

稀薄效应下 Rayleigh-Bénard 流动稳定性研究

张国浩^{*,†} 吴超^{†,**} 马强^{*} 袁先旭[†] 毕林^{†,1)}^{*}(四川大学数学学院, 成都 610065)[†](中国空气动力研究与发展中心空天飞行空气动力科学与技术全国重点实验室, 四川绵阳 621000)^{**}(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘要 随着上层大气高速飞行器、微机电系统以及极紫外光刻机等高科技产业的迅猛发展, 考虑稀薄气体效应和热对流耦合作用下的流动稳定性分析受到越来越广泛的关注. 然而, 传统基于 Navier-Stokes 方程的流动稳定性分析方法无法考虑稀薄程度较高的流动问题, 直接模拟蒙特卡洛方法计算量大, 且存在统计波动, 不利于小扰动演化准确分析, 而 Boltzmann-BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 模型方程只适用于普朗特数为 1 的流动条件, 无法满足实际要求. 因此, 从普朗特数可调节的 Boltzmann-Shakhov 模型方程出发, 基于小扰动假设, 采用模态分析方法, 推导了全流域线性稳定性方程, 建立了可综合考虑稀薄气体效应和热流影响的全流域线性稳定性分析方法, 并对不同稀薄程度下 Rayleigh-Bénard 流动稳定性进行了分析. 研究发现: 对于 Rayleigh-Bénard 流动, 上、下壁面之间的密度处于由“上轻下重”向“下轻上重”过渡的状态时, 流动极易失稳; 增长率在特定波数附近会出现“拐点”, 可能原因是在此波数前后扰动特征函数的极值点数由一个变为两个; 随着稀薄程度的增大, 最不稳定模态对应的普朗特数是逐渐减小的.

关键词 稀薄效应, Boltzmann-Shakhov 模型, 流动稳定性, Rayleigh-Bénard 流动

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

DOI: 10.6052/0459-1879-25-047

CSTR: 32045.14.0459-1879-25-047

STABILITY ANALYSIS OF RAYLEIGH-BÉNARD FLOW UNDER RAREFACTION EFFECTS

Zhang Guohao^{*,†} Wu Chao^{†,**} Ma Qiang^{*} Yuan Xianxu[†] Bi Lin^{†,1)}^{*}(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)[†](State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, Sichuan, China)^{**}(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract With the rapid advancement of cutting-edge technologies such as hypersonic vehicles operating in the upper atmosphere, micro-electro-mechanical systems (MEMS), and extreme ultraviolet (EUV) lithography machines, increasing attention has been directed toward the analysis of flow stability under the coupled influence of rarefied gas effects and thermal convection. In such high-tech applications, traditional flow stability analysis methods based on the Navier-Stokes equations fall short, as they are not suitable for accurately describing flows at higher levels of rarefaction. Meanwhile, the direct simulation Monte Carlo (DSMC) method, although capable of handling rarefied flows, suffers

2025-02-05 收稿, 2025-04-29 录用, 2025-04-30 网络版发表.

1) 通讯作者: 毕林, 研究员, 主要研究方向为稀薄气体动力学. E-mail: bzbaby1010@163.com

引用格式: 张国浩, 吴超, 马强, 袁先旭, 毕林. 稀薄效应下 Rayleigh-Bénard 流动稳定性研究. 力学学报, 2025, 57(6): 1315-1324

Zhang Guohao, Wu Chao, Ma Qiang, Yuan Xianxu, Bi Lin. Stability analysis of Rayleigh-Bénard flow under rarefaction effects. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(6): 1315-1324

from high computational costs and significant statistical fluctuations, which make it unsuitable for accurately tracking the evolution of small disturbances. Furthermore, the widely used Boltzmann-BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) model equation is limited by its assumption of a fixed Prandtl number equal to one, which restricts its applicability in real-world situations where thermophysical properties vary with conditions. To overcome these challenges, a linear stability analysis framework based on the Boltzmann-Shakhov model equation is proposed. This model accommodates a tunable Prandtl number and thus better captures the physical characteristics of different flow regimes. Based on the assumption of small perturbations and using a modal analysis approach, a full-domain linear stability equation is derived. This enables a comprehensive assessment of flow stability that accounts for both rarefied gas dynamics and thermal effects. Applying this method to the Rayleigh-Bénard convection problem, the study shows that the flow becomes highly unstable when the density distribution between the upper and lower walls shifts from a configuration of “lighter above, heavier below” to “heavier above, lighter below”. A noticeable turning point in the disturbance growth rate appears near a specific wavenumber, likely due to the eigenfunction of the disturbance changing from having one extremum to having two. Moreover, as rarefaction increases, the Prandtl number corresponding to the most unstable mode gradually decreases. These findings shed light on the intricate interplay between rarefied gas behavior and thermal convection in determining flow stability.

