$\mathbb{R}^3$ 上分数阶 Kirchhoff 方程正解的多重性及集中性

顾光泽^{1,2}, 吴鲜¹, 余渊洋¹, 赵富坤^{1*}

1. 云南师范大学数学学院, 昆明 650500;

2. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083

E-mail: guangzegu@163.com, wuxian2042@163.com, yyysx43@163.com, fukunzhao@163.com

收稿日期: 2017-10-14; 接受日期: 2018-01-24; 网络出版日期: 2018-08-15; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11661083 和 11771385) 和云南省中青年学术与技术带头人后备人才计划 (批准号: 2015HB028) 资助项目

摘要 本文考虑如下分数阶 Kirchhoff 方程:

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy\right) (-\Delta)^s u(x) + V(x)u = f(u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

其中 $M(t) = \varepsilon^{2s}a + \varepsilon^{4s-3}bt$ 是 Kirchhoff 函数, $\frac{3}{4} < s < 1$, $\varepsilon > 0$ 是小参数, 位势 V 是正连续函数且有全局极小, 非线性项 f 连续且在无穷远处次临界增长. 利用 Ljusternik-Schnirelmann 畴数理论, 本文得到了正解个数与位势 V 全局极小集拓扑之间的关系, 证明了当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 这些正解在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中收敛到极限方程的基态解, 且这些解集中在位势 V 的全局极小附近. 此外也得到了了解的衰减估计.

关键词 分数阶 Kirchhoff 方程 Ljusternik-Schnirelmann 畴数理论 集中性 变分方法

MSC (2010) 主题分类 35R11, 35A15, 35B40, 47G20

1 引言

本文考虑如下分数阶 Kirchhoff 方程正解的多重性和集中行为:

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy\right) (-\Delta)^s v(x) + V(x)v = f(v), & x \in \mathbb{R}^3, \\ v \in H^s(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (1.1)$$

英文引用格式: Gu G Z, Wu X, Yu Y Y, et al. Multiplicity and concentration behavior of positive solutions for a fractional Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^3$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 39–72, doi: 10.1360/SCM-2017-0704

其中 $M(t) = \varepsilon^{2s}a + \varepsilon^{4s-3}bt$ 是 Kirchhoff 函数, $\varepsilon > 0$ 是小参数, $a, b > 0$, $\frac{3}{4} < s < 1$, 位势 V 是正连续函数, 非线性项 f 在无穷远处超 3 次但次临界增长. $(-\Delta)^s$ 是阶数为 s 的分数阶 Laplace 算子, 它可由 Fourier 变换定义为 $(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u)$.

如果 $s = \varepsilon = 1$, $V(x) = 0$ 并且分别用有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 和 $f(x, u)$ 替换 $\mathbb{R}^3$ 和 $f(u)$, 则方程 (1.1) 退化为如下带有 Dirichlet 边值条件的 Kirchhoff 型问题:

$$\begin{cases} -M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $a, b > 0$, $M(t) = a + bt$. 由于非局部项 $M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)$ 的出现, 从而使得方程 (1.2) 不再在逐点意义下成立, 像这样的问题被称为非局部问题. 需要指出, 这种类型的非局部问题也常见于其他领域如生态学中, 其中 u 表示某一种依赖于自生平均密度的过程 (如人口密度), 参见文献 [1, 2] 及其参考文献. 当 $a = 0$ 和 $b > 0$ 时, 方程 (1.1) 称为“退化的”; 当 $a > 0$ 和 $b > 0$ 时, 方程 (1.1) 称为“非退化的” (参见文献 [2, 3]).

另一方面, 方程 (1.2) 与 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

的稳态解有关. 问题 (1.3) 是由 Kirchhoff^[4] 提出的经典的 D'Alembert 波动方程的一个推广:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{p_0}{\lambda} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, u),$$

Kirchhoff 的模型考虑了弦的横向振动. Bernstein 首次在文献 [5] 中证明了问题 (1.3) 当 $n = 1$ 时的全局可解性. Pohožaev^[6] 将此结果推广到 $n \geq 1$ 的情形. 自从 Lions 在文献 [7] 中建立了方程 (1.3) 的泛函分析框架之后, 方程 (1.3) 开始受到广泛关注. 例如, 文献 [2] 建立了方程 (1.3) 退化情形的全局可解性. 自文献 [8] 建立问题 (1.2) 的变分框架之后, 出现了一系列利用不同变分技巧研究问题 (1.2) 非平凡解的存在性的工作, 参见文献 [9–16] 及其参考文献.

当 $s = 1$ 时, 方程 (1.1) 退化为如下 Kirchhoff 方程:

$$\begin{cases} -\left(\varepsilon^2 a + \varepsilon b \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + V(x)u = f(u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (1.4)$$

近年来, 当 $\varepsilon = 1$ 时, 在问题 (1.4) 解的存在性和多重性方面出现了一系列有意义的结果. 例如, Li 和 Ye 在文献 [17] 中获得了方程 (1.4) 正基态解的存在性, 其中 $f(u) = |u|^{p-1}u$, $p \in (2, 5)$. 在 V 和 f 关于 x 径向对称的条件下, Deng 等^[10] 研究了方程 (1.4) 节点解的存在性及当 $b \rightarrow 0^+$ 时节点解的渐近行为. 关于方程 (1.4) 的解在 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时的集中行为也有一些结果. 例如, He 和 Zou^[18] 利用 Ljusternik-Schnirelmann 畴数理论^[19] 研究了方程 (1.4) 正解的多重性和集中现象, 他们证明了当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 正解集中在 $V(x)$ 的全局极小附近. 关于临界情形 $f(u) = \lambda g(u) + |u|^4 u$ 的类似结果可参见文献 [20, 21], 其中 $g(u) \sim |u|^{p-2}u$, $4 < p < 6$. 如果位势 V 具有局部极小, Figueiredo 和 Santos Júnior^[22] 证明了在次临界情形下, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时有一族正解集中在 V 的局部极小附近. He 等^[23] 则考虑了临界情

形 $f(u) = g(u) + |u|^4 u$, 其中 $g(u) \sim |u|^{p-2} u$ ($4 < p < 6$), 证明了当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时一族正解集中在 V 的局部极小点处. 带有更一般 Kirchhoff 函数的 Kirchhoff 型方程解的集中现象参见文献 [24]. 关于 $f(u) = \lambda|u|^{p-2} u + |u|^4 u$ ($2 < p \leq 4$) 的情形参见文献 [25], 该文献证明了当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时有一族正解集中在 V 的局部极小附近.

当 $b = 0$ 时, 方程 (1.1) 变形为如下分数阶 Schrödinger 方程:

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

方程 (1.5) 与如下分数阶 Schrödinger 方程的驻波解有关:

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \psi + V(x)\psi - f(|\psi|), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

该方程是分数阶量子力学中的基本方程 (参见文献 [26]). 不同于经典的 Laplace 算子, 算子 $(-\Delta)^s$ 的非局部性妨碍我们直接把经典椭圆偏微分方程的理论应用到方程 (1.5) 上. 为克服这一困难, Caffarelli 和 Silvestre [27] 发展了一种延拓方法, 将非局部问题转化为相应的上半空间上的局部问题. 最近, Di Nezza 等 [28] 系统发展了分数阶 Sobolev 空间和分数阶 Laplace 方程的一些基本理论, 为应用变分方法研究分数阶微分方程提供了更便捷的空间框架. 当 $\varepsilon = 1$ 时, Niu 和 Tang [29] 获得了方程 (1.5) 基态解的存在性. Dávila 等 [30] 应用 Lyapunov-Schmidt 约化方法研究了非线性分数阶 Schrödinger 方程 (1.5) 解的集中现象. 对于位势 V 有局部极小的情形, 文献 [31, 32] 分别在次临界情形和临界情形研究了解的集中现象.

最近, Fiscella 和 Valdinoci [33] 在有界区域上研究了一类具有物理意义的分数阶 Kirchhoff 方程. 在位势 V 强制的情形, Pucci 等 [34] 考虑了 Schrödinger-Kirchhoff 型的非齐次分数阶 p -Laplace 方程, 他们利用 Ekeland 变分原理和山路定理获得了多重解的存在性. Caponi 和 Pucci [35] 研究了带有一般 Kirchhoff 函数的问题, 包括退化情形 (Kirchhoff 函数 $M(0) = 0$), 建立了非平凡解的存在性和渐近行为. 文献 [36, 37] 中则处理了带有临界项的 Kirchhoff 型问题. 更多结果参见文献 [38] 和专著 [39].

自然地, 我们要问, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 问题 (1.1) 的解有何集中现象? 以及位势如何影响解的多重性? 本文主要研究上述两个问题. 为陈述我们的主要结果, 作如下假设:

(V) $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 且

$$0 < V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) < V_\infty := \lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x).$$

(f₁) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 当 $t \rightarrow 0$ 时, $f(t) = o(t^3)$, 且 $f(t) = 0, t \leq 0$.

(f₂) 存在 $4 < q < 2_s^* = \frac{6}{3-2s}$, 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$.

(f₃) 存在 $\mu > 4$, 使得

$$0 < \mu F(t) = \mu \int_0^t f(s) ds \leq f(t)t, \quad \forall t > 0.$$

(f₄) $\frac{f(t)}{t^3}$ 和 $f(t)t - 4F(t)$ 在 $(0, \infty)$ 上为增函数.

为了研究方程 (1.1) 解的个数与位势 V 极小集拓扑之间的关系, 定义集合

$$\Lambda := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = V_0\} \quad \text{和} \quad \Lambda_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \Lambda) \leq \delta\}, \quad \forall \delta > 0.$$

不失一般性, 设 $0 \in \Lambda$. 根据假设 (V) 可知, Λ 是紧的. 我们将利用 Ljusternik-Schnirelmann 畴数理论研究解的多重性. 为此, 先回顾 Ljusternik-Schnirelmann 畴数 (参见文献 [19]). 设 X 是一个拓扑空间,

$A \subset X$ 闭. 称那些能覆盖 A 且在 X 中可收缩的闭子集的最小个数 k 为 A 的 Ljusternik-Schnirelmann 畴数, 记为 $\text{cat}_X(A)$. 若不存在这样的 k , 则令 $\text{cat}_X(A) = +\infty$. 本文主要结果如下.

定理 1.1 设 $\frac{3}{4} < s < 1$, (V) 和 $(f_1)-(f_4)$ 成立, 则

- (i) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\varepsilon_\delta > 0$, 使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, 问题 (1.1) 至少有 $\text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda)$ 个正解;
- (ii) 设 $\bar{v}_\varepsilon$ 为上述正解, 则 $\bar{v}_\varepsilon$ 有一个全局极大值点 $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^3$, 使得 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(\eta_\varepsilon) = V_0$;
- (iii) 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_\varepsilon := \bar{v}_\varepsilon(\varepsilon x + \eta_\varepsilon) \rightarrow u$, 其中 u 是如下极限问题的基态解:

$$\begin{cases} M \left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s v(x) + V_0 v = f(v), & x \in \mathbb{R}^3, \\ v \in H^s(\mathbb{R}^3); \end{cases}$$

- (iv) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\bar{v}_\varepsilon(x) \leq \frac{C\varepsilon^{3+2s}}{\varepsilon^{3+2s} + |x - \eta_\varepsilon|^{3+2s}}.$$

需要指出, 对于有界的 Palais-Smale 序列 (下简记为 $(PS)_c$ 序列) $\{u_n\}$, 由于非局部项 $M(u)$ 的出现, 一般从 $u_n \rightharpoonup u$ 推不出

$$\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx.$$

因此不能直接验证 I_ε 满足 $(PS)_c$ 条件. 然而, 在 $\varepsilon = 1$ 的情形下, 若方程 (1.4) 相应的工作空间有紧嵌入性质, 则可以克服这个困难, 参见文献 [15]. 但在我们研究的问题中, 工作空间没有紧嵌入性质. 为克服此困难, 受文献 [17] 启发, 我们将建立一个全局紧性引理恢复能量泛函的部分紧性.

为获得多解, 需要利用 Nehari 流形上的约束极小获得相应的极限问题的基态解. 然而, 因为 f 仅连续而非 C^1 函数, 我们不能直接运用 Nehari 流形. 为了克服 Nehari 流形的不可微性, 我们将运用 Szulkin 和 Weth [40] 建立的约化方法. 进而沿用 Benci 和 Cerami [41] 的思想, 我们比较能量泛函某个特定的水平集与位势 V 的全局极小集的 Ljusternik-Schnirelmann 畴数.

获得解的一致 L^∞ 估计是研究解的集中现象关键的一步. 因为分数阶 Laplace 算子 $(-\Delta)^s$ 是非局部的, 故我们研究的问题与带经典 Laplace 算子的椭圆方程有不同之处, 加之 Kirchhoff 项本身又是一个非局部项, 故要对我们的问题建立解的 L^∞ 估计更加复杂. 受文献 [42] 启发, 我们将不利用 Kato 型不等式而是采用基于 Moser 迭代的方法建立解的 L^∞ 估计.

本文中使使用如下记号. 设 $R > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $B_R(x)$ 表示以 x 为心、 R 为半径的球. $L^p(\mathbb{R}^3)$ ($1 \leq p < +\infty$) 表示标准的 Lebesgue 空间, 其范数为 $\|u\|_p = (\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$. 字母 C 和 C_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) 表示正常数 (可能行与行之间不同). “ $\rightarrow$ ” 和 “ $\rightharpoonup$ ” 分别表示在相应空间中的强收敛和弱收敛. $u^+ = \max\{u, 0\}$ 和 $u^- = \min\{u, 0\}$ 分别表示函数 u 的正部和负部.

