分别是函数 ξ , 相应BPS skyrmion的能量密度 $\mathcal{E}$ 以及重子数密度 $\mathcal{B}$ 的曲线, $\mathcal{E}, \mathcal{B}$ 分别由式(41)和(39)定义.

当 $n = 2$, 我们有

$$\xi(r) = \begin{cases} 2 \arccos \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4n} r^3 - 1}, & r \in [0, \sqrt{2}\sqrt[3]{2m}], \\ 0, & r \geq \sqrt{2}\sqrt[3]{2m}. \end{cases} \quad (44)$$

相应的能量为 $E = \frac{128\sqrt{2}}{15} \pi m \mu \lambda$, 解的具体情况如图2.

从图2中我们可以看出壳层拓扑数 $n = 2$ 的解在壳层 $n = 1$ 对应的位置处能量密度和重子数密度曲线有很大的变化. 进一步可以分析壳层拓扑数 $n = 2$ 的解在坐标 $r = \sqrt{2}\sqrt[3]{m}$ 处的性质, 该空间坐标对应于壳层数 $n = 1$ BPS skyrmion 解的右边界. 不难发现从原点到该处系统的能量积分值为

$$E_{21} = 8\pi\lambda\mu \int_0^{\sqrt{2}\sqrt[3]{m}} V(r) r^2 dr = \frac{64\sqrt{2}}{15} \pi m \mu \lambda. \quad (45)$$

这刚好对应于壳层拓扑 $n = 1$ 的skyrmion解的总能量. 同时从 $r = \sqrt{2}\sqrt[3]{m}$ 到边界的 $r = \sqrt{2}\sqrt[3]{2m}$ 系统所具有的能量为

$$E_{22} = \frac{64\sqrt{2}}{15} \pi m \mu \lambda. \quad (46)$$

图1 (网络版彩图)磁单极数 $m = 1$ 壳层数 $n = 1$ 的BPS skyrmion解, 其中实线对应于标量场 ξ , 虚线为能量密度 $\mathcal{E}$, 点虚线为重子数密度 $\mathcal{B}$. 图中横坐标为 r , 其单位为 $\sqrt[3]{u/\lambda}$

Figure 1 (Color online) The BPS skyrmion solution with monopole number $m = 1$ and shell number $n = 1$, the solid line, dashed line and dotdashed line correspond to the solutions of scalar field ξ , energy density $\mathcal{E}$ and baryon charge density $\mathcal{B}$, respectively. The dimensionless abscissa r is in the unite of $\sqrt[3]{u/\lambda}$.

图 2 (网络版彩图)磁单极数 $m = 1$ 壳层数 $n = 2$ 的BPS skyrmion解, 其中实线对应于标量场 ξ , 虚线为能量密度 ε , 点虚线为重子数密度 $\mathcal{B}$. 图中横坐标为 r , 其单位为 $\sqrt[3]{u/\lambda}$

Figure 2 (Color online) The BPS skyrmion solution with monopole number $m = 1$ and shell number $n = 2$, the solid line, dashed line and dotdashed line correspond to the solutions of scalar field ξ , energy density ε and baryon charge density $\mathcal{B}$, respectively. The dimensionless abscissa r is in the unite of $\sqrt[3]{u/\lambda}$.

这说明对于 $n = 2$ 的解, 存在两个壳层结构. 在每一个壳层上分别具有重子数 $B = m$ 的核子, 这与核物理中壳层模型具有相似的性质.

5 结论

Skyrme模型是强相互作用的低能有效模型, 在核物理中该模型的解skyrmion可以用来构造原子核. 从QCD出发研究了磁单极在Skyrme模型中的物理意义, 分析了磁单极拓扑与skyrmion重子数拓扑之间的关系, 进一步阐述了重子数拓扑可以分解为磁单极拓扑数和壳层拓扑数. 由于空间 S^3 可以近似的表示为 $S^3 \simeq S^2 \times S^1$, 因此描述重子数拓扑的同伦映射 $\pi_3(S^3)$ 可以分解为 $\pi_2(S^2) \times \pi_1(S^1)$, 这说明重子数拓扑具有内在的结构. Duan-Ge-Cho规范场分解理论告诉我们Skyrme模型实际上是QCD的一个等效模型. 因此我们可以从QCD出发理解Skyrme模型中的一些物理问题. 通常人们认为Skyrmion只具有 $\pi_3(S^3)$ 重子数拓扑, 然而在QCD中最基本的拓扑