Key words rarefaction effects, Boltzmann-Shakhov model, flow stability, Rayleigh-Bénard flow

引 言

热对流是一种由温度梯度引起的传热传质流动现象,在自然界和工程应用中均广泛存在.近年来随着上层大气高速飞行器^[1-2]、用于电子热控制的微机电系统^[3](micro-electro-mechanical system, MEMS)以及极紫外(extreme ultraviolet, EUV)光刻机^[4]等高科技产业的迅猛发展,考虑稀薄气体效应和热对流耦合作用下的流动失稳问题受到了越来越多的关注^[5-6].然而,在上述情形下,流动物理过程通常很复杂,往往需要采用简化的物理模型来研究其中的基本动力学行为及其作用机理.

Rayleigh-Bénard 对流^[7-8]是最经典的热对流模型之一,通常两个平行平板间,因底部加热产生温度差从而诱发的浮力驱动流体对流现象.目前,对于 Rayleigh-Bénard 对流稳定性的研究,主要集中于连续流^[9-12]和滑移流区^[13-17],考虑稀薄气体效应耦合作用影响的研究相对较少.

根据努森数(Knudsen number, Kn , 定义为分子平均自由程与特征长度的比值)可将流动分为连续流($Kn \leq 0.001$)、滑移流($0.001 < Kn \leq 0.1$)、稀薄过渡流($0.1 < Kn \leq 10$)及自由分子流($Kn > 10$).在连续流区,主要基于 Navier-Stokes 方程进行流动稳定性分析,如 Chandrasekhar^[10]通过 Navier-Stokes 方程的线性稳定性分析奠定了临界瑞利数的理论基础, Liu 等^[11]研究了 non-Oberbeck-Boussinesq (NOB) 效应对 Rayleigh-Bénard 对流的线性和弱非线性稳定

性的影响, Requilé 等^[12]考察了黏性耗散对 Rayleigh-Bénard 对流与 Poiseuille/Couette 混合对流线性稳定性的影响.

对于稀薄程度较低的滑移流,学者们发展了 Navier-Stokes 方程结合滑移边界条件的流动稳定性分析方法.针对流动参数弗劳德数(Froude number, Fr)和努森数, Manela 等^[14-15]分析了(Fr , Kn)参数平面的中性稳定性曲线. Wang 等^[16]考虑了滑移边界条件中适应系数对稳定性的影响,发现适应系数的增加使得不稳定区域扩展. Wu 等^[17]研究了滑移流区双原子气体 Rayleigh-Bénard 对流稳定性,探讨了各种分子作用模型和流动参数的影响,如努森数、弗劳德数、普朗特数(Prandtl number, Pr)和比热比等,发现在某些小波数条件下,随着稀薄程度的增加,增长率反而越大.

随着气体稀薄程度的增加,基于 Navier-Stokes 方程的分析方法不再适用^[18],有学者采用直接模拟蒙特卡洛方法(direct simulation Monte Carlo method, DMSC)研究了较高稀薄程度下的 Rayleigh-Bénard 对流失稳现象. Stefanov 等^[19-20]通过 DMSC 分析了努森数和弗劳德数对流场的影响来确定流动失稳的阈值.张俊等^[21]对冷热壁温度比 $r = 0.1$ (r 等于冷壁温度/热壁面温度)和不同稀薄条件下的 Rayleigh-Bénard 对流进行了 DMSC 直接数值模拟,研究发现,当努森数 $Kn = 0.01$ 时,在瑞利数(Rayleigh number, Ra)为 1700 左右由热传导状态转变为热对流状态;

当努森数 $Kn = 0.05$ 时, 保持热传导状态, 此时瑞利数的增大并不能引发对流的产生. Tzeng 等^[22] 探讨了长宽比 $L/H = 2, 4$ 的二维封闭空间中努森数和初始壁温对流动的影响, 发现密度分布随着努森数的增大变为非单调, 并且在恒定温度比下, 流动在大努森数下 ($Kn = 0.04$) 趋向于完全热传导状态.

然而, DSMC 方法的统计噪声问题使得难以准确识别热传导向热对流转变的过渡区, 且在近连续流动中存在计算量大、效率低的问题^[23]. Zou 等^[24-26] 从 Boltzmann-BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 模型方程出发, 发展了全流域适用的线性稳定性分析方法, 为研究稀薄气体效应下的 Rayleigh-Bénard 对流稳定性提供了一条新的技术途径. 然而该方法从 BGK 模型方程出发, 只适用于普朗特数为 1 的流动条件^[27-28], 无法满足实际研究要求 (普朗特数和温度相关, 通常不为 1). 因此, 本文采用 Boltzmann-Shakhov 模型^[29], 推导建立了普朗特数可调的稀薄流动线性稳定性分析方法 (SBGK-LSEs), 并研究了在不同稀薄程度下普朗特数和弗劳德数对 Rayleigh-Bénard 对流稳定性的影响.