2 预备知识

定义齐次分数阶 Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{s,2}(\mathbb{R}^3)$ 为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 关于范数

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{s,2}} := [u]_{W^{s,2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall s \in (0, 1)$$

的完备化空间. 分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 定义为

$$H^s(\mathbb{R}^3) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^3) : \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{3}{2}+s}} \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \right\},$$

其上范数为

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^2 := \|u\|_2^2 + [u]_{W^{s,2}}^2.$$

由文献 [28, 命题 3.4 和 3.6] 可知,

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2} C_{3,s} [u]_{W^{s,2}}^2,$$

其中 $\hat{u}$ 表示 u 的 Fourier 变换,

$$C_{3,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 - \cos \xi_1)}{|\xi|^{3+2s}} d\xi \right)^{-1}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

因此, $H^s(\mathbb{R}^3)$ 上的如下三个范数等价 (参见文献 [28]):

$$\begin{aligned} u &\mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx + \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \\ u &\mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^{2s} |\hat{u}|^2 + |\hat{u}|^2) d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \\ u &\mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx + \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

此外, $(-\Delta)^s u$ 定义如下 (参见文献 [28, 引理 3.2]):

$$(-\Delta)^s u = C_{3,s} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{3+2s}} dy = -\frac{C_{3,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{3+2s}} dy. \quad (2.1)$$

众所周知, 当 $2 \leq t \leq 2_s^*$ 时, 嵌入 $H^s(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^3)$ 连续, 当 $2 \leq t < 2_s^*$ 时, 上述嵌入局部紧, 且如下最佳嵌入常数 $S > 0$ (参见文献 [28, 定理 6.2]):

$$S = \inf_{u \in \mathcal{D}^{s,2}(\mathbb{R}^3)} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{2}{2_s^*}}}.$$

为叙述简便, 接下来用 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{H^s}$.

作变换 $u(x) := v(\varepsilon x)$, 则问题 (1.1) 等价于

$$\left(a + b \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s u(x) + V(\varepsilon x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

因此, 只需要研究问题 (2.2) 即可. 考虑到关于位势函数 $V(x)$ 的假设, 引入子空间

$$H_\varepsilon = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u(x)^2 dx < +\infty \right\},$$

这是一个 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u, v)_\varepsilon = a \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{[u(x) - u(y)][v(x) - v(y)]}{|x - y|^{3+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u(x) v(x) dx,$$

相应范数为

$$\|u\|_\varepsilon^2 = (u, u)_\varepsilon = a \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2(x) dx.$$

问题 (2.2) 对应的能量泛函为

$$I_\varepsilon(u) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx. \quad (2.3)$$

由假设可知, $I_\varepsilon \in C^1(H_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$ 且对任意的 $u, \varphi \in H_\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned} \langle I'_\varepsilon(u), \varphi \rangle &= \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right) \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u \varphi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} f(u) \varphi dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

引理 2.1 ^[43] 设 $u \in \mathcal{D}^{s,2}(\mathbb{R}^3)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. 令 $\varphi_r(x) = \varphi(\frac{x}{r})$, $r > 0$, 则在 $\mathcal{D}^{s,2}(\mathbb{R}^3)$ 中, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时,

$$u\varphi_r \rightarrow 0.$$

此外, 如果在以原点为心的某个领域上 $\varphi \equiv 1$, 则在 $\mathcal{D}^{s,2}(\mathbb{R}^3)$ 中, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时,

$$u\varphi_r \rightarrow u.$$

引理 2.2 设 (f₁)–(f₄) 成立, 则

(i) 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $C_\delta > 0$, 使得

$$|f(t)| \leq \delta |t|^3 + C_\delta |t|^{q-1} \quad \text{且} \quad |F(x, t)| \leq \delta |t|^4 + C_\delta |t|^q, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(ii) 存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$, 有 $F(t) \geq C_1 |t|^\mu - C_2 t^2$.

泛函 I_ε 对应的 Nehari 流形为 (参见文献 [19])

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \{u \in H_\varepsilon \setminus \{0\} \mid J_\varepsilon(u) = 0\},$$

其中 $J_\varepsilon(u) = \langle I'_\varepsilon(u), u \rangle$.

接下来将给出一个关于 Nehari 流形 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 性质的引理.

引理 2.3 设 (V) 和 (f₁)–(f₄) 成立, 则

(i) 对任意的 $u \in H_\varepsilon \setminus \{0\}$, 存在唯一的 $t_u > 0$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}_\varepsilon$, 此外, $tu \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 当且仅当 $t = t_u$;

(ii) 对任意的 $u \in \mathcal{N}_\varepsilon$, 存在 $r^* > 0$, 使得 $\|u\|_\varepsilon > r^* > 0$.

证明 (i) 对任意的 $t > 0$, 令

$$\begin{aligned} h_u(t) &:= I_\varepsilon(tu) \\ &= \frac{a}{2} t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 dx \\ &\quad + \frac{b}{4} t^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(tu) dx. \end{aligned}$$

由引理 2.2 知,

$$h_u(t) \geq \frac{t^2}{2} \|u\|_\varepsilon^2 - t^4 C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx - t^q C_2 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q dx.$$

因为 $4 < q < 2_s^*$, 易见对充分小的 $t > 0$, $h_u(t) > 0$. 此外, 由引理 2.2 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$h_u(t) \leq \frac{t^2}{2} \|u\|_\epsilon^2 + \frac{b}{4} t^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - t^\mu C \int_{\mathbb{R}^3} |u|^\mu dx + t^2 C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \rightarrow -\infty.$$

因此, $h_u(t)$ 有最大值, 从而存在 $t_u > 0$, 使得 $h'_u(t_u) = 0$ 和 $t_u u \in \mathcal{N}_\epsilon$. 而 $h'_u(t) = 0$ 等价于

$$\frac{1}{t^2} a \int_{\mathbb{R}^3} (|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 + V(\epsilon x) u^2) dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(tu)}{(tu)^3} u^4 dx.$$

若存在 $t'_u > t_u > 0$, 使得 $t'_u u, t_u u \in \mathcal{N}_\epsilon$, 则

$$\left(\frac{1}{t_u'^2} - \frac{1}{t_u^2} \right) a \int_{\mathbb{R}^3} (|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 + V(\epsilon x) u^2) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{f(t'_u u)}{(t'_u u)^3} - \frac{f(t_u u)}{(t_u u)^3} \right) u^4 dx,$$

上式与假设 (f₄) 矛盾. 这就得到了引理 2.3(i) 的第一个结论. 由 $h'_u(t) = t^{-1} \langle I'_\epsilon(tu), tu \rangle$ 知, 引理 2.3(i) 中的第二个结论成立.

(ii) 对任意的 $u \in \mathcal{N}_\epsilon$, 由引理 2.2 可知,

$$\begin{aligned} 0 &= a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon x) u^2 dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} f(u) u dx \\ &\geq \|u\|_\epsilon^2 - \delta \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx - C_\delta \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q dx \\ &\geq \|u\|_\epsilon^2 - \delta C_1 \|u\|_\epsilon^4 - C_\delta \|u\|_\epsilon^q, \end{aligned}$$

从上式可知, 对任意的 $r^* > 0$, 有

$$\|u\|_\epsilon > r^* > 0. \quad (2.5)$$

证毕. □

引理 2.4 存在 $\alpha, \rho > 0$, 使得

$$c_\epsilon = \inf_{u \in \mathcal{N}_\epsilon} I_\epsilon(u) \geq \inf_{u \in S_\rho} I_\epsilon(u) > 0,$$

其中 $S_\rho = \{u \in H_\epsilon : \|u\|_\epsilon = \rho\}$.

证明 对任意的 $u \in H_\epsilon \setminus \{0\}$, 由引理 2.2 和 Sobolev 嵌入不等式知,

$$\begin{aligned} I_\epsilon(u) &= \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon x) u^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\epsilon^2 - \delta \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx - C_\delta \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q dx \\ &\geq \frac{a}{2} \|u\|_\epsilon^2 - \delta C \|u\|_\epsilon^4 - C_\delta \|u\|_\epsilon^q. \end{aligned}$$

因此, 当 $\rho > 0$ 充分小时, $\inf_{u \in S_\rho} I_\epsilon(u) > 0$. 对任意的 $u \in \mathcal{N}_\epsilon$, 由引理 2.3 可知, $I_\epsilon(u) = \max_{t \geq 0} I_\epsilon(tu)$ 且存在唯一 $t_0 > 0$, 使得 $t_0 u \in S_\rho$. 于是,

$$I_\epsilon(u) \geq I_\epsilon(t_0 u) \geq \inf_{v \in S_\rho} I_\epsilon(v).$$

证毕. □

因 f 仅连续而非 C^1 函数, 故 Nehari 流形不可微. 为此, 我们将运用 Szulkin 和 Weth^[40] 发展的约化方法. 分别用 $\tilde{m}_\varepsilon(u) = t_u u$ 和 $m_\varepsilon = \tilde{m}_\varepsilon|_{S_\varepsilon}$ 来定义映射 $\tilde{m}_\varepsilon : H_\varepsilon \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{N}_\varepsilon$ 和 $m_\varepsilon : S_\varepsilon \rightarrow \mathcal{N}_\varepsilon$, 其中 t_u 来源于引理 2.3 且 $S_\varepsilon = \{u \in H_\varepsilon : \|u\|_\varepsilon = 1\}$ 是 H_ε 中的单位球, 则对任意的 $u \in S_\varepsilon$, 有

$$H_\varepsilon = T_u S_\varepsilon \oplus \mathbb{R}u,$$

其中 $T_u S_\varepsilon := \{v \in H_\varepsilon \mid (u, v)_\varepsilon = 0\}$.

引理 2.5 设 (V) 和 (f₁)-(f₄) 成立, 则如下结论成立:

(A₁) 对任意的 $u \in H_\varepsilon$, 定义 $h_u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $h_u(t) = I_\varepsilon(tu)$, 则存在 $t_u > 0$, 使得在 $(0, t_u)$ 上 $h'_u(t) > 0$; 在 (t_u, ∞) 上 $h'_u(t) < 0$.

(A₂) 存在与 u 无关的 $\tau > 0$, 使得对任意的 $u \in S_\varepsilon$, 有 $t_u \geq \tau$. 此外, 对任意的紧集 $\mathcal{W} \subset S_\varepsilon$, 存在 $C_{\mathcal{W}} > 0$, 使得对任意的 $u \in \mathcal{W}$, 有 $t_u \leq C_{\mathcal{W}}$.

(A₃) 映射 $\tilde{m}_\varepsilon : H_\varepsilon \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{N}_\varepsilon$ 连续且 m_ε 是 S_ε 与 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 之间的一个同胚映射, 其逆映射为

$$m_\varepsilon^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_\varepsilon}.$$

证明 (A₁) 可由引理 2.3 直接推出.

(A₂) 对任意的 $u \in S_\varepsilon$, 由 (A₁) 可知, 存在唯一 $t_u > 0$, 使得 $t_u \mathcal{N}_\varepsilon$, 且

$$t_u \leq t_u + bt_u^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(t_u u) u dx \leq C \delta t_u^3 + C_\delta t_u^{q-1}.$$

从上式可知, 存在与 u 无关的 $\tau > 0$, 使得 $t_u \geq \tau$. 接下来证明第二个结论. 若不然, 则存在序列 $\{u_n\} \subset \mathcal{W}$ 和 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $t_n \rightarrow +\infty$. 由 $\mathcal{W}$ 紧, 不妨设在 H_ε 中 $u_n \rightarrow u \in \mathcal{W}$ 及对任意的 n , 有 $\|u_n\|_\varepsilon \leq C$. 因此,

$$0 \leq \frac{I_\varepsilon(t_n u_n)}{t_n^4} = \frac{1}{t_n^2} \|u_n\|_\varepsilon^2 + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^2 - t_n^{\mu-4} C \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^\mu dx + \frac{C}{2t_n^2} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^2 dx \rightarrow -\infty,$$

矛盾.

(A₃) 注意到 $\tilde{m}_\varepsilon$ 、 m_ε 和 m_ε^{-1} 是有意义的. 事实上, 设 $u_n \in H_\varepsilon \setminus \{0\}$, $u \in H_\varepsilon \setminus \{0\}$, 使得 $u_n \rightarrow u$. 由 (A₂) 可知, 存在 $t_0 > 0$, 使得 $t_n := t_{u_n} \rightarrow t_0$. 由 $t_n u_n \in \mathcal{N}_\varepsilon$, 有

$$t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u_n^2 dx + t_n^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(t_n u_n) t_n u_n dx.$$

由上式, 可得

$$t_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + t_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 dx + t_0^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(t_0 u) t_0 u dx,$$

这就得出 $t_0 u \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 且 $t_u = t_0$. 从而, 在 $H_\varepsilon \setminus \{0\}$ 中, $\tilde{m}_\varepsilon(u_n) \rightarrow \tilde{m}_\varepsilon(u)$.

由引理 2.3 可知, $m_\varepsilon^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_\varepsilon} \in S_\varepsilon$ 是有意义的连续映射. 由

$$m_\varepsilon^{-1}(m_\varepsilon(u)) = m_\varepsilon^{-1}(t_u u) = \frac{t_u u}{t_u \|u\|_\varepsilon}, \quad \forall u \in S_\varepsilon,$$

可知 m_ε 是双射. □

定义泛函 $\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon : H_\varepsilon \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{R}_\varepsilon : S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon(u) = I_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon(u)) \quad \text{和} \quad \mathcal{R}_\varepsilon = \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon|_{S_\varepsilon}. \quad (2.6)$$

引理 2.6 ^[40] 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

(i) $\mathcal{R}_\varepsilon \in C^1(S_\varepsilon, \mathbb{R})$ 且对任意的 $w \in S_\varepsilon$, 有

$$\langle \mathcal{R}'_\varepsilon(w), z \rangle = \|m_\varepsilon(w)\|_\varepsilon \langle I'_\varepsilon(m_\varepsilon(w)), z \rangle, \quad \forall z \in T_w(S_\varepsilon) = \{v \in H_\varepsilon : \langle w, v \rangle = 0\}.$$

(ii) 若 $\{w_n\}$ 是 $\mathcal{R}_\varepsilon$ 的 (PS) 序列, 则 $\{m_\varepsilon(w_n)\}$ 是 I_ε 的 (PS) 序列. 若 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\varepsilon$ 是 I_ε 的有界 (PS) 序列, 则 $\{m_\varepsilon^{-1}(u_n)\}$ 是 $\mathcal{R}_\varepsilon$ 的 (PS) 序列.