孤立子却是磁单极. 磁单极在QCD起着极为重要的角色, 色禁闭现象可以通过磁单极凝聚形成QCD真空来解释; 而Skyrme模型是QCD低能有效模型, 因此磁单极子在Skyrme模型中也应该有重要的物理内容. 然而磁单极拓扑 $\pi_2(S^2)$ 在Skyrme模型中少有讨论, 这主要是由于决定skyrmion拓扑性质的场 U 只能定义 $\pi_3(S^3)$ 拓扑. 从Duan-Ge-Cho规范势分解理论出发, 场 $\hat{n}$ 描述规范场的磁单极拓扑性质. 根据QCD与Skyrme模型的关系我们认为skyrmion也应该具有内在的磁单极拓扑. 事实上通过磁单极子, 我们可以更好地理解Skyrme模型中的许多物理. 比如baby skyrmion可以认为是有磁单极-反磁单极对形成的涡旋, 扭结可以认为是螺旋磁单极-反磁单极涡旋环形成的稳定拓扑孤立子, 而skyrmion则可以认为是内嵌的磁单极子与标量场 ω 相互作用形成的有限能量孤立子解.

通过重子数拓扑分解可以进一步研究Skyrme模型中新的物理解. 在标准的Skyrme模型中对于壳层拓扑数 $n > 1$ 的解, skyrmion 能量具有关系 $E_n \simeq n(n+1)E_1/2$. 这并不满足原子核中核子间束缚能的要求, 即 $E_n < nE_1$, 因此对于 $n > 1$ 的解skyrmion也被认为是激发态. 激发态可以衰变到基态, 但是根据拓扑守恒性质, 这些skyrmion的衰变并不是任意的, 必须满足磁单极拓扑荷和壳层拓扑守恒关系. 鉴于束缚能的问题, 我们进一步研究了BPS Skyrme模型中的壳层拓扑荷大于1的解. BPS模型由于满足Bogomol'nyi条件, 因此是无束缚能系统, skyrmion的能量正比于重子数. 在本文中我们求解了壳层数 $n = 1, 2$, 磁单极拓扑数为 m 重子数为 $B = mn$ 的BPS skyrmion解. 在 $n = 2$ 的解中我们确实发现了系统可以通过两个壳层来理解, 并且每个壳层具有 m 个重子, 能量相同. 这与核物理中的壳模型类似, 当然也不完全等同. 我们也希望进一步通过这些性质讨论原子核、核物质以及中子星的相关物理.

参考文献

- 1 Skyrme T H R. A non-linear field theory. *Proc R Soc A-Math Phys Eng Sci*, 1961, 260: 127–138; Particle states of a quantized meson field. *Proc*