1 基于 Boltzmann-Shakhov 模型方程的线性流动稳定性分析方法

1.1 Rayleigh-Bénard 流动问题描述

Rayleigh-Bénard 对流示意图如图 1 所示, 气体被限制在两个平行的壁面之间, D 为两壁间距, $\mathbf{g}$ 为由上壁面指向下壁面的重力加速度, T_c 和 T_h 分别为上 (冷)、下 (热) 壁面温度. 靠近下热壁的气体由于热膨胀而密度降低, 靠近上冷壁的气体由于温度较低而保持相对较高的密度. 密度的变化引起浮力. 当温差足够大时, 浮力驱动气体引发对流.

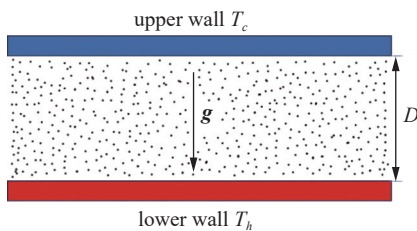


图 1 Rayleigh-Bénard 流动示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Rayleigh-Bénard convection

1.2 Boltzmann-Shakhov 模型方程

Boltzmann-Shakhov 模型方程如下

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau} (f^S - f) \quad (1)$$

式中, $f(t, \mathbf{x}, \xi)$ 是速度分布函数, 与时间 t 、物理空间 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 、分子速度 $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ 有关, 对于本文讨论的 Rayleigh-Bénard 对流而言, 仅在 y 方向受到外力的影响, 外力 $\mathbf{F}$ 仅考虑重力加速度 $\mathbf{g}$, 因此式 (1) 中的外力项部分 $\mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = -\mathbf{g} \frac{\partial f}{\partial \xi_y}$. Shakhov 平衡态分布函数 f^S 为

$$\left. \begin{aligned} f^S &= f^{eq} + f^{eq} (1 - Pr) \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{q}}{5pRT} \left(\frac{c^2}{RT} - 5 \right) \\ f^{eq} &= \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left(-\frac{c^2}{2RT} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

本文中 $\mathbf{u}$ 为宏观速度, $\mathbf{c} = \xi - \mathbf{u}$ 是分子热运动速度, 弛豫时间 $\tau = \mu/p$, μ 是黏性系数. $p = \rho RT$ 是压强, ρ , R 和 T 分别是密度、气体常数和温度. 普朗特数 $Pr = \mu c_p / \kappa$ 表征动量扩散与热量扩散的相对强弱, c_p 为定压比热容, κ 为热传导系数.

为了计算方便, 本文将控制方程无量纲化. 参考温度为热壁温度 $T_{\text{ref}} = T_h$ 、参考速度为分子最可几速度 $u_{\text{ref}} = \sqrt{2RT_{\text{ref}}}$ 、参考长度为上下平板的间距 $L_{\text{ref}} = D$ 、参考时间 $t_{\text{ref}} = L_{\text{ref}}/u_{\text{ref}}$ 、参考密度为热壁面密度 $\rho_{\text{ref}} = \rho_h$. 参考黏性 $\mu_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} L_{\text{ref}}$, 参考分布函数 $f_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}} / u_{\text{ref}}^2$, 参考压强 $p_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2$, 参考外力 $F_{\text{ref}} = u_{\text{ref}}^2 / L_{\text{ref}}$, 参考热流 $q_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^3$.

上述各变量 $\text{Var} = \{T, \mathbf{u}, L, t, \rho, \mu, f, p, \mathbf{F}, \mathbf{q}\}$ 无量纲后的形式为 $\text{Var}^* = \text{Var} / \text{Var}_{\text{ref}}$, 其中外力 $\mathbf{F}^*$ 无量纲后为 $-1/Fr$, 弗劳德数 $Fr = u_{\text{ref}}^2 / (gD)$ 表征对流系统中重力效应的影响.

为书写方便, 后续描述中均省略上标“*”. 本文采用的是硬球分子模型, 因此黏性系数 μ 随温度的变化规律为 $\mu = \mu_{\text{ref}} \sqrt{T/T_{\text{ref}}}$, 分子平均自由程 λ 与参考黏性系数 μ_{ref} 的关系为

$$5\lambda\rho_{\text{ref}}\sqrt{2\pi RT_{\text{ref}}} = 16\mu_{\text{ref}} \quad (3)$$

并且由 $\mu_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} L_{\text{ref}}$, 可得无量纲化后的黏性系数 μ 表达式如下

$$\mu = \frac{5}{16} \sqrt{\pi T} Kn \quad (4)$$

其中, $Kn = \lambda / L_{\text{ref}}$ 表征流动的稀薄程度. 此外, 无量纲化后普朗特数为 $Pr = \mu_{\text{ref}} c_p / \kappa_{\text{ref}}$, 其中定压比热容 c_p 以定容比热容为参考, 参考热传导系数 κ_{ref} 为其在热

壁的值 κ_h .