(iii) w 是 $\mathcal{R}_\varepsilon$ 的临界点当且仅当 $m_\varepsilon(w)$ 是 I_ε 的非平凡临界点. 此外, $\mathcal{R}_\varepsilon$ 和 I_ε 的临界点是一一对应的. 特别地,

$$c_\varepsilon := \inf_{\mathcal{N}_\varepsilon} I_\varepsilon = \inf_{S_\varepsilon} \mathcal{R}_\varepsilon.$$

利用标准的证明 (参见文献 [19, 40]) 可知下面的引理成立:

引理 2.7 设 (V)、 (f_1) 和 (f_2) 成立, 则

$$c_\varepsilon = \inf_{u \in H_\varepsilon \setminus \{0\}} \max_{t > 0} I_\varepsilon(tu) = \inf_{u \in S_\varepsilon \setminus \{0\}} \max_{t > 0} I_\varepsilon(tu).$$

3 自治问题

本节将研究如下与问题 (2.2) 相关的自治问题:

$$\begin{cases} \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s u(x) + \mu u = f(u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (3.1)$$

的基态解, 其弱解是泛函

$$I_\mu(u) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mu u^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx \quad (3.2)$$

的临界点. 显然 $I_\mu \in C^1(H_\mu, \mathbb{R})$, 且对任意的 $u, \varphi \in H_\mu$, 有

$$\langle I'_\mu(u), \varphi \rangle = \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right) \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mu u \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u) \varphi dx,$$

其中 $H_\mu := H^s(\mathbb{R}^3)$, 其上范数为

$$\|u\|_\mu^2 = a \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mu u^2(x) dx.$$

泛函 I_μ 相应的 Nehari 流形为

$$\mathcal{M}_\mu := \{u \in H_\mu \setminus \{0\} : \langle u \rangle = 0\}.$$

记问题 (3.2) 的最小能量为

$$m_\mu := \inf_{u \in \mathcal{M}_\mu} I_\mu(u).$$

易见, m_μ 和流形 $\mathcal{M}_\mu$ 的性质类似于上节中 c_ε 和 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 的性质. 因此, 对任意的 $u \in H_\mu \setminus \{0\}$, 存在唯一的 $t_u > 0$, 使得 $t_u u \in \mathcal{M}_\mu$. 注意到 $S_\mu = \{u \in H_\mu : \|u\|_\mu = 1\}$ 以及对任意的 $u \in S_\mu$, 有 $H_\mu = T_u S_\mu \oplus \mathbb{R}u$, 其中 $T_u S_\mu := \{v \in H_\mu \mid (u, v)_\mu = 0\}$. 定义映射 $\tilde{m}_\mu : H_\mu \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{M}_\mu$ 为 $\tilde{m}_\mu(u) = t_u u$, 令 $m_\mu = \tilde{m}_\mu|_{S_\mu}$. 此外, 类似引理 2.5 可知, m_μ 的逆映射为 $m_\mu^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_\mu}$.

定义泛函 $\tilde{R}_\mu : H_\mu \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{R}_\mu(u) = E_\mu(\tilde{m}_\mu(u)) \quad \text{和} \quad R_\mu = \tilde{R}_\mu|_{S_\mu}.$$

泛函 R_μ 的性质类似于引理 2.6 所述. 此外,

$$m_\mu = \inf_{u \in S_\mu} R_\mu(u) = \inf_{u \in H_\mu \setminus \{0\}} \max_{t > 0} I_\mu(tu) = \inf_{u \in S_\mu \setminus \{0\}} \max_{t > 0} I_\mu(tu). \quad (3.3)$$

注 3.1 易验证映射 $\mu \mapsto m_\mu$ 关于 $\mu > 0$ 是递增的. 此外, 对任意的 $u \in H_\varepsilon$, $I_\varepsilon(u) \geq I_{V_0}(u)$, 且由 c_ε 的性质可知 $c_\varepsilon \geq m_{V_0}$, $\forall \varepsilon > 0$.

如下引理说明泛函 I_μ 具有山路几何结构.

引理 3.1 泛函 I_μ 具有如下性质:

- (i) 存在 $\alpha, \rho > 0$, 使得当 $\|u\|_\mu = \rho$ 时, $I_\mu(u) \geq \alpha$;
- (ii) 存在 $e \in H_\mu \setminus \overline{B_\rho(0)}$, 使得 $I_\mu(e) < 0$.

证明 (i) 对任意的 $u \in H_\mu \setminus \{0\}$, 由引理 2.2 和 Sobolev 嵌入不等式知,

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mu u^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\mu^2 - \delta \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx - C_\delta \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\mu^2 - \delta C \|u\|_\mu^4 - C_\delta \|u\|_\mu^q. \end{aligned}$$

因此, 可取 $\rho > 0$, 使得当 $\|u\|_\mu = \rho$ 时, $I_\mu(u) \geq \alpha$.

(ii) 由引理 2.2 知, 对固定的 $u \in H_\mu \setminus \{0\}$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$I_\mu(tu) \leq \frac{t^2}{2} \|u\|_\mu^2 + \frac{b}{4} t^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - t^\mu C \int_{\mathbb{R}^3} |u|^\mu dx + t^2 C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \rightarrow -\infty.$$

因此, 存在 $t_* > 0$ 满足 $I_\mu(e) = I_\mu(t_* u) \leq 0$, 从而 (ii) 成立. $\square$

如下消失引理可参见文献 [44] 或 [19].

引理 3.2 设 $\{u_n\}$ 在 H_μ 中有界且满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} |u_n(x)|^2 dx = 0,$$

其中 $R > 0$, 则对任意的 $t \in (2, 2_s^*)$, 在 $L^t(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n \rightarrow 0$.

引理 3.3 设 $\{u_n\}$ 是泛函 I_μ 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $\{u_n\}$ 在 H_μ 中有界.

证明 设 $\{u_n\}$ 是泛函 I_μ 的 $(PS)_c$ 序列, 即 $I_\mu(u_n) \rightarrow c$ 且 $I'_\mu(u_n) \rightarrow 0$. 因此, 由引理 2.2 可知,

$$c + o_n(1) \geq I_\mu(u_n) - \frac{1}{4} \langle I'_\mu(u_n), u_n \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} (f(u_n)u_n - 4F(u_n)) dx \\
&\geq \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx = \frac{1}{4} \|u\|_\mu^2.
\end{aligned}$$

从而, $\{u_n\}$ 在 H_μ 中有界. □

从如下引理可知 (PS) $_c$ 序列的弱极限是非平凡的.

引理 3.4 设 $\{u_n\} \subset H_\mu$ 为泛函 I_μ 的 (PS) $_c$ 序列, 则如下结论有且只有一个成立:

- (i) 在 H_μ 中 $u_n \rightarrow 0$;
- (ii) 存在 $R, \sigma > 0$, $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 dx \geq \sigma.$$

证明 若 (ii) 不成立, 则对任意的 $R > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} |u_n(x)|^2 dx = 0.$$

由于 $\{u_n\}$ 在 H_μ 中有界, 由引理 3.2 知, 在 $L^t(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n \rightarrow 0$, $\forall t \in (2, 2_s^*)$. 因此,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n)u_n dx = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} F(u_n) dx = 0.$$

注意到 $\langle I'_\varepsilon(u_n), u_n \rangle \rightarrow 0$, 故

$$o_n(1) = \|u_n\|_\mu + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx.$$

由此, 在 H_μ 中 $u_n \rightarrow 0$, 从而引理得证. □

注 3.2 由引理 3.4 可知, 如果 u 是泛函 I_μ 的某 (PS) $_{m_\mu}$ 序列的弱极限, 则可设 $u \neq 0$. 否则若 $u_n \rightarrow 0$, 注意到 $u_n \rightharpoonup 0$, 由引理 3.4 知, 存在 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 dx \geq \sigma > 0.$$

记 $v_n(x) = u(x + y_n)$, 则 $\{v_n\}$ 也是泛函 I_μ 的 (PS) $_{m_\mu}$ 序列且在 H_μ 中有界, 从而存在 $v \in H_\mu$, 使得在 H_μ 中 $v_n \rightharpoonup v$ 且 $v \neq 0$.

下面的定理说明自治问题 (3.1) 存在正基态解.

定理 3.1 对任意的 $\mu > 0$, 问题 (3.1) 存在正基态解.

证明 因为 I_μ 具有山路几何结构, 使用不带 (PS) 条件的山路定理 (参见文献 [19]) 可知, 存在序列 $\{u_n\} \subset H_\mu$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$I_\mu(u_n) \rightarrow m_\mu \quad \text{且} \quad I'_\mu(u_n) \rightarrow 0.$$

由引理 3.3 知, $\{u_n\}$ 在 H_μ 中有界, 则在子列意义下,

$$\begin{aligned}
&\text{在 } H_\mu \text{ 中, } u_n \rightharpoonup u, \\
&\text{在 } L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \text{ 中, } u_n \rightarrow u, \quad \forall q \in [2, 2_s^*), \\
&u_n(x) \rightarrow u(x), \quad \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^3.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

由注 3.2 可设 $u \neq 0$. 我们断言,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx. \quad (3.5)$$

事实上, 由引理 3.3 可知, 至多选取一个子列, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx = A \geq 0. \quad (3.6)$$

由范数的弱下半连续性可知,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx = A.$$

对任意的 $\varphi \in H_\mu$, 由 $\{u_n\}$ 的弱收敛性可知,

$$a \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \mu \int_{\mathbb{R}^3} u_n \varphi dx \rightarrow a \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \mu \int_{\mathbb{R}^3} u \varphi dx$$

且

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx.$$

此外, 由引理 2.2 和 Lebesgue 控制收敛定理可知,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(u_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f(u) \varphi dx.$$

从而,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle I'_\mu(u_n), \varphi \rangle \\ &= a \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \mu \int_{\mathbb{R}^3} u_n \varphi dx \\ &\quad + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n) \varphi dx \\ &\geq a \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \mu \int_{\mathbb{R}^3} u \varphi dx \\ &\quad + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u) \varphi dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

若 $\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx = A$, 则 (3.7) 中等号成立. 从而断言 (3.5) 成立. 若 $\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx < A$. 由 (3.7), $\langle I'_\mu(u), \varphi \rangle < 0$, 特别地, $\langle I'_\mu(u), u \rangle < 0$. 记

$$h_1(t) := \langle I'_\mu(tu), tu \rangle, \quad \forall t \geq 0,$$

则 $h_1(1) < 0$. 由引理 2.2 可知,

$$\begin{aligned} h_1(t) &:= at^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + t^2 \mu \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + bt^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} f(tu) t u dx \\ &\geq \frac{at^2}{2} \|u\|_\mu^2 - t^4 C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx - t^q C_2 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q dx. \end{aligned}$$

因为 $4 < q < 2_s^*$, 故对充分小的 $t > 0$, 有 $h_1(t) > 0$. 显然 $h_1(t)$ 是连续的, 因此, 存在 $t_0 \in (0, 1)$ 使得 $\langle I'_\mu(t_0 u), t_0 u \rangle = 0$ 且 $I_\mu(t_0 u) = \max_{t \in (0, 1)} I_\mu(tu)$. 由 (f₄) 可知,

$$\begin{aligned} m_\mu &\leq I_\mu(t_0 u) = I_\mu(t_0 u) - \frac{1}{4} \langle I'_\mu(t_0 u), t_0 u \rangle \\ &= \frac{a}{4} t_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{\mu}{4} t_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(t_0 u) t_0 u - F(t_0 u) \right) dx \\ &< \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u_n - F(u) \right) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ I_\mu(u_n) - \frac{1}{4} \langle I'_\mu(u_n), u_n \rangle \right\} \\ &= m_\mu, \end{aligned} \quad (3.8)$$

矛盾. 从而, $\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx = A$ 且 $I'_\varepsilon(u) = 0$. 因此, 断言 (3.5) 成立. 故 $u \in \mathcal{M}_\mu$. 用 u^- 作检验, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I'_\mu(u), u^- \rangle = \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right) \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^- dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mu u u^- dx \\ &\geq \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right) \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mu |u^-|^2 dx \\ &\geq a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mu |u^-|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

因此, $u^- = 0$, 故 $u \geq 0$. 此外, 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}^3$, 则 $u(x_0) = 0$, 从而, $(-\Delta)^s u(x_0) = 0$, 并且由 (2.1) 知,

$$(-\Delta)^s u(x_0) = -\frac{C(s)}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x_0 + y) + u(x_0 - y) - 2u(x_0)}{|y|^{3+2s}} dy,$$

因此,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x_0 + y) + u(x_0 - y)}{|y|^{3+2s}} dy = 0,$$

即 $u \equiv 0$, 与 $u \neq 0$ 矛盾. 因此, u 是正的. 此外, 由 (f₄) 和 Fatou 引理知,

$$\begin{aligned} m_\mu &\leq I_\mu(u) = I_\mu(u) - \frac{1}{4} \langle I'_\mu(u), u \rangle \\ &= \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \mu u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u - F(u) \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \|u\|_\mu^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u - F(u) \right) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} \|u_n\|_\mu^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ I_\mu(u_n) - \frac{1}{4} \langle I'_\mu(u_n), u_n \rangle \right\} \\ &= m_\mu, \end{aligned}$$

故 $I_\mu(u) = m_\mu$, 由 (3.3) 可知, u 是问题 (3.1) 的一个正基态解. □

下证泛函 I_{V_0} 限制在流形 $\mathcal{M}_{V_0}$ 上是强制的, 这个性质将在下节证明泛函满足部分紧性时用到.