- [R Soc A-Math Phys Eng Sci](#), 1961, 262: 237–245; A unified field theory of mesons and baryons. [Nucl Phys](#), 1962, 31: 556–569
- 2 Verbaarschot J J M, Walhout T S, Wambach J, et al. Symmetry and quantization of the two-skyrmion system: The case of the deuteron. [Nucl Phys A](#), 1987, 468: 520–538
- 3 Braaten E, Carson L. Deuteron as a toroidal Skyrmion. [Phys Rev D](#), 1988, 38: 3525–3539
- 4 Houghton C J, Manton N S, Sutcliffe P M. Rational maps, monopoles and skyrmions. [Nucl Phys B](#), 1998, 510: 507–537
- 5 Battye R A, Sutcliffe P M. Solitonic fullerene structures in light atomic nuclei. [Phys Rev Lett](#), 2001, 86: 3989–3992; Skyrmions, fullerenes and rational maps. [Rev Math Phys](#), 2002, 14: 29–85
- 6 Piette B M A G, Probert G I. Towards skyrmion stars: Large baryon configurations in the Einstein-Skyrme model. [Phys Rev D](#), 2007, 75: 125023
- 7 Feist D T J, Lau P H C, Manton N S. Skyrmions up to baryon number 108. [Phys Rev D](#), 2013, 87: 085034
- 8 Cho Y M. Monopoles and knots in Skyrme theory. [Phys Rev Lett](#), 2001, 87: 252001
- 9 Cho Y M, Park B S, Zhang P M. New interpretation of Skyrme theory. [Int J Mod Phys A](#), 2008, 23: 267–298
- 10 Cho Y M, Kimm K, Yoon J H, et al. New topological structures of Skyrme theory: Baryon number and monopole number. [Eur Phys J C](#), 2017, 77: 88
- 11 Cho Y M. Restricted gauge theory. [Phys Rev D](#), 1980, 21: 1080–1088
- 12 Cho Y M. Glueball spectrum in extended quantum chromodynamics. [Phys Rev Lett](#), 1981, 46: 302–306
- 13 Duan Y S, Ge M L. SU(2) gauge theory and electrodynamics with N magnetic monopoles (in Chinese). *Sci Sin*, 1979, 9: 1072–1081 [段一士, 葛墨林. SU(2)规范理论与 N 个磁单极运动体系的电动力学. 中国科学, 1979, 9: 1072–1081]
- 14 Cho Y M. Colored monopoles. [Phys Rev Lett](#), 1980, 44: 1115–1118
- 15 Zou L P, Pak D G, Zhang P M. Monopoles without magnetic charges: Finite energy monopole-antimonopole configurations in CP^1 model and restricted QCD. [Phys Lett B](#), 2014, 728: 650–657
- 16 Zou L P, Zhang P M, Pak D G. Knot topology in QCD. [Phys Lett B](#), 2013, 726: 436–443
- 17 Manton N S, Piette B M A G. Understanding Skyrmions using rational maps. In: Casacuberta C, Miró-Roig R M, Verdera J, et al., eds. *European Congress of Mathematics. Progress in Mathematics*, vol 201. Basel: Birkhäuser, 2001
- 18 Marleau L. The Skyrme model and higher order terms. [Phys Lett B](#), 1990, 235: 141–146
- 19 Gudnason S B, Nitta M. A higher-order Skyrme model. [J High Energy Phys](#), 2017, 2017: 28
- 20 Battye R A, Sutcliffe P M. Symmetric skyrmions. [Phys Rev Lett](#), 1997, 79: 363–366
- 21 Battye R A, Sutcliffe P M. Skyrmions and the pion mass. [Nucl Phys B](#), 2005, 705: 384–400
- 22 Battye R A, Sutcliffe P M. Skyrmions with massive pions. [Phys Rev C](#), 2006, 73: 055205
- 23 Adam C, Sánchez-Guillén J, Wereszczyński A. BPS Skyrme model and baryons at large N_c . [Phys Rev D](#), 2010, 82: 085015
- 24 Adam C, Naya C, Sanchez-Guillen J, et al. Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield Skyrme model and nuclear binding energies. [Phys Rev Lett](#), 2013, 111: 232501
- 25 Bonenfant E, Marleau L. Nuclei as near BPS Skyrmions. [Phys Rev D](#), 2010, 82: 054023
- 26 Adam C, Naya C, Sanchez-Guillen J, et al. BPS Skyrmions as neutron stars. [Phys Lett B](#), 2015, 742: 136–142
- 27 Cundy N, Cho Y M, Lee W, et al. The static quark potential from the gauge invariant Abelian decomposition. [Phys Lett B](#), 2014, 729: 192–198
- 28 Cho Y M, Pham X Y, Zhang P M, et al. Glueball physics in QCD. [Phys Rev D](#), 2015, 91: 114020
- 29 Nedelko S N, Voronin V E. Domain wall network as QCD vacuum and the chromomagnetic trap formation under extreme conditions. [Eur Phys J A](#), 2015, 51: 45

The topological structures in Skyrme model

ZOU LiPing* & ZHANG PengMing*

Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China

In this paper, we study the new topological structures in Skyrme model. Besides the baryon topology $\pi_3(S_3)$, monopole topology $\pi_2(S^2)$ and shell topology (radial number) $\pi_1(S^1)$ are also investigated. Skyrme model is an effective model of quantum chromodynamics (QCD) at low energy, which could be understood from QCD lagrangian with Duan-Ge-Cho decomposition theory. With this and the the monopole topology in QCD, we discuss the decomposition of baryon topology in standard Skyrme model and Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) Skyrme model. New BPS skyrmion solutions are shown with different monopole topology and shell topology.

Skyrme model, skyrmion baryon topology, skyrmion monopole topology, skyrmion shell topology, BPS Skyrme model

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Jp, 67.40.Vs, 74.72.-h

doi: [10.1360/SSPMA2018-00175](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00175)