无量纲后的方程表达形式如下

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{Fr} \frac{\partial f}{\partial \xi_y} = \frac{1}{\tau} (f^S - f) \quad (5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f^S &= f^{eq} + f^{eq}(1 - Pr) \frac{2\mathbf{c} \cdot \mathbf{q}}{5pT} \left(\frac{c^2}{T} - 5 \right) \\ f^{eq} &= \frac{\rho}{(\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{T}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1.3 Boltzmann-Shakhov 稳定性方程推导及求解

对于二维问题, 为消除无量纲分布函数对分子速度 ξ_z 的依赖, 引入约化分布函数 g, h

$$\mathbf{W} = \int \boldsymbol{\varphi} f d\xi_z \quad (7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= (1, \xi_z^2)^T \\ \mathbf{W} &= [g(t, x, y, \xi_x, \xi_y), h(t, x, y, \xi_x, \xi_y)]^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

因此有

$$\left. \begin{aligned} g^{eq} &= \frac{\rho}{\pi T} \exp\left(-\frac{c^2}{T}\right) \\ h^{eq} &= \frac{\rho}{2\pi} \exp\left(-\frac{c^2}{T}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

则式 (5) 可表示为 g, h 的形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial g}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{Fr} \frac{\partial g}{\partial \xi_y} &= \frac{p}{\mu} (g^S - g) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial h}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{Fr} \frac{\partial h}{\partial \xi_y} &= \frac{p}{\mu} (h^S - h) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} g^S &= g^{eq} + g^{eq}(1 - Pr) \frac{4\mathbf{c} \cdot \mathbf{q}}{5pT} \left(\frac{c^2}{T} - 2 \right) \\ h^S &= h^{eq} + h^{eq}(1 - Pr) \frac{4\mathbf{c} \cdot \mathbf{q}}{5pT} \left(\frac{c^2}{T} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

此时各瞬时宏观物理量 (密度、宏观速度、能量和热流) 可由 g, h 表示

$$\boldsymbol{\Psi} = \int \boldsymbol{\psi} d\xi \quad (12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} &= (\rho, \rho \mathbf{u}, 2\rho E, 2\mathbf{q})^T \\ \boldsymbol{\psi} &= [g, \xi g, \xi^2 g + h, \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c}^2 g + h)]^T \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在平行流假设下, 引入小扰动, 将变量 Q 写为基本流和扰动量和的形式

$$Q = Q_c + \tilde{Q} \quad (14)$$

其中, $Q = \{\rho, \mathbf{u}, p, T, q_x, q_y, \mu, E, g, h, g^{eq}, h^{eq}, g^S, h^S\}$, 下标“c”和上标“~”分别表示基本流和扰动量. 且 $v_c = 0$, 进而得各宏观扰动量

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} &= \int \tilde{\boldsymbol{\psi}} d\xi \\ \tilde{q}_x &= \frac{1}{2} \int (\xi_x - u_c) (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi - Q_{qxu} \tilde{u} - Q_{qyv} \tilde{v} \\ \tilde{q}_y &= \frac{1}{2} \int \xi_y (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi - Q_{qyv} \tilde{v} - Q_{qyu} \tilde{u} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} &= (\tilde{\rho}, \rho_c \tilde{\mathbf{u}}, 2\rho_c \tilde{E})^T \\ \tilde{\boldsymbol{\psi}} &= [\tilde{g}, (\xi - u_c) \tilde{g}, (\xi^2 - 2E_c) \tilde{g} + \tilde{h}]^T \\ \mathbf{c}_c^2 &= (\xi - u_c)^2 = (\xi_x - u_c)^2 + \xi_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$(Q_{qxu}, Q_{qyv}, Q_{qyu}, Q_{qyv})$ 是与热流相关的系数. 扰动温度、扰动黏性和扰动压强分别为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T} &= C_{T1} \tilde{E} - C_{T2} \tilde{u} \\ \tilde{\mu} &= C_{\mu1} \tilde{E} - C_{\mu2} \tilde{u} \\ \tilde{p} &= C_{p1} \tilde{E} - C_{p2} \tilde{u} + C_{p3} \tilde{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中, $(C_{T1}, C_{T2}, C_{\mu1}, C_{\mu2}, C_{p1}, C_{p2}, C_{p3})$ 分别是与温度、黏性和压强相关的系数. 扰动平衡态分布函数分别如下

$$\tilde{g}^{eq} = C_{ge\rho} \tilde{\rho} + C_{geu} \tilde{u} + C_{gev} \tilde{v} + C_{geE} \tilde{E} \quad (18)$$