引理 3.5 在 $\mathcal{M}_{V_0}$ 上泛函 I_{V_0} 是强制的, 即当 $u \in \mathcal{M}_{V_0}$ 满足 $\|u\|_{V_0} \rightarrow \infty$ 时, $I_{V_0}(u) \rightarrow +\infty$.

证明 若存在 $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_{V_0}$, 使得 $\|u_n\|_{V_0} \rightarrow \infty$ 且存在 $d \in [m_{V_0}, \infty)$ 满足 $I_{V_0}(u_n) \leq d$. 记 $v_n = u_n / \|u_n\|_{V_0}$, 则在子列意义下, 在 H_{V_0} 中 $\|v_n\|_{V_0} = 1$, $v_n \rightharpoonup v$ 且 $v_n(x) \rightarrow v(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^3$.

若 $\{v_n\}$ 消失, 由引理 3.2 知, 在 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n \rightarrow 0$, $q \in (2, 2_s^*)$. 因此, 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(tv_n) dx \rightarrow 0.$$

因为 $u_n \in \mathcal{M}_{V_0}$, 由引理 3.2 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} d &\geq I_{V_0}(u_n) \geq I_{V_0}(tv_n) = \frac{t^2}{2} \|v_n\|_{V_0}^2 + \frac{bt^4}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v_n|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(tv_n) dx \\ &\geq \frac{t^2}{4} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

矛盾. 因此 $\{v_n\}$ 是非消失的. 因为在 $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n \rightarrow v$, 所以, $v \neq 0$. 注意到当 $v(x) \neq 0$ 时, $u_n(x) \rightarrow +\infty$, 由引理 2.2 和 Fatou 引理可知,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(u_n)}{u_n^4} v_n^4 dx \rightarrow \infty,$$

且当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{I_{V_0}(u_n)}{\|u_n\|_{V_0}^4} = \frac{1}{2\|u_n\|_{V_0}^2} + \frac{b(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v_n|^2 dx)^2}{4\|u_n\|_{V_0}^4} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(u_n)}{u_n^4} v_n^4 dx \\ &\leq \frac{b}{2} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(u_n)}{u_n^4} v_n^4 dx \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

这又是一个矛盾. 故结论成立. $\square$

4 正解的多重性

本节将研究方程 (1.1) 正解的多重性与位势 V 全局极小集 Λ 的拓扑之间的关系.

4.1 紧性结果

本小节将证明, 当 $c < m_{V_\infty}$ 时, (2.6) 定义的泛函 $\mathcal{R}_\varepsilon$ 满足 $(\text{PS})_c$ 条件.

由定理 3.1 可知, 问题 (1.1) 相应的极限问题

$$\left(a + b \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s u(x) + V_\infty u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

有一个正基态解, 故

$$m_{V_\infty} = \inf_{u \in \mathcal{M}_{V_\infty}} I_{V_\infty}(u)$$

在某 $u_{V_\infty} \in \mathcal{M}_{V_\infty}$ 处可达且 $I'_{V_\infty}(u_{V_\infty}) = 0$, 其中

$$I_{V_\infty}(u) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty u^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx,$$

且

$$\mathcal{M}_{V_\infty} = \{u \in H^s(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} : \langle I'_{V_\infty}(u), u \rangle = 0\}.$$

为证当 $c < m_{V_\infty}$ 时, 泛函 I_ε 满足 $(PS)_c$ 条件, 我们需要如下关于分数阶 Kirchhoff 方程的全局紧性引理, 局部情形的结果参见文献 [17].

引理 4.1 设 $\{u_n\} \subset H_\varepsilon$ 是泛函 I_ε 的 $(PS)_c$ 序列, 其中 $c > 0$, 则存在 $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$ 和 $A \in \mathbb{R}$, 使得 $L'_\varepsilon(u) = 0$, 其中

$$L_\varepsilon(u) = \frac{a + bA^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx,$$

且如下的两个结论有且仅有一个成立:

- (i) 在 H_ε 中 $u_n \rightarrow u$;
- (ii) 存在 $l \in \mathbb{N}$ 和 $\{y_n^k\} \subset \mathbb{R}^3$ 满足, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 对每个 $k \in [1, l]$, 有 $|y_n^k| \rightarrow +\infty$, 以及当 $k_1 \neq k_2$ 和 $n \rightarrow +\infty$ 时, $|y_n^{k_1} - y_n^{k_2}| \rightarrow +\infty$, 且如下问题:

$$(a + bA^2)(-\Delta)^s u + V_\infty u = f(u) \quad (4.1)$$

存在非平凡解 $w^1, \dots, w^l$ 满足

$$c + \frac{bA^4}{4} = L_\varepsilon(u) + \sum_{k=1}^l L_{V_\infty}(w^k), \quad (4.2)$$

$$\left\| u_n - u - \sum_{k=1}^l w^k(\cdot - y_n^k) \right\| \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

$$A^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx, \quad (4.4)$$

其中

$$L_{V_\infty}(u) = \frac{a + bA^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx.$$

证明 设 $\{u_n\}$ 是泛函 I_ε 的 $(PS)_c$ 序列. 类似于引理 3.3, $\{u_n\}$ 在 H_ε 中有界. 因此, 在子列意义下, 存在 $u \in H_\varepsilon$ 和 $A \in \mathbb{R}$, 使得

$$\text{在 } H_\varepsilon \text{ 中, } u_n \rightharpoonup u, \quad (4.5)$$

且

$$\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \rightarrow A^2.$$

由 $I'_\varepsilon(u_n) \rightarrow 0$ 可知,

$$(a + bA^2) \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_\varepsilon,$$

即 $L'_\varepsilon(u) = 0$, 其中

$$L_\varepsilon(u_n) = \frac{a + bA^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u_n) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u_n) dx \\
 &\quad + \frac{bA^2}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + o_n(1) \\
 &= I_\varepsilon(u_n) + \frac{bA^4}{4} + o_n(1)
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 \langle L'_\varepsilon(u_n), \varphi \rangle &= (a + bA^2) \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n) \varphi dx \\
 &= a \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n) \varphi dx \\
 &\quad + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + o_n(1) \\
 &= \langle I'_\varepsilon(u_n), \varphi \rangle + o_n(1).
 \end{aligned}$$

因此,

$$L_\varepsilon(u_n) \rightarrow c + \frac{bA^4}{4} \quad \text{和} \quad L'_\varepsilon(u_n) \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

接下来证明要么 (i) 成立, 要么 (ii) 成立. 这个证明是标准的, 这里仅简单叙述一下证明思路.

第 1 步 记 $u_n^1 = u_n - u$, 由 (4.5) 可知, 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n^1 \rightharpoonup 0$. 利用标准的证明 (参见文献 [17]) 可得

$$(a.1) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n^1|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + o_n(1);$$

$$(b.1) \quad |u_n^1|_2^2 = |u_n|_2^2 - |u|_2^2 + o_n(1);$$

$$(c.1) \quad L_{V_\infty}(u_n^2) \rightarrow c + \frac{bA^4}{4} - L_\varepsilon(u) - L_{V_\infty}(w^1);$$

$$(d.1) \quad \text{在 } H_\varepsilon^{-1} \text{ 中 } L'_\varepsilon(u_n^1) \rightarrow 0.$$

记

$$\delta := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} |u_n^1|^2 dx.$$

情形 1 (消失) 即 $\delta = 0$. 由引理 3.2 可知, 在 $L^t(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n^1 \rightarrow 0$, $t \in (2, 2_s^*)$, 则在 H_ε 中 $u_n^1 \rightarrow 0$. 从而完成证明.

情形 2 (非消失) 即 $\delta > 0$. 于是存在一列 $\{y_n^1\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得

$$\int_{B_1(y_n^1)} |u_n^1|^2 dx > \frac{\delta}{2}.$$

记 $w_n^1 := u_n^1(\cdot + y_n^1)$, 则 $\{w_n^1\}$ 是泛函 L_{V_∞} 的一个有界的 (PS) $_{c + \frac{bA^4}{4} - L_\varepsilon}$ 序列, 在子列意义下, 可设

$$w_n^1 \rightharpoonup w^1.$$

因此, $L'_{V_\infty}(w^1) = 0$, 因为 $\int_{B_1(0)} |w_n^1|^2 dx > \frac{\delta}{2}$, 则

$$\int_{B_1(0)} |w^1|^2 dx > \frac{\delta}{2},$$

故 $w^1 \neq 0$. 由 (4.5) 知 $\{y_n^1\}$ 无界. 在子列意义下, 设 $|y_n^1| \rightarrow +\infty$.

第 2 步 记 $u_n^2 = u_n - u - w^1(\cdot - y_n^1)$, 类似地, 有

$$(a.2) \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n^2|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^1|^2 dx + o_n(1);$$

$$(b.2) |u_n^2|_2^2 = |u_n|_2^2 - |u|_2^2 - |w^1|_2^2 + o_n(1);$$

$$(c.2) L_{V_\infty}(u_n^2) \rightarrow c + \frac{bA^4}{4} - L_\varepsilon(u) - L_{V_\infty}(w^1);$$

$$(d.2) \text{ 在 } H_\varepsilon^{-1} \text{ 中 } L'_\varepsilon(u_n^2) \rightarrow 0.$$

令

$$\sigma := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} |u_n^2|^2 dx.$$

若消失发生, 则 $\|u_n^2\| \rightarrow 0$, 即 $\|u_n - u - w^1(\cdot - y_n^1)\| \rightarrow 0$. 此外, 由 (4.5)、(a.2) 和 (c.2) 可知,

$$A^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^1|^2 dx \quad \text{和} \quad c + \frac{bA^4}{4} = L_\varepsilon(u) + L_{V_\infty}(w^1).$$

若非消失发生, 则存在一列 $\{y_n^2\} \subset \mathbb{R}^3$ 和 (4.1) 的一个非平凡解 $w^2 \in H_\varepsilon$, 使得在 H_ε 中 $w_n^2 := u_n^2(\cdot + y_n^2) \rightharpoonup w^2$, 则由 (d.2) 可知, $L'_{V_\infty}(w^2) = 0$. 此外, $u_n^2 \rightharpoonup 0$ 蕴含着 $|y_n^2| \rightarrow +\infty$ 且 $|y_n^2 - y_n^1| \rightarrow +\infty$.

通过迭代, 可知存在 $\{y_n^k\} \subset \mathbb{R}^3$ 使得 $|y_n^k| \rightarrow +\infty$ 和 $|y_n^{k_1} - y_n^{k_2}| \rightarrow +\infty$ ($k_1 \neq k_2$), 以及 $u_n^k = u_n^{k-1} - w^{k-1}(\cdot - y_n^{k-1})$ ($k \geq 2$) 满足

$$\text{在 } H_\varepsilon \text{ 中, } u_n^k \rightharpoonup 0 \quad \text{和} \quad L'_{V_\infty}(w^k) = 0,$$

且

$$\begin{cases} \|u_n\|^2 - \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \|w^j(\cdot - y_n^j)\|^2 = \|u_n - u - \sum_{j=1}^{k-1} w^j(\cdot - y_n^j)\|^2 + o_n(1), \\ c + \frac{bA^4}{4} = L_\varepsilon(u) + \sum_{j=1}^{k-1} L_{V_\infty}(w^j) + L_{V_\infty}(u_n^2). \end{cases} \quad (4.7)$$

因为 $\{u_n\}$ 在 H_ε 中有界, 注意到 w^k 是 L_{V_∞} 的非平凡临界点, 则 $L_{V_\infty}(w^k) \geq \gamma_{V_\infty} > 0$, 其中 γ_{V_∞} 是泛函 L_{V_∞} 的最小能量. 由 (4.7) 可知, 存在某 $l \in \mathbb{N}$, 使得迭代在 $l+1$ 处停止. 因此, 在 H_ε 中 $u_n^{l+1} \rightarrow 0$. 于是完成了引理的证明. $\square$

引理 4.2 若 $c < m_{V_\infty}$, 则泛函 I_ε 满足 $(PS)_c$ 条件.

证明 类似于引理 3.3, $\{u_n\}$ 在 H_ε 中有界. 由引理 4.1 知, 存在 $u \in H_\varepsilon$ 和 $A \in \mathbb{R}$, 使得

$$\text{在 } H_\varepsilon \text{ 中, } u_n \rightharpoonup u,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \rightarrow A^2,$$

$L'_\varepsilon(u) = 0$ 以及要么引理 4.1(i) 成立, 要么引理 4.1(ii) 成立.

如果 (ii) 成立, 即存在 $l \in \mathbb{N}$ 和 $\{y_n^k\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得对每个 $1 \leq k \leq l$ 都有, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $|y_n^k| \rightarrow +\infty$, 且存在问题 (4.1) 的非平凡解 $w^1, \dots, w^l$ 使得 (4.2)–(4.4) 成立. 记

$$\begin{aligned} a_1 &= a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx, & a_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 dx, & a_3 &= bA^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx, \\ a_4 &= \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx, & a_5 &= \int_{\mathbb{R}^3} f(u) u dx, \end{aligned}$$

则 a_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) 非负. 由 $\langle L'_\varepsilon(u), u \rangle = 0$ 可知,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 - a_5 = 0, \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 - a_4 = L_\varepsilon(u) - \frac{1}{4}a_3. \end{cases}$$

因此,

$$L_\varepsilon(u) - \frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2) + \frac{1}{4}(a_4 - 4a_5) > 0. \quad (4.8)$$

而问题 (4.1) 的非平凡解 w^k ($k = 1, \dots, l$) 显然满足 $\langle L'_{V_\infty}(w^k), w^k \rangle = 0$. 由 (4.8) 可知,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L'_{V_\infty}(w^k), w^k \rangle = (a + bA^2) \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |w^k|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(w^k) w^k dx \\ &= a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |w^k|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(w^k) w^k dx \\ &\quad + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx \right) \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx \\ &\geq a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |w^k|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(w^k) w^k dx \\ &\quad + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx \right)^2 \\ &= \langle I'_{V_\infty}(w^k), w^k \rangle, \end{aligned}$$

则存在 $t_k \in (0, 1]$ 使得 $t_k w^k \in \mathcal{M}_{V_\infty}$, 即 $\langle I'_{V_\infty}(t_k w^k), t_k w^k \rangle = 0$. 由计算可知,

$$\begin{aligned} L_{V_\infty}(w^k) &= L_{V_\infty}(w^k) - \frac{1}{4} \langle L'_{V_\infty}(w^k), w^k \rangle \\ &= \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |w^k|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} (f(w^k) w^k - 4F(w^k)) dx \\ &\quad + \frac{b}{4} A^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx. \end{aligned}$$

由引理 2.2, 对任意的 $w \in H_\varepsilon$, 有

$$h_2(t) = \frac{a}{4} t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx + \frac{1}{4} t^2 \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |w^k|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} (f(tw^k) tw^k - F(tw^k)) dx$$

在 $[0, +\infty)$ 上是递增的. 因此,

$$\begin{aligned} L_{V_\infty}(w^k) &- \frac{b}{4} A^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx \\ &= \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |w^k|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} (f(w^k) w^k - 4F(w^k)) dx \\ &\geq \frac{a}{4} t_k^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx + \frac{1}{4} t_k^2 \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |w^k|^2 dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} (f(t_k w^k) t_k w^k - 4F(t_k w^k)) dx \\ &= I_{V_\infty}(t_k w^k) - \langle I'_{V_\infty}(t_k w^k), t_k w^k \rangle \\ &= I_{V_\infty}(t_k w^k), \end{aligned}$$

从上式可知,

$$L_{V_\infty}(w^k) \geq m_{V_\infty} + \frac{b}{4} A^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx. \quad (4.9)$$

由 (4.2)、(4.8) 和 (4.9) 可知,

$$\begin{aligned} c + \frac{bA^4}{4} &= L_\varepsilon(u) + \sum_{k=1}^l L_{V_\infty}(w^k) \\ &\geq \frac{bA^2}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_\lambda|^2 dx + \sum_{k=1}^l \left(m_{V_\infty} + \frac{b}{4} A^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx \right) \\ &= l m_{V_\infty} + \frac{bA^2}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w^k|^2 dx \right) \\ &\geq m_{V_\infty} + \frac{bA^4}{4}. \end{aligned}$$

因此, $c \geq m_{V_\infty}$, 这与 $c < m_{V_\infty}$ 矛盾. 所以, 在 H_ε 中 $u_n \rightarrow u$. 从而, u 是泛函 I_ε 的非平凡临界点. $\square$

引理 4.3 对任意的 $c < m_{V_\infty}$, (2.6) 中定义的泛函 $\mathcal{R}_\varepsilon$ 满足 $(PS)_c$ 条件.

证明 设 $c < m_{V_\infty}$, $\{w_n\} \subset S_\varepsilon$ 是泛函 $\mathcal{R}_\varepsilon$ 的 $(PS)_c$ 序列. 因此,

$$\mathcal{R}_\varepsilon(w_n) \rightarrow c \quad \text{且} \quad \|\mathcal{R}'_\varepsilon(w_n)\|_* \rightarrow 0,$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 是对偶空间 $(T_{w_n} S_\varepsilon)'$ 中的范数. 由引理 2.6 可知, $\{m_\varepsilon(w_n)\} \subset H_\varepsilon$ 是泛函 I_ε 的 $(PS)_c$ 序列. 由引理 4.2 知, 存在 $w \in S_\varepsilon$, 使得在子列意义下,

$$\text{在 } H_\varepsilon \text{ 中, } m_\varepsilon(w_n) \rightarrow m_\varepsilon(w).$$

再由引理 2.6 知, 在 S_ε 中, $w_n \rightarrow w$. $\square$

4.2 技术性引理

本节将建立几个证明多解性和集中现象所需的技术性引理. 当 $\mu = V_0$ 时, 设 w 是如下问题的正基态解 (见定理 3.1):

$$\begin{cases} \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s u(x) + V_0 u = f(u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (4.10)$$

则 $w \in \mathcal{M}_{V_0}$ 满足 $I_{V_0}(w) = m_{V_0}$, 其中 m_{V_0} 是方程 (4.10) 的最小能量. 由文献 [45, 命题 2.9] 可知, 对任意的 $\alpha < 2s - 1$, 有 $w \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$. 接下来的引理将给出, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 最小能量 c_ε 的渐近行为.

引理 4.4 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} c_\varepsilon = m_{V_0}$.

证明 作截断函数 $\eta: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 满足: 当 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 时, $\eta(t) = 1$; 当 $t \geq 1$ 时, $\eta(t) = 0$. 对任意的 $y \in \Lambda$, 定义

$$\Psi_{\varepsilon,y}(x) = \eta(|\varepsilon x - y|) w\left(\frac{\varepsilon x - y}{\varepsilon}\right).$$

取 $\{\varepsilon_n\}$ 满足: 当 $n \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$. 由引理 2.3 知, 存在唯一的 $t_\varepsilon > 0$, 使得

$$\max_{t \geq 0} I_\varepsilon(t\Psi_{\varepsilon,y}) = I_\varepsilon(t_\varepsilon\Psi_{\varepsilon,y}).$$

由注 3.1 可知, 只需验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n}\Psi_{\varepsilon_n,y}) = m_{V_0} \text{ 关于 } y \in \Lambda \text{ 是一致的.} \quad (4.11)$$

我们断言 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{\varepsilon_n} = 1$. 事实上, 由 t_{ε_n} 的定义和引理 2.3 可知,

$$\begin{aligned} 0 < r^{*2} &\leq \|t_{\varepsilon_n}\Psi_{\varepsilon_n,y_n}\|_\varepsilon^2 \\ &\leq t_{\varepsilon_n}^2 a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}|^2 dx + t_{\varepsilon_n}^2 \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n x) \Psi_{\varepsilon_n,y_n}^2 dx + t_{\varepsilon_n}^4 b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}|^2 dx \right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t_{\varepsilon_n}\Psi_{\varepsilon_n,y_n}) t_{\varepsilon_n} \Psi_{\varepsilon_n,y_n} dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

由 (4.12) 和引理 2.2 可知, $t_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$, 则存在 $t_0 > 0$, 使得 $t_{\varepsilon_n} \geq t_0 > 0$. 如果 $t_{\varepsilon_n} \rightarrow +\infty$, 则由引理 2.2 及 $\overline{B_{\frac{1}{2\varepsilon_n}}(0)}$ 为有界闭集知, $\mu := \inf_{x \in B_{\frac{1}{2\varepsilon_n}}(0)} w(x) > 0$, 故 $f(t_{\varepsilon_n}\mu)/(t_{\varepsilon_n}\mu)^3 \rightarrow +\infty$. 于是, 由 (f₁) 和 Ψ_{ε_n,y_n} 的有界性可知,

$$\begin{aligned} &\frac{a}{t_{\varepsilon_n}^4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n x) \Psi_{\varepsilon_n,y_n}^2 dx \right) + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}|^2 dx \right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t_{\varepsilon_n}\Psi_{\varepsilon_n,y_n})}{(t_{\varepsilon_n}\Psi_{\varepsilon_n,y_n})^3} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}^4 dx \stackrel{\varepsilon_n y_n = z}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t_{\varepsilon_n}\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))}{(t_{\varepsilon_n}\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^3} (\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^4 dz \\ &\geq \int_{B_{\frac{1}{2\varepsilon_n}}(0)} \frac{f(t_{\varepsilon_n}\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))}{(t_{\varepsilon_n}\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^3} (\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^4 dz = \int_{B_{\frac{1}{2\varepsilon_n}}(0)} \frac{f(t_{\varepsilon_n}w)}{(t_{\varepsilon_n}w)^3} w^4 dx \\ &\geq \int_{B_{\frac{1}{2\varepsilon_n}}(0)} \frac{f(t_{\varepsilon_n}\mu)}{(t_{\varepsilon_n}\mu)^3} \mu^4 dx \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

而当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{a}{t_{\varepsilon_n}^4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n x) \Psi_{\varepsilon_n,y_n}^2 dx \right) + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}|^2 dx \right)^2 \\ &\rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 dx \right)^2 < +\infty, \end{aligned}$$

矛盾. 因此, $0 < t_0 < t_{\varepsilon_n} \leq C$. 不失一般性, 可假设 $t_{\varepsilon_n} \rightarrow T$. 接下来断言 $T = 1$. 由引理 2.1 可知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \Psi_{\varepsilon_n,y_n}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 dx. \quad (4.13)$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} F(\Psi_{\varepsilon_n,y_n}) dx = \int_{\mathbb{R}^3} F(w) dx, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n x) \Psi_{\varepsilon_n,y_n}^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} V_0 w^2 dx \quad (4.14)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} f(\Psi_{\varepsilon_n,y_n}) \Psi_{\varepsilon_n,y_n} dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(w) w dx. \quad (4.15)$$

因此,

$$\frac{a}{T^2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 dx + \frac{1}{T^2} \int_{\mathbb{R}^3} V_0 w^2 dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(Tw)}{(Tw)^3} w^4 dx. \quad (4.16)$$

因为 w 是问题 (4.10) 的基态解, 所以,

$$a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_0 w^2 dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(w) w dx. \quad (4.17)$$

结合 (4.16) 和 (4.17), 有

$$\left(1 - \frac{1}{T^2}\right) \left(a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_0 w^2 dx \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{f(w)}{w^3} - \frac{f(Tw)}{(Tw)^3} \right) w^4 dx.$$

由 (f₄) 知, $T = 1$, 从而断言成立. 由 (4.13) 和 (4.14) 可知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n} \Psi_{\varepsilon_n, y}) = I_{V_0}(w) = m_{V_0}.$$

因此引理证明完成. □

引入映射 $\Phi_\varepsilon : \Lambda \rightarrow \mathcal{N}_\varepsilon$;

$$\Phi_\varepsilon(y) = t_\varepsilon \Psi_{\varepsilon, y}. \quad (4.18)$$

显然, 对任意的 $y \in \Lambda$, $\Phi_\varepsilon(y)$ 有紧支集且 Φ_ε 连续.

注意到, 对于任意的 $\delta > 0$, 存在 $\rho = \rho(\delta) > 0$, 使得 $\Lambda_\delta \subset B_\rho(0)$. 考虑函数 $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为: 当 $|x| \leq \rho$ 时, $\chi(x) = x$; 当 $|x| \geq \rho$ 时, $\chi(x) = \frac{\rho x}{|x|}$. 此外, 定义重心映射 $\beta_\varepsilon : \mathcal{N}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\beta_\varepsilon(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(\varepsilon x) u^2(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^3} u^2(x) dx} \in \mathbb{R}^3.$$

引理 4.5 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y)) = y$ 对 $y \in \Lambda$ 一致地成立.

证明 假设结论不成立, 则存在 $\delta_0 > 0$, $\{y_n\} \subset \Lambda$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, 使得

$$|\beta_{\varepsilon_n}(\Phi_{\varepsilon_n}(y_n)) - y_n| \geq \delta_0. \quad (4.19)$$

作变量替换 $z = \frac{\varepsilon_n x - y_n}{\varepsilon_n}$, 由 (4.8) 以及 β_ε 的定义, 有

$$\beta_{\varepsilon_n}(\Phi_{\varepsilon_n}(y_n)) = y_n + \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (\chi(\varepsilon_n z + y) - y_n) |\eta(\varepsilon_n z) w(z)|^2 dz}{\int_{\mathbb{R}^3} |\eta(\varepsilon_n z) w(z)|^2 dz}.$$

因为 $\{y_n\} \subset \Lambda \subset B_\rho(0)$ 且 $\chi|_{B_\rho} \equiv \text{id}$, 所以,

$$|\beta_{\varepsilon_n}(\Phi_{\varepsilon_n}(y_n)) - y_n| = o(1),$$

这与 (4.19) 矛盾. 这就完成了引理的证明. □

引理 4.6 设 $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_{V_0}$ 满足 $E_{V_0}(u_n) \rightarrow m_{V_0}$, 则如下结论有且仅有一个成立:

- (i) $\{u_n\}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有强收敛的子列;
- (ii) 存在 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得 $v_n(x) := u_n(x + y_n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有强收敛的子列.

证明 由引理 3.5 可知, $\{u_n\}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有界. 注意到

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{V_0}(m_{V_0}^{-1}(u_n)) &= I_{V_0}(u_n) \rightarrow c_{V_0}, \\ c_{V_0} &= \inf_{w \in S_{V_0} \setminus \{0\}} \max_{t>0} I_{V_0}(tw) = \inf_{w \in S_{V_0} \setminus \{0\}} I_{V_0}(m_{V_0}(w)) = \inf_{w \in S_{V_0} \setminus \{0\}} \mathcal{R}_{V_0}(w). \end{aligned}$$

记 $w_n = m_{V_0}^{-1}(u_n)$. 因为 S_ε 是一个 C^1 流形, 由 Ekeland 变分原理 (参见文献 [46, 推论 3.4] 或 [40, 命题 9]) 可知, 存在 $\{v_n\} \subset S_\varepsilon$, 使得 $\mathcal{R}_{V_0}(v_n) \rightarrow c_{V_0}$, $\mathcal{R}'_{V_0}(v_n) \rightarrow c_{V_0}$ 且 $\|v_n - w_n\| \rightarrow 0$. 因此, 可设 $\mathcal{R}_{V_0}(w_n) \rightarrow c_{V_0}$ 和 $\mathcal{R}'_{V_0}(w_n) \rightarrow 0$. 故由引理 2.6 可知,

$$I_{V_0}(u_n) = c_{V_0}, \quad I'_{V_0}(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{和} \quad \langle I'_{V_0}(u_n), u_n \rangle = 0.$$

接下来分两种情形进行证明.