$$\tilde{h}^{eq} = C_{he\rho} \tilde{\rho} + C_{heu} \tilde{u} + C_{hev} \tilde{v} + C_{heE} \tilde{E} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}^S &= C_{gsp} \tilde{\rho} + C_{gsu} \tilde{u} + C_{gsv} \tilde{v} + C_{gsE} \tilde{E} + \\ &\quad \frac{\partial g^S}{\partial q_x} \bigg|_c \int \frac{\xi_x - u_c}{2} (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi + \\ &\quad \frac{\partial g^S}{\partial q_y} \bigg|_c \int \frac{\xi_y}{2} (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}^S &= C_{hsp} \tilde{\rho} + C_{hsu} \tilde{u} + C_{hsv} \tilde{v} + C_{hsE} \tilde{E} + \\ &\quad \frac{\partial h^S}{\partial q_x} \bigg|_c \int \frac{\xi_x - u_c}{2} (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi + \\ &\quad \frac{\partial h^S}{\partial q_y} \bigg|_c \int \frac{\xi_y}{2} (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中, $(C_{ge\rho}, C_{geu}, C_{gev}, C_{geE}, C_{he\rho}, C_{heu}, C_{hev}, C_{heE})$ 和 $(C_{gsp}, C_{gsu}, C_{gsv}, C_{gsE}, C_{hsp}, C_{hsu}, C_{hsv}, C_{hsE})$ 分别是与密

度、速度、能量、热流、温度、黏性和压强相关的系数.

对于式 (10) 的外力项部分, 本文采用 He-Shan-Doolen (HSD) 方法^[30] 进行离散处理

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_y} \approx \frac{\partial g^S}{\partial \xi_y} = \frac{1-Pr}{5pRT} \left[q_y \left(\frac{c^2}{RT} - 4 \right) + \frac{2c_y \mathbf{c} \cdot \mathbf{q}}{RT} \right] g^{eq} - \frac{\xi_y - v}{RT} g^S \quad (22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi_y} \approx \frac{\partial h^S}{\partial \xi_y} = \frac{1-Pr}{5p} \left[q_y \left(\frac{c^2}{RT} - 2 \right) + \frac{2c_y \mathbf{c} \cdot \mathbf{q}}{RT} \right] g^{eq} - \frac{\xi_y - v}{RT} h^S \quad (23)$$

将式 (22) 和式 (23) 代入式 (10), 略去仅含基本流的项和非线性项, 得扰动方程的最终形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} + A_{g1} \tilde{g} = & \\ G_\rho \tilde{\rho} + G_u \tilde{u} + G_v \tilde{v} + G_E \tilde{E} + & \\ \frac{G_{qx}}{2} \int (\xi_x - u_c) (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi + & \\ \frac{G_{qy}}{2} \int \xi_y (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi & \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + A_{h1} \tilde{h} = & \\ H_\rho \tilde{\rho} + H_u \tilde{u} + H_v \tilde{v} + H_E \tilde{E} + & \\ \frac{H_{qx}}{2} \int (\xi_x - u_c) (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi + & \\ \frac{H_{qy}}{2} \int \xi_y (\mathbf{c}_c^2 \tilde{g} + \tilde{h}) d\xi & \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $(G_\rho, G_u, G_v, G_E, H_\rho, H_u, H_v, H_E, A_{g1}, A_{h1}, G_{qx})$ 和 (G_{qy}, H_{qx}, H_{qy}) 分别是与密度、速度、能量、热流、温度、黏性和压强相关的系数.

根据模态分析方法, 扰动量 $\tilde{Q}$ 与形函数 $\hat{Q}$ 和波函数的关系式为

$$\tilde{Q} = \hat{Q} e^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (26)$$

其中 $\tilde{Q} = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{E}, \tilde{g}, \tilde{g}^s, \tilde{h}, \tilde{h}^s\}$, α 为波数, ω 为圆频率. 在时间稳定性分析中, 给定实数 α , 认为扰动在 x 方向是周期的, ω 为要求解的特征值, 实部 ω_r 表示扰动的频率, 虚部 ω_i 表示扰动的增长率. 将式 (26) 代入到式 (24) 和式 (25), 化简可得线性稳定性方程

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{g} + i\alpha \xi_x \hat{g} + \xi_y \frac{\partial \hat{g}}{\partial y} + A_{g1} \hat{g} = & \\ G_\rho \hat{\rho} + G_u \hat{u} + G_v \hat{v} + G_E \hat{E} + & \\ \frac{G_{qx}}{2} \int (\xi_x - u_c) (\mathbf{c}_c^2 \hat{g} + \hat{h}) d\xi + & \\ \frac{G_{qy}}{2} \int \xi_y (\mathbf{c}_c^2 \hat{g} + \hat{h}) d\xi & \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{h} + i\alpha \xi_x \hat{h} + \xi_y \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} + A_{h1} \hat{h} = & \\ H_\rho \hat{\rho} + H_u \hat{u} + H_v \hat{v} + H_E \hat{E} + & \\ \frac{H_{qx}}{2} \int (\xi_x - u_c) (\mathbf{c}_c^2 \hat{g} + \hat{h}) d\xi + & \\ \frac{H_{qy}}{2} \int \xi_y (\mathbf{c}_c^2 \hat{g} + \hat{h}) d\xi & \end{aligned} \quad (28)$$