情形 1 $u \neq 0$. 在这种情形下, 类似引理 3.3 的证明, 可推出 $\langle I'_{V_0}(u), u \rangle = 0$. 由 Fatou 引理可知,

$$\begin{aligned} m_{V_0} &\leq I_{V_0}(u) = I_{V_0}(u) - \frac{1}{4} \langle I'_{V_0}(u), u \rangle \\ &= \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} V_0 u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u - F(u) \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \|u\|_{V_0} + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u - F(u) \right) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} \|u_n\|_{V_0} + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ I_{V_0}(u_n) - \frac{1}{4} \langle I'_{V_0}(u_n), u_n \rangle \right\} \\ &\leq m_{V_0}. \end{aligned}$$

由上式可知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} \|u_n\|_{V_0} + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx \right\} = \frac{1}{4} \|u\|_{V_0} + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u - F(u) \right) dx. \quad (4.20)$$

因此, 由 (4.20) 可知,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|u\|_{V_0}^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \|u_n\|_{V_0}^2 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \|u_n\|_{V_0}^2 + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u - F(u) \right) dx \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} \|u_n\|_{V_0}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx \right\} - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(u) u - F(u) \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \|u\|_{V_0}^2, \end{aligned}$$

这就得出 $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$. 从而在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n \rightarrow u$.

情形 2 $u = 0$. 在此情形, 我们断言存在 $R, \eta > 0$ 和 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 dx \geq \eta.$$

否则, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 dx = 0,$$

则由引理 3.1 知, 对任意的 $2 < t < 2_s^*$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_t = 0$. 注意到 $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_{V_0}$, 容易验证当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|u_n\|_{V_0} \rightarrow 0$. 因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $I_{V_0}(u_n) \rightarrow 0$, 这与 $I_{V_0}(u_n) \rightarrow m_{V_0} > 0$ 矛盾, 故断言成立. 由 Sobolev 嵌入不等式知, $|y_n| \rightarrow +\infty$. 记 $v_n(x) = u_n(x + y_n)$, 则 $I_{V_0}(v_n) \rightarrow m_{V_0}$ 且 $I'_{V_0}(v_n) \rightarrow 0$. 显然, $\{v_n\}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有界且存在 $v \in H^s(\mathbb{R}^3)$, 使得 $v \neq 0$ 且在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n \rightharpoonup v$. 接下来重复情形 1 的证明, 可知在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n \rightarrow v$ 且 $I_{V_0}(v) = m_{V_0}$. $\square$

引理 4.7 设 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_n}$ 满足 $I_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow m_{V_0}$, 则存在 $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得 $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有收敛子列. 此外, 在子列意义下, $y_n := \varepsilon_n \tilde{y}_n \rightarrow y \in \Lambda$.

证明 类似于引理 3.5, $\{u_n\}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有界. 注意到 $m_{V_0} > 0$, 故不会有 $\|u_n\|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$. 由引理 2.2, 类似于注 3.2 的讨论知, 存在 $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^3$ 和 $R, \beta > 0$, 使得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} |u_n|^2 dx \geq \beta > 0.$$

记 $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$, 则 $\{v_n\}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 故在子列意义下, 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n \rightharpoonup v \neq 0$ 且 $v_n(x) \rightarrow v(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^3$. 取 $t_n > 0$, 使得 $\tilde{v}_n := t_n v_n \in \mathcal{M}_0$. 记 $y_n = \varepsilon_n \tilde{y}_n$, 由条件 (V) 和 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_n}$, 有

$$\begin{aligned} m_{V_0} &\leq I_{V_0}(\tilde{v}_n) \\ &\leq \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \tilde{v}_n|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \tilde{v}_n|^2 dx \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n(x + \tilde{y}_n)) \tilde{v}_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(\tilde{v}_n) dx \\ &= \frac{t_n^2}{2} a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{t_n^4}{4} b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^2 \\ &\quad + \frac{t_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n x) u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(t_n u_n) dx \\ &= I_{\varepsilon_n}(t_n u_n) \leq I_{\varepsilon_n}(u_n) = m_{V_0} + o_n(1), \end{aligned} \quad (4.21)$$

这就得出 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{V_0}(\tilde{v}_n) = m_{V_0}$. 由 $\tilde{v}_n \in \mathcal{M}_{V_0}$ 和引理 3.5 可知, $\{\tilde{v}_n\}$ 在 H_{V_0} 中有界, 进而可知 $\{t_n\}$ 有界. 不失一般性, 设 $t_n \rightarrow t_0 \geq 0$. 如果 $t_0 = 0$, 则由 $\{v_n\}$ 有界可知, 在 H_{V_0} 中 $\tilde{v}_n = t_n v_n \rightarrow 0$. 故 $I_{V_0}(\tilde{v}_n) \rightarrow 0$, 与 $m_{V_0} > 0$ 矛盾. 因此, 在子列意义下, 由弱极限的唯一性可知, 在 H_{V_0} 中 $\tilde{v}_n \rightarrow t_n v := \tilde{v} \neq 0$. 由引理 4.6 可知, 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$. 此外, $\tilde{v} \in \mathcal{M}_{V_0}$.

下证 $\{y_n\}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中有界. 在子列意义下, 不妨设 $|y_n| \rightarrow +\infty$. 由 Fatou 引理可知,

$$\begin{aligned} m_{V_0} &\leq I_{V_0}(\tilde{v}) < I_{V_\infty}(\tilde{v}) \\ &= \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \tilde{v}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty \tilde{v}^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \tilde{v}|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(\tilde{v}) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \tilde{v}_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n x + y_n) \tilde{v}_n^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \tilde{v}_n|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(\tilde{v}_n) dx \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{at_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{t_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n x + y_n) u_n^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{bt_n^4}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(t_n u_n) dx \right\}, \end{aligned}$$

从而,

$$m_{V_0} < \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\varepsilon_n}(t_n u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\varepsilon_n}(u_n) = m_{V_0},$$

矛盾. 因此, $\{y_n\}$ 有界, 故在子列意义下, 在 $\mathbb{R}^3$ 中 $y_n \rightarrow y$. 如果 $y \notin \Lambda$, 则 $V_0 < V(y)$, 类似于上面的讨论可得出矛盾. 因此, $y \in \Lambda$. 从而完成引理的证明. $\square$

设函数 $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 满足: 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, $h(\varepsilon) \rightarrow 0^+$. 定义

$$\Sigma_\varepsilon = \{u \in \mathcal{N}_\varepsilon : I_\varepsilon(u) \leq m_{V_0} + h(\varepsilon)\}.$$

对每一个 $y \in \Lambda$, 从引理 4.6 知, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, $h(\varepsilon) = |I_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y)) - m_{V_0}| \rightarrow 0$. 因此, $\Phi_\varepsilon(y) \in \Sigma_\varepsilon$, 从而, 对于 $\varepsilon > 0$, Σ_ε 非空.

引理 4.8 对任意的 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in \Sigma_\varepsilon} \inf_{y \in \Lambda_\delta} |\beta_\varepsilon(u) - y| = 0.$$

证明 设 $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$, 使得 $\varepsilon_n \rightarrow 0$. 由定义可知, 存在 $\{u_n\} \subset \Sigma_{\varepsilon_n}$, 使得

$$\inf_{y \in \Lambda_\delta} |\beta_{\varepsilon_n}(u_n) - y| = \sup_{u \in \Sigma_{\varepsilon_n}} \inf_{y \in \Lambda_\delta} |\beta_{\varepsilon_n}(u) - y| + o_n(1).$$

因此, 只需证明存在 $\{\tilde{y}_n\} \subset \Lambda_\delta$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_{\varepsilon_n}(u_n) - \tilde{y}_n| = 0. \quad (4.22)$$

因为 $\{u_n\} \subset \Sigma_{\varepsilon_n} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_n}$, 所以,

$$m_{V_0} \leq c_{\varepsilon_n} \leq I_{\varepsilon_n}(u_n) \leq m_{V_0} + h(\varepsilon_n),$$

从而, $I_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow m_{V_0}$. 因此, 由引理 4.7 知, 存在 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得对充分大的 n , 有 $\tilde{y}_n = \varepsilon_n y_n \in \Lambda_\delta$. 故

$$\beta_{\varepsilon_n}(u_n) = \tilde{y}_n + \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (\chi(\varepsilon_n z + \tilde{y}_n) - \tilde{y}_n) |u_n(z + y_n)|^2 dz}{\int_{\mathbb{R}^3} |u_n(z + y_n)|^2 dz}.$$

由 $\varepsilon_n z + \tilde{y}_n \rightarrow y \in \Lambda$ 知, 序列 $\{\tilde{y}_n\}$ 满足 (4.22). 这就完成了引理 4.8 的证明. $\square$

4.3 正解的多重性

定理 4.1 设 (V) 和 (f₁)–(f₄) 成立, 则对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\varepsilon_\delta > 0$, 使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, 问题 (2.2) 至少有 $\text{cat}_{\Lambda_\varepsilon}(\Lambda)$ 个正解.

证明 对任意的 $y \in \Lambda$, 令 $\gamma_\varepsilon: \Lambda \rightarrow S_\varepsilon$ 为 $\gamma_\varepsilon(y) = m_\varepsilon^{-1}(\Phi_\varepsilon(y))$. 由 (2.6) 和引理 4.4 可知,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(y)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y)) = c_{V_0} \text{ 关于 } y \in \Lambda \text{ 一致成立.} \quad (4.23)$$

记 $\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \{w \in S_\varepsilon : \mathcal{R}_\varepsilon(w) \leq c_{V_0} + h(\varepsilon)\}$. 由 (4.23) 可知, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, $\tilde{\Sigma}_\varepsilon \neq \emptyset$.

对固定的 $\delta > 0$, 由 (4.11)、引理 2.5、4.5 和 4.8 可知, 存在 $\varepsilon_\delta > 0$ 使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, 有

$$\Lambda \xrightarrow{\Phi_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \xrightarrow{m_\varepsilon^{-1}} \tilde{\Sigma}_\varepsilon \xrightarrow{m_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \xrightarrow{\beta_\varepsilon} \Lambda_\delta$$

是有意义的. 由引理 4.5 知,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y)) \text{ 关于 } y \in \Lambda \text{ 一致成立.}$$

对充分小的 ε 以及 $y \in \Lambda$, 定义 $\beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y)) := y + \theta(y)$, 其中 $|\theta(y)| < \frac{\delta}{2}$ 关于 $y \in \Lambda$ 一致成立. 令 $H : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow \Lambda_\delta$ 为 $H(t, y) = y + (1-t)\theta(y)$, 则 H 连续. 显然, $H(0, y) = \beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y))$, $H(1, y) = y$, $y \in \Lambda$, 故复合映射 $\beta_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$ 同伦于包含映射 $\text{id} : \Lambda \rightarrow \Lambda_\delta$. 记 $\pi_\varepsilon = \beta_\varepsilon \circ m_\varepsilon$, 由于 $\gamma_\varepsilon = m_\varepsilon^{-1} \circ \Phi_\varepsilon$, 因此, $\pi_\varepsilon \circ \gamma_\varepsilon = \beta_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$ 同伦于映射 $\text{id} : \Lambda \rightarrow \Lambda_\delta$. 由同伦不变性和文献 [41, 引理 4.3] 可知,

$$\text{cat}_{\tilde{\Sigma}_\varepsilon} \gamma_\varepsilon(\Lambda) \geq \text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda).$$

事实上, 设 $\text{cat}_{\tilde{\Sigma}_\varepsilon} \gamma_\varepsilon(\Lambda) = n$, 只需考虑 $n < +\infty$ 的情形. 当 $n < +\infty$ 时, $\gamma_\varepsilon(\Lambda) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 其中 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是 $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ 中的可缩闭集, 即存在包含映射 $H_i \in C([0, 1] \times A_i, \tilde{\Sigma}_\varepsilon)$, 使得

$$H_i(0, \cdot) = \text{id}|_{A_i}, \quad H_i(1, \cdot) = u_i \in \tilde{\Sigma}_\varepsilon.$$

记 $K_i := \Phi_\varepsilon^{-1}(m_\varepsilon(A_i))$, 则 K_i 在 Λ 中闭且 $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n K_i$. 考虑映射

$$G_i(t, x) = \beta_\varepsilon \circ m_\varepsilon(H_i(t, m_\varepsilon^{-1} \circ \Phi_\varepsilon(x))),$$

那么,

$$\begin{aligned} G_i &\in C([0, 1] \times K_i, \Lambda_\delta), \\ G_i(0, \cdot) &= \beta_\varepsilon \circ m_\varepsilon(H_i(0, m_\varepsilon^{-1} \circ \Phi_\varepsilon(x))) = \beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x)), \\ G_i(1, \cdot) &= \beta_\varepsilon(m_\varepsilon(u_i)). \end{aligned}$$

因此 $\beta_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon|_{K_i}$ 同伦于映射 $\beta_\varepsilon(m_\varepsilon(u_i)) \in \Lambda_\delta$. 从而, $n \geq \text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda)$, 故 $\text{cat}_{\tilde{\Sigma}_\varepsilon} \gamma_\varepsilon(\Lambda) \geq \text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda)$.

另一方面, $\mathcal{R}_\varepsilon$ 在 $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ 上满足 (PS) 条件. 取 $c = c_\varepsilon \leq c_{v_0} + h(\varepsilon) = d$, $\tilde{\Sigma}_\varepsilon = S_+^d$, $k = \pi_\varepsilon(\Lambda)$, 则由文献 [40, 定理 27 和推论 28] 可知, $\mathcal{R}_\varepsilon$ 在 $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ 上至少有 $\text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda)$ 个临界点. 再由引理 2.6 知, I_ε 至少有 $\text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda)$ 个临界点. 与定理 3.1 的证明相同, 可得问题 (2.2) 至少有 $\text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda)$ 个正解. 因此, 问题 (1.1) 至少有 $\text{cat}_{\Lambda_\delta}(\Lambda)$ 个正解. $\square$

5 解的集中性

5.1 L^∞ 估计

为得到正解的 L^∞ 估计, 首先回顾如下结果 (参见文献 [42, (5.1.1) 和 (5.1.2)]), 但文献 [42] 中未给出具体证明, 其证明可参见文献 [47].

引理 5.1 设 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Lipschitz 连续的凸函数 (Lipschitz 常数为 L) 且 $h(0) = 0$, 则对任意 $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $h(u) \in H^s(\mathbb{R}^3)$ 且在弱意义下,

$$(-\Delta)^s h(u) \leq h'(u)(-\Delta)^s u. \quad (5.1)$$

如下引理给出了解的一致 L^∞ 估计, 其证明与 Moser (参见文献 [48]) 迭代有关. 对于分数阶 Schrödinger 方程的类似结果可参见文献 [20, 42].

引理 5.2 设 $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$, $w_n \in \Sigma_{\varepsilon_n}$ 是问题 (2.2) 的正解, 则在子列意义下, $u_n(x) := w_n(x + \tilde{y}_n) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 且存在 $C > 0$, 使得

$$\|u_n(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

其中 $\tilde{y}_n$ 由引理 4.7 给出.

证明 由引理 4.7 可知, $\{u_n\}$ 有收敛子列, 在子列意义下, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|u_n\|_\varepsilon \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由 Sobolev 不等式, 有

$$\|u_n\|_{2_s^*} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

设 $T > 0$, 定义

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } t \leq 0, \\ t^\beta, & \text{若 } 0 < t < T, \\ \beta T^{\beta-1}(t-T) + T^\beta, & \text{若 } t \geq T, \end{cases} \quad (5.3)$$

其中 $\beta > 1$ 为待定常数.

因为 H 是 Lipschitz 连续的凸函数, 所以,

$$(-\Delta)^s H(u) \leq H'(u)(-\Delta)^s u. \quad (5.4)$$

由 (5.4) 和 Sobolev 嵌入定理可知,

$$\begin{aligned} \|H(u_n)\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} H(u_n)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{Sa} \left(a + b \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right) \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} H(u_n)|^2 dx \\ &\leq C \left(a + b \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy \right) \int_{\mathbb{R}^3} H(u_n) H'(u_n) (-\Delta)^s u_n dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^3} H(u) H'(u) \frac{-V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n \tilde{y}_n) u_n + f(u_n)}{a + b[u_n]^2} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} H(u) H'(u) [-V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n \tilde{y}_n) u_n + f(u_n)] dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} H(u_n) H'(u_n) (1 + |u_n|^{2_s^*-1}) dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

由 $H(u_n) H'(u_n) \leq \beta^2 u_n^{2\beta-1}$ 和 $u_n H'(u_n) \leq \beta H(u_n)$ 可知,

$$\begin{aligned} \|H(u_n)\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} (\beta^2 u_n^{2\beta-1} + \beta |u_n|^{2_s^*-2} H^2(u_n)) dx \\ &\leq C \beta^2 \int_{\mathbb{R}^3} (u_n^{2\beta-1} + |u_n|^{2_s^*-2} H^2(u_n)) dx, \end{aligned} \quad (5.6)$$

其中 C 与 β 无关. 注意到在 (5.6) 中的最后一个式子对 H 中所给的 T 都有意义. 在 (5.6) 中选取 β , 使得 $2\beta - 1 = 2_s^*$ 且记

$$\beta_1 := \frac{2_s^* + 1}{2}.$$

设 $R > 0$ 为待定常数. 在 (5.6) 中, 由 Hölder 不等式知,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{2_s^*-2} H^2(u_n) dx &= \int_{\{u_n \leq R\}} |u_n|^{2_s^*-2} H^2(u_n) dx + \int_{\{u_n > R\}} |u_n|^{2_s^*-2} H^2(u_n) dx \\ &\leq R^{2_s^*-1} \int_{\{u_n \leq R\}} \frac{H^2(u_n)}{u_n} dx + \left(\int_{\{u_n > R\}} |u_n|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{2_s^*-2}{2_s^*}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^3} |H(u_n)|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{2}{2_s^*}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

因为 $\{u_n\}$ 在 H_ε 中有界, 所以, 存在充分大的 R , 使得

$$\left(\int_{\{u_n > R\}} |u_n|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{2_s^*-2}{2_s^*}} \leq \frac{1}{2C\beta_1^2}. \quad (5.8)$$

由 (5.6)–(5.8) 可知,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |H(u_n)|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq 2C\beta_1^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*} dx + R^{2_s^*-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{H^2(u_n)}{u_n} dx \right). \quad (5.9)$$

注意到 $H(u_n) \leq u_n^{\beta_1}$, 在 (5.9) 中, 当 $T \rightarrow \infty$ 时,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{2_s^*\beta_1} dx \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq 2C\beta_1^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*} dx + R^{2_s^*-1} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*} dx \right) < \infty,$$

因此,

$$u_n \in L^{2_s^*\beta_1}(\mathbb{R}^3) \text{ 且 } \|u_n\|_{2_s^*\beta_1} \leq C \text{ 关于 } n \text{ 一致成立.} \quad (5.10)$$

现假设 $\beta > \beta_1$. 注意到 $H(u_n) \leq u_n^\beta$, 在 (5.6) 中, 当 $T \rightarrow \infty$ 时,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{2_s^*\beta} dx \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq C\beta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*\beta-1} dx + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*\beta+2_s^*-2} dx \right) < \infty. \quad (5.11)$$

记 $a_1 := \frac{2_s^*(2_s^*-1)}{2(\beta-1)}$ 且 $b_1 := 2\beta - 1 - a_1$. 注意到 $\beta > \beta_1$, 则 $a_1 \in (0, 2_s^*)$ 和 $b_1 > 0$. 因此, 由 Young 不等式可知,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*\beta-1} dx &\leq \frac{a}{2_s^*} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*} dx + \frac{2_s^*-a}{2_s^*} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{\frac{2_s^*b}{2_s^*-a}} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*\beta+2_s^*-2} dx \\ &\leq C \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*\beta+2_s^*-2} dx \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

结合 (5.11) 和 (5.12), 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{2_s^*\beta} dx \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq C\beta^2 \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*\beta+2_s^*-2} dx \right), \quad (5.13)$$

其中 C 与 β 无关. 因此,

$$\left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{2_s^*\beta} dx \right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta-1)}} \leq (C\beta^2)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2_s^*\beta+2_s^*-2} dx \right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}. \quad (5.14)$$

重复上面的讨论, 可定义一列 β_i ($i \geq 1$) 使得 $2\beta_{i+1} + 2_s^* - 2 = 2_s^*\beta_i$. 所以,

$$\beta_{i+1} - 1 = \left(\frac{2_s^*}{2}\right)^i (\beta_1 - 1).$$

重复 (5.14) 中的讨论, 有

$$\left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{2_s^*\beta_{i+1}} dx\right)^{\frac{2}{2_s^*(\beta_{i+1}-1)}} \leq (C\beta_{i+1}^2)^{\frac{1}{2(\beta_{i+1}-1)}} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2\beta_{i+1}+2_s^*-2} dx\right)^{\frac{1}{2(\beta_{i+1}-1)}}. \quad (5.15)$$

记 $C_{i+1} = C\beta_{i+1}^2$ 和 $K_i := (1 + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^{2\beta_i+2_s^*-2} dx)^{\frac{1}{2(\beta_i-1)}}$. 因此, (5.15) 可以重写为

$$K_{i+1} \leq C_{i+1}^{\frac{1}{2(\beta_{i+1}-1)} K_i},$$

故存在与 i 无关的 $D > 0$, 使得

$$K_{i+1} \leq \prod_{j=2}^{i+1} C_j^{\frac{1}{2(\beta_j-1)}} K_2 \leq DK_1.$$

所以, $u_n \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\forall n$. 结合 (5.10) 可知, $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C$, 关于 $n \in \mathbb{N}$ 一致成立. 这就完成引理 5.2 的证明. $\square$

5.2 解的集中性

设 w_{ε_n} 是问题 (2.2) 在 $\varepsilon = \varepsilon_n$ 时由定理 4.1 给出的正解, 则 $u_n(x) := w_{\varepsilon_n}(x + \tilde{y}_n)$ 是如下问题的正解:

$$\begin{cases} \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy\right) (-\Delta)^s u_n(x) + V_n(x) u_n = f(u_n), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_n \in H^s(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (5.16)$$

其中 $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^3$ 由引理 4.7 给出, $V_n(x) := V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n \tilde{y}_n)$. 由引理 4.4 可知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) = m_{V_0},$$

其中

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V_n(x) u_n^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u_n) dx$$

是问题 (5.16) 对应的能量泛函. 在子列意义下, 由引理 4.7, 可得

$$\text{在 } H^s(\mathbb{R}^3) \text{ 中, } u_n \rightarrow u, \quad (5.17)$$

及

$$y_n := \varepsilon_n \tilde{y}_n \rightarrow y \in \Lambda. \quad (5.18)$$

断言 1 u 是极限问题的基态解:

$$\begin{cases} \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy\right) (-\Delta)^s u(x) + V_0 u = f(u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (5.19)$$

事实上, 对任意的 $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\left(a + b \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy\right) \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^s u_n \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_n(x) u_n \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n) \varphi dx.$$

由 (5.17)、(5.18) 和条件 (V) 可知,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} V_n(x) u_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} V_0 u \varphi dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |V_n(x)(u_n \varphi - u \varphi)| dx + \int_{\mathbb{R}^3} |(V_n(x) - V_0) u \varphi| dx \rightarrow 0. \quad (5.20)$$

因此,

$$\left(a + b \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy\right) \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^s u \varphi dx + V_0 \int_{\mathbb{R}^3} u \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}^3),$$

这就说明 u 是问题 (5.19) 的解.

另一方面, 由 Fatou 引理可知,

$$\begin{aligned} m_{V_0} &\leq \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{V_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) dx \\ &= \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{V_0}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} [f(u)u - F(u)] dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} V_n(x) u_n^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} [f(u_n)u_n - F(u_n)] dx \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) - \frac{1}{4} \langle \mathcal{J}'_{\varepsilon_n}(u_n), u_n \rangle \right) \\ &= m_{V_0}. \end{aligned}$$

因此, u 是问题 (5.19) 的基态解. 类似定理 3.1 的讨论, 可得 u 是正的, 则断言 1 成立.

断言 2 存在 $\delta > 0$, 使得 $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}$.

事实上, 假设 $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$. 取 $\varepsilon_0 = V_0$, 由 (f₁) 可知, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $n \geq n_0$, 有

$$\frac{f(\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)})}{\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^3} < V_0 \quad \text{和} \quad \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{2}.$$

因此, 由 (f₄) 知,

$$\begin{aligned} &a \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_0 u_n^2 dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(u_n)}{u_n^3} u_n^4 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)})}{\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^3} u_n^4 dx \\ &\leq V_0 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^4 dx \leq V_0 \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx \\ &< \frac{V_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx, \end{aligned}$$

这说明对任意的 $n \geq n_0$, 有 $\|u_n\|_{V_0} = 0$. 因为在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n \rightarrow u$, 故 $u = 0$, 与 $u \neq 0$ 矛盾. 从而断言 2 成立.

断言 3 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, 对于 $n \in \mathbb{N}$ 一致地有 $u_n(x) \rightarrow 0$.

事实上, 把 (5.16) 重写为

$$(-\Delta)^s u_n + u_n = \Upsilon_n, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

其中

$$\Upsilon_n(x) = \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n|^2 dx \right)^{-1} [f(u_n(x)) - V_n(x)u_n(x)] + u_n(x).$$

由文献 [44] 可知,

$$u_n = \mathcal{K} * \Upsilon_n = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{K}(x-y) \Upsilon_n(y) dy,$$

其中 $\mathcal{K}$ 是 Bessel 核. 此外, $\mathcal{K}$ 具有如下性质:

- (i) $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上的正的径向对称的光滑函数;
- (ii) 存在 $C > 0$, 使得 $\mathcal{K}(x) \leq C/|x|^{3+2s}$;
- (iii) $\mathcal{K} \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $\forall q \in [1, 3/(3-2s))$.

由 (5.17)、引理 5.2 及其证明和 L^p 空间上的内插不等式可知, 对任意的 $p \in (2, +\infty)$,

$$\text{在 } L^p(\mathbb{R}^3) \text{ 中, } u_n \rightarrow u, \quad (5.21)$$

$$\text{在 } L^p(\mathbb{R}^3) \text{ 中, } f(u_n) \rightarrow f(u). \quad (5.22)$$

记

$$\Upsilon(x) = \left(a + b \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^{-1} [f(u(x)) - V(y)u(x)] + u(x).$$

由 (5.17)、(5.21) 和 (5.22) 可知, 对任意的 $p \in (2, +\infty)$,

$$\text{在 } L^p(\mathbb{R}^3) \text{ 中, } \Upsilon_n \rightarrow \Upsilon, \quad (5.23)$$

且存在 $C > 0$, 使得

$$\|\Upsilon u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C. \quad (5.24)$$

由 (5.21)–(5.24), 类似于文献 [31, 引理 2.6] 的证明, 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, $u_n(x) \rightarrow 0$ 关于 $n \in \mathbb{N}$ 一致成立.