对上述方程进行数值离散, 速度空间离散采用 Gauss-Hermite 积分方法^[31]; 物理空间离散采用切比雪夫谱配置点法^[32]. 离散后, 可将稳定性问题转换为离散方程的广义特性值问题

$$(\mathbf{M} + \mathbf{N}\mathbf{D} + \mathbf{L}\mathbf{I}) \Phi = \mathbf{0} \quad (29)$$

式中, $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 和 $\mathbf{L}$ 均是与马赫数、雷诺数、波数或者圆频率相关的矩阵. 本文采用隐式重启 Arnoldi 算法 (implicitly restarted Arnoldi method, IRAM)^[33] 求解上述特征值问题.

2 方法验证

对工况为 $r = 0.9$, $Fr = 2.0$ 和 $Kn = 0.0005$ 的连续流, 将 SBGK-LSEs 方法与基于 N-S 方程的线性稳定性分析 (NS-LSEs) 方法 (无滑移边界条件) 获得的特征值进行比较, 以验证 SBGK-LSEs 方法在连续流稳定性分析的有效性. 如表 1 所示, 对两种方法在波数 $\alpha = 1.0$ 时计算的最不稳定模态特征值进行收敛性验证 (最不稳定模态指的是所有模态中增长率最大的模态). 可以看到, 随着物理空间点数 N 的增加, NS-LSEs 方法 (无滑移边界条件) 最不稳定模态的增长率小数点后的 4 位有效数字保持不变. 对 SBGK-LSEs 方法使用 12×12 和 14×14 速度点的 Gauss-Hermite 积分以确定离散速度和权重, 得到的增长率小数点后的 4 位有效数字不变. 此时, 认为特征值的收敛性满足计算要求.

图 2 对比了两种方法在波数 $\alpha = 1.0, 6.0$ 计算得到的特征值谱 (图中的增长率均小于 0), 其中 SBGK-LSEs 方法选取物理空间点 $N = 80$, 速度空间点 12×12 的速度空间离散. 可以看到两种方法得到

表 1 无滑移边界条件的 NS-LSEs 方法与 SBGK-LSEs 方法计算得到的最不稳定性模态增长率

Table 1 Growth rate of the least unstable mode calculated by the NS-LSEs with no slip boundary conditions and SBGK-LSEs			
N	NS-LSEs (with noslip BC)	SBGK-LSEs (Gauss node: 12×12)	SBGK-LSEs (Gauss node: 14×14)
40	-0.012 511 84	-0.012 139 95	-0.012 139 91
60	-0.012 524 58	-0.012 142 79	-0.012 142 75
80	-0.012 526 73	-0.012 143 13	-0.012 143 00

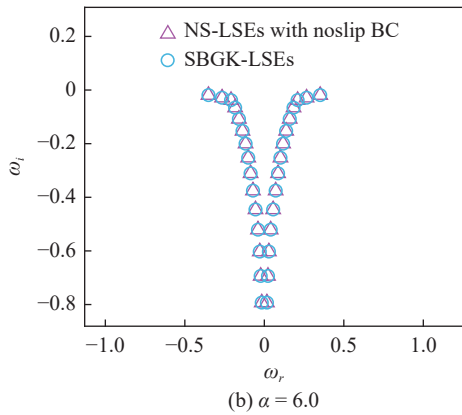
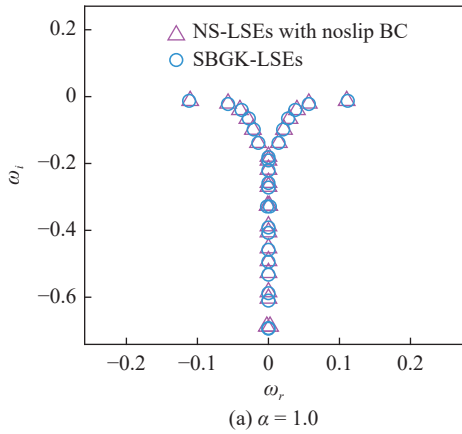


图 2 $Kn = 0.000\ 5$ 时 SBGK-LSEs 方法与 (无滑移边界条件) NS-LSEs 方法计算的特征值谱对比

Fig. 2 Comparison of eigenvalue spectra calculated by the SBGK-LSEs method and the NS-LSEs method (with no slip boundary condition) when $Kn = 0.000\ 5$

的模态吻合良好,这验证了 SBGK-LSEs 在连续流动稳定性分析中的有效性.

对工况为 $r = 0.9$, $Fr = 2.0$ 和 $Kn = 0.01$ 的流动条件,将 SBGK-LSEs 方法与基于 N-S 方程的线性稳定性分析 (NS-LSEs) 方法 (有滑移边界条件) 获得的特征值进行比较,以验证 SBGK-LSEs 方法在滑移流稳定性分析的有效性.如表 2 所示,对两种方法在波数 $\alpha = 3.0$ 时计算的最不稳定性模态特征值进行收敛性验证.可以看到,随着物理空间点数 N 的增加,NS-

LSEs 方法 (有滑移边界条件) 最不稳定性模态的增长率小数点后的 5 位有效数字保持不变.对 SBGK-LSEs 方法使用 12×12 和 16×16 速度点的 Gauss-Hermite 积分以确定离散速度和权重,得到的增长率小数点后的 5 位有效数字不变.此时,认为特征值的收敛性满足计算要求.

图 3 对比了两种方法在波数 $\alpha = 3.0, 4.0$ 的特征值谱,其中 SBGK-LSEs 方法采取了 12×12 的速度空间离散.可以观察到,两种方法计算的特征值吻合,

表 2 滑移边界条件的 NS-LSEs 方法与 SBGK-LSEs 方法计算得到的最不稳定性模态增长率

Table 2 Growth rate of the least unstable mode calculated by the NS-LSEs with slip boundary conditions and SBGK-LSEs			
N	NS-LSEs (with slip BC)	SBGK-LSEs (Gauss node: 12×12)	SBGK-LSEs (Gauss node: 16×16)
40	-0.181 805 10	-0.177 922 82	-0.177 890 53
60	-0.181 806 16	-0.177 915 95	-0.177 882 34
80	-0.181 806 29	-0.177 914 85	-0.177 880 91

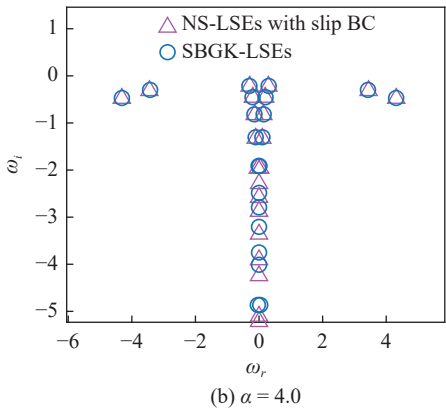
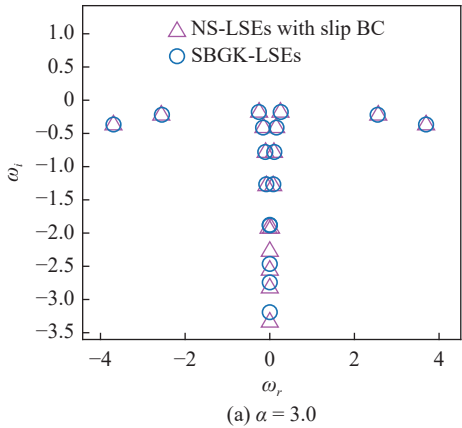


图 3 $Kn = 0.01$ 时 SBGK-LSEs 方法与 (滑移边界条件) NS-LSEs 方法计算的特征值谱对比

Fig. 3 Comparison of eigenvalue spectra calculated by the SBGK-LSEs method and the NS-LSEs method (with slip boundary condition) when $Kn = 0.01$

而远离最不稳定模态的一些模态 (中间区域下方的模态) 出现偏差^[25,34].

随后在不同努森数 ($Kn = 0.03, 0.05$ 和 0.10) 下, NS-LSEs 方法 (有滑移边界条件) 与 SBGK-LSEs 方法计算的最不稳定模态增长率、增长率的绝对偏差 ($\Delta = \omega_{i,SBGK} - \omega_{i,NS}$) 和相对偏差 ($\delta = -\Delta/\omega_{i,SBGK}$) 进行了对比, 其中选取物理空间点 $N = 60$, 速度空间点采用 16×16 的 Gauss 积分, 如表 3 所示. 可以看到, 在 $Kn = 0.1$ 的情况下, 研究所得最不稳定模态的增长率均小于 0, 即表中所有给出的最不稳定模态都

是稳定模态. 在较低努森数 ($Kn = 0.01$) 时, NS-LSEs 方法与 SBGK-LSEs 方法给出的增长率预测值的相对偏差为 1.71%, 这表明在较低努森数条件下, NS-LSEs 方法对流动稳定性分析是适用的. 然而, 随着努森数的增加, 两种方法间的增长率绝对偏差 Δ 逐渐增加, 相对偏差 δ 也从 2.13% 增加到 7.02%. 这表明 NS-LSEs 方法虽然考虑了滑移边界, 但对较高努森数条件下, 该方法对稳定性分析的能力减弱, 可能不再适用于稀薄程度较高的流动, 因此本文采用 SBGK-LSEs 方法进行稳定性分析.

表 3 滑移边界条件的 NS-LSEs 方法与 SBGK-LSEs 方法不同努森数下计算得到最不稳定模态增长率的对比

Table 3 Comparison of growth rate of the least unstable mode using the NS-LSEs with slip boundary conditions and SBGK-LSEs under different Knudsen numbers

Kn	$\alpha = 2.0$				$\alpha = 5.0$			
	NS-LSEs	SBGK-LSEs	Δ	$\delta/\%$	NS-LSEs	SBGK-LSEs	Δ	$\delta/\%$
0.01	-0.155 58	-0.152 96	0.002 614	1.71	-0.270 27	-0.264 64	0.005 632	2.13
0.03	-0.288 74	-0.282 52	0.006 225	2.20	-0.759 19	-0.740 25	0.018 939	2.56
0.05	-0.385 76	-0.376 15	0.009 616	2.55	-1.220 07	-1.155 35	0.064 719	5.60
0.10	-0.587 14	-0.562 35	0.024 787	4.41	-2.019 93	-1.887 41	0.132 521	7.02

3 结果与讨论

本节讨论在不同稀薄程度 ($Kn = 0.01, 0.03$ 和 0.05) 下弗劳德数和普朗特数对 Rayleigh-Bénard 对流稳定性的影响.

3.1 弗劳德数的影响

弗劳德数是流体力学中的一个无量纲数, 定义为 $Fr = u_{ref}^2/(gD)$. 在 Rayleigh-Bénard 对流中, 弗劳德数描述了对流系统中重力效应的影响, 本文在工况为 $r = 0.3, Pr = 2/3$ 的条件下选取了不同弗劳德数进行研究.

图 4 表示不同努森数、不同弗劳德数下增长率随波数的变化情况. 总体上, 当弗劳德数较小时, 即在强重力效应下, 下壁面附近气体密度大, 上壁面附近气体密度相对较小, 密度大的气体层始终位于密度小的气体层之下, 此时流动不会发生失稳. 随着弗劳德数的增加, 重力效应的影响逐渐减弱, 下壁面附近气体密度逐渐减小, 上壁面附近气体密度逐渐增大, 扰动增长率呈现上升趋势.

以 $Kn = 0.01$ 为例, 从图 4(a) 可以看出, $Fr \approx 1.37$ 是下临界参数, 弗劳德数小于 1.37, 上、下壁面之间

的密度为“上轻下重”分布 (如图 5), 流动始终保持稳定; 当弗劳德数大于 1.37 时, 上、下壁面之间的密度逐渐由“上轻下重”向“下轻上重”过渡, 流动极易失稳; 弗劳德数进一步增大, 下轻上重”比值增大, 流动又逐渐趋向稳定, 当弗劳德数大于 20.5 时 (上临界参数), 流动在任意波数下最大增长率均小于 0, 流动完全稳定.

当 $Kn = 0.03$ 时, 从图 4(b) 可以看出, 随着波数

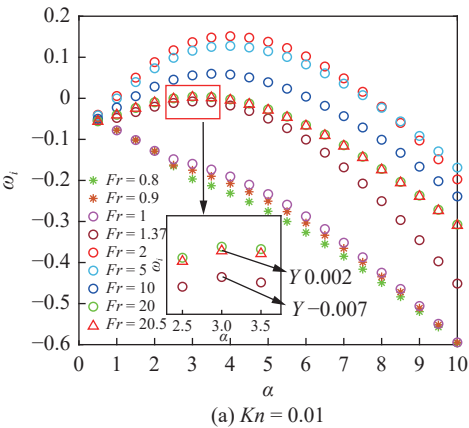


图 4 不同努森数、不同弗劳德数下增长率随波数的变化

Fig. 4 Variation of growth rate with wavenumber under different Kn s and Fr s

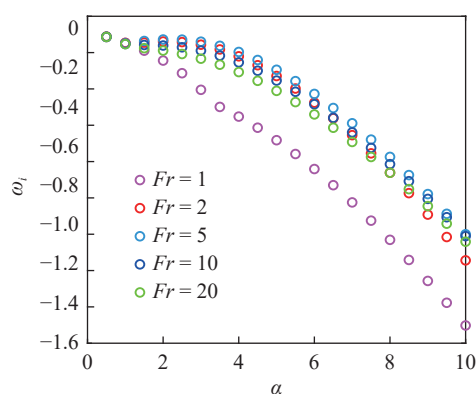