断言 4 存在常数 $C > 0$, 使得

$$u_n(x) \leq \frac{C}{1 + |x|^{3+2s}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

事实上, 由文献 [44, 引理 4.2] 可知, 存在连续函数 $\bar{\omega}$, 使得

$$0 < \bar{\omega}(x) \leq \frac{C}{1 + |x|^{3+2s}}, \quad (5.25)$$

且存在 $\bar{R} > 0$, 使得

$$(-\Delta)^s \bar{\omega} + \frac{V_0}{2(a + 2b[u]_{W^{s,2}}^2)} \bar{\omega} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{\bar{R}}(0). \quad (5.26)$$

由 (5.17) 可知, 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n \rightarrow u$ 且 $[u_n]_{W^{s,2}} \rightarrow [u]_{W^{s,2}}$. 因为 u_n 是 (5.16) 的解, 且当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, $u_n(x) \rightarrow 0$, 所以, 存在充分大的 $R_1 > 0$, 当 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_1}(0)$ 时,

$$(-\Delta)^s u_n + \frac{V_0}{2(a + 2b[u]_{W^{s,2}}^2)} u_n = \frac{f(u_n) - V_n(x)u_n}{a + b[u_n]_{W^{s,2}}^2} + \frac{V_0}{2(a + 2b[u]_{W^{s,2}}^2)} u_n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(u_n) - V_n(x)u_n + (a + b[u_n]_{W^{s,2}}^2) \frac{V_0}{2(a+2b[u_n]_{W^{s,2}}^2)} u_n}{a + b[u_n]_{W^{s,2}}^2} \\
&\leq \frac{f(u_n) - V_n(x)u_n + \frac{V_0}{2}u_n}{a + b[u_n]_{W^{s,2}}^2} \leq \frac{f(u_n) - \frac{V_0}{2}u_n}{a + b[u_n]_{W^{s,2}}^2} \\
&\leq \frac{C(u_n^3 + u_n^{p-1}) - \frac{V_0}{2}u_n}{a + b[u_n]_{W^{s,2}}^2} \leq \frac{C(u_n^2 + u_n^{p-2}) - \frac{V_0}{2}u_n}{a + b[u_n]_{W^{s,2}}^2} u_n \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

记 $R_2 := \max\{\bar{R}, R_1\}$,

$$z_n := (\alpha + 1)\bar{\omega} - \beta u_n, \tag{5.28}$$

其中

$$\alpha := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty < \infty, \quad \beta := \min_{B_{R_2}(0)} \bar{\omega} > 0.$$

我们将验证在 $\mathbb{R}^3$ 上有 $z_n \geq 0$. 若不然, 存在 $\{x_n^j\}$, 使得

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^3} z_n(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} z_n(x_n^j) < 0. \tag{5.29}$$

注意到 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{\omega}(x) = 0$, 及当 $|x| \rightarrow \infty$ 时关于 n 一致地有 $u_n(x) \rightarrow 0$ 成立, 则关于 n 一致地有

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} z_n(x) = 0$$

成立. 因此, $\{x_n^j\}$ 有界, 故在子列意义下, 可设当 $j \rightarrow \infty$ 时, $x_n^j \rightarrow x_n^* \in \mathbb{R}^3$. 所以, (5.29) 变形为

$$z_n(x_n^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} z_n(x) < 0. \tag{5.30}$$

由 (5.30) 和 (2.1) 可知,

$$(-\Delta)^s z_n(x_n^*) = -\frac{C(s)}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{z_n(x_n^* + y) + z_n(x_n^* - y) - 2z_n(x_n^*)}{|y|^{3+2s}} dy \leq 0. \tag{5.31}$$

由 (5.28) 可知, 在 $B_{R_2}(0)$ 上有 $z_n(x) \geq \alpha\beta + \bar{\omega} - \alpha\beta > 0$. 由上式和 (5.30) 可知,

$$x_n^* \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_2}(0). \tag{5.32}$$

从 (5.26) 和 (5.27) 可知, 在 $\mathbb{R}^3 \setminus B_{R_2}(0)$ 上有

$$(-\Delta)^s z_n + \frac{V_0}{2(a + 2b[u_n]_{W^{s,2}}^2)} z_n \geq 0. \tag{5.33}$$

结合 (5.30)–(5.32), 有

$$0 \leq (-\Delta)^s z_n(x_n^*) + \frac{V_0}{2(a + 2b[u_n]_{W^{s,2}}^2)} z_n(x_n^*) < 0,$$

矛盾. 所以, 在 $\mathbb{R}^3$ 中 $z_n(x) \geq 0$. 从而, $u_n \leq (\alpha + 1)\beta^{-1}\bar{\omega}$. 再由 (5.25) 可知,

$$u_n(x) \leq \frac{C}{1 + |x|^{3+2s}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

故断言 4 成立.

接下来将结束定理 1.1 的证明. 由文献 [45, 命题 2.9] 可知, 对任意的 $\alpha < 2s-1$, 有 $u_n \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$. 设 p_n 为 u_n 的全局最大值点, 由引理 5.2 和断言 3 可知, 存在 $R > 0$, 使得 $p_n \in B_R(0)$. 因此, w_{ε_n} 的全局最大值点可记为 $z_{\varepsilon_n} = p_n + \tilde{y}_n$ 且满足 $\varepsilon_n z_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n p_n + \varepsilon_n \tilde{y}_n$. 因为 $\{p_n\}$ 有界, 设 $\varepsilon_n z_{\varepsilon_n} \rightarrow y$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $V(\varepsilon_n z_{\varepsilon_n}) \rightarrow V_0$. 此外, 由断言 4 可知,

$$\begin{aligned} w_n\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) &= u_n\left(\frac{x}{\varepsilon_n} - \tilde{y}_n\right) \leq \frac{C}{1 + \left|\frac{x}{\varepsilon_n} - \tilde{y}_n\right|^{3+2s}} = \frac{C\varepsilon_n^{3+2s}}{\varepsilon_n^{3+2s} + |x - \varepsilon_n \tilde{y}_n|^{3+2s}} \\ &= \frac{C\varepsilon_n^{3+2s}}{\varepsilon_n^{3+2s} + |x - \eta_{\varepsilon_n}|^{3+2s}}. \end{aligned}$$

记 $\bar{v}_{\varepsilon_n}(x) = w_{\varepsilon_n}(\frac{x}{\varepsilon_n})$. 从上面的证明可见, $\bar{v}_{\varepsilon_n}(x)$ 具有定理 1.1 中所有的性质, 这就完成定理 1.1 的证明.

致谢 感谢审稿人的仔细阅读及有益的建议. 此外, 感谢审稿人给我们指出最近的文献 [49].

参考文献

- 1 Arosio A, Panizzi S. On the well-posedness of the Kirchhoff string. Trans Amer Math Soc, 1996, 348: 305–330
- 2 D’Ancona P, Spagnolo S. Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data. Invent Math, 1992, 108: 247–262
- 3 Ono K. Global existence, decay, and blowup of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings. J Differential Equations, 1997, 137: 273–301
- 4 Kirchhoff G. Vorlesungen über Mechanik. Basel: Birkhäuser, 1983
- 5 Bernstein S. Sur une classe d’équations fonctionnelles aux dérivées partielles. Bull Acad Sci URSS Sér Math [Izvestia Akad Nauk SSSR], 1940, 4: 17–26
- 6 Pohožaev S I. A certain class of quasilinear hyperbolic equations. Mat Sb, 1975, 96: 152–166, 168
- 7 Lions J L. On some questions in boundary value problems of mathematical physics. North-Holland Math Stud, 1978, 30: 284–346
- 8 Ma T F, Muñoz Rivera J E. Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem. Appl Math Lett, 2003, 16: 243–248
- 9 Chen C, Kuo Y, Wu T. The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions. J Differential Equations, 2011, 250: 1876–1908
- 10 Deng Y, Peng S, Shuai W. Existence and asymptotic behavior of nodal solutions for the Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^3$. J Funct Anal, 2015, 269: 3500–3527
- 11 He Y. Concentrating bounded states for a class of singularly perturbed Kirchhoff type equations with a general nonlinearity. J Differential Equations, 2016, 261: 6178–6220
- 12 Liang Z, Li F, Shi J. Positive solutions to Kirchhoff type equations with nonlinearity having prescribed asymptotic behavior. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2014, 31: 155–167
- 13 Mao A, Zhang Z. Sign-changing and multiple solutions of Kirchhoff type problems without the P.S. condition. Nonlinear Anal, 2009, 70: 1275–1287
- 14 Perera K, Zhang Z. Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index. J Differential Equations, 2006, 221: 246–255
- 15 Wu X. Existence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in. Nonlinear Anal Real World Appl, 2011, 12: 1278–1287
- 16 Zhang Z, Perera K. Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow. J Math Anal Appl, 2006, 317: 456–463
- 17 Li G, Ye H. Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in $\mathbb{R}^3$. J Differential Equations, 2014, 257: 566–600
- 18 He X, Zou W. Existence and concentration behavior of positive solutions for a Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^3$. J Differential Equations, 2012, 252: 1813–1834
- 19 Willem W. Minimax Theorems. Boston: Birkhäuser, 1996

- 20 He X, Zou W. Ground states for nonlinear Kirchhoff equations with critical growth. *Ann Mat Pura Appl* (4), 2012, 193: 473–500
- 21 Wang J, Tian L, Xu J, et al. Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth. *J Differential Equations*, 2012, 253: 2314–2351
- 22 Figueiredo G M, Santos Júnior J R. Multiplicity and concentration behavior of positive solutions for a Schrödinger-Kirchhoff type problem via penalization method. *ESAIM Control Optim Calc Var*, 2014, 20: 389–415
- 23 He Y, Li G, Peng S. Concentrating bound states for Kirchhoff type problems in $\mathbb{R}^3$ involving critical Sobolev exponents. *Adv Nonlinear Stud*, 2014, 14: 483–510
- 24 Figueiredo G M, Ikoma N, Santos Júnior J R. Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities. *Arch Ration Mech Anal*, 2014, 213: 931–979
- 25 He Y, Li G. Standing waves for a class of Kirchhoff type problems in $\mathbb{R}^3$ involving critical Sobolev exponents. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 3067–3106
- 26 Laskin N. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals. *Phys Lett A*, 2000, 268: 298–305
- 27 Caffarelli L, Silvestre L. An extension problem related to the fractional Laplacian. *Comm Partial Differential Equations*, 2007, 32: 1245–1260
- 28 Di Nezza E, Palatucci G, Valdinoci E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. *Bull Sci Math*, 2012, 136: 521–573
- 29 Niu M, Tang Z. Least energy solutions of nonlinear Schrödinger equations involving the fractional Laplacian and potential wells. *Sci China Math*, 2017, 60: 261–276
- 30 Dávila J, del Pino M, Wei J. Concentrating standing waves for the fractional nonlinear Schrödinger equation. *J Differential Equations*, 2014, 256: 858–892
- 31 Alves C O, Miyagaki O H. Existence and concentration of solution for a class of fractional elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ via penalization method. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2016, 55: 47
- 32 He X, Zou W. Existence and concentration result for the fractional Schrödinger equations with critical nonlinearities. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2016, 55: 91
- 33 Fiscella A, Valdinoci E. A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator. *Nonlinear Anal*, 2014, 94: 156–170
- 34 Pucci P, Xiang M, Zhang B. Multiple solutions for nonhomogeneous Schrödinger-Kirchhoff type equations involving the fractional p -Laplacian in $\mathbb{R}^N$. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 2785–2806
- 35 Caponi M, Pucci P. Existence theorems for entire solutions of stationary Kirchhoff fractional p -Laplacian equations. *Ann Mat Pura Appl* (4), 2016, 195: 2099–2129
- 36 Pucci P, Saldi S. Critical stationary Kirchhoff equations in $\mathbb{R}^N$ involving nonlocal operators. *Rev Mat Iberoam*, 2016, 32: 1–22
- 37 Xiang M, Zhang B, Qiu H. Existence of solutions for a critical fractional Kirchhoff type problem in $\mathbb{R}^N$. *Sci China Math*, 2017, 60: 1647–1660
- 38 Pucci P, Xiang M, Zhang B. Existence and multiplicity of entire solutions for fractional p -Kirchhoff equations. *Adv Nonlinear Anal*, 2016, 5: 27–55
- 39 Bisci G M, Radulescu V D, Servadei R. Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems, Volume 162 of Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2016
- 40 Szulkin A, Weth T. The method of Nehari manifold. In: *Handbook of Nonconvex Analysis and Applications*. Somerville: International Press, 2010, 597–632
- 41 Benci V, Cerami G. Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1994, 2: 29–48
- 42 Dipierro S, Medina M, Valdinoci E. Fractional Elliptic Problems with Critical Growth in the Whole of $\mathbb{R}^n$, Volume 15 of Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)]. Pisa: Edizioni della Normale, 2017
- 43 Palatucci G, Pisante A. Improved Sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration-compactness for fractional Sobolev spaces. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2014, 50: 799–829
- 44 Felmer P, Quaas A, Tan J. Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2012, 42: 1237–1262
- 45 Silvestre L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the laplace operator. *Comm Pure Appl Math*, 2007, 60: 67–112
- 46 Ekeland I. On the variational principle. *J Math Anal Appl*, 1974, 47: 324–353
- 47 Yu Y, Zhao F, Zhao L. The concentration behavior of ground state solutions for a fractional Schrödinger-Poisson system. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 116

- 48 Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm Pure Appl Math*, 1960, 13: 457–468
- 49 Ambrosio V, Isernia T. Concentration phenomena for a fractional Schrödinger-Kirchhoff type equation. *Math Methods Appl Sci*, 2018, 41: 615–645

Multiplicity and concentration behavior of positive solutions for a fractional Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^3$

Guangze Gu, Xian Wu, Yuanyang Yu & Fukun Zhao

Abstract In this paper, we consider the following fractional Kirchhoff equation,

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy\right) (-\Delta)^s u(x) + V(x)u = f(u), & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

where $M(t) = \varepsilon^{2s}a + \varepsilon^{4s-3}bt$ is a Kirchhoff function, $0 < s < 1$ and $\varepsilon > 0$ is a small parameter, the potential V is a positive continuous function which has the global minimum, and f is supercubic but subcritical at infinity. Using the Ljusternik-Schnirelmann theory, we relate the number of positive solutions with the topology of the set $\Lambda := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = \inf V\}$, and we show that these positive solutions converge in $H^s(\mathbb{R}^3)$ to a ground state solution of the limit equation, and concentrate around the set Λ in the sense that the values of V at the maximum points of these solutions convergent to the global minimum of V as $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Moreover, the decay estimate of solutions is also established.

Keywords fractional Kirchhoff equation, Ljusternik-Schnirelmann theory, concentration, variational methods

MSC(2010) 35R11, 35A15, 35B40, 47G20

doi: 10.1360/SCM-2017-0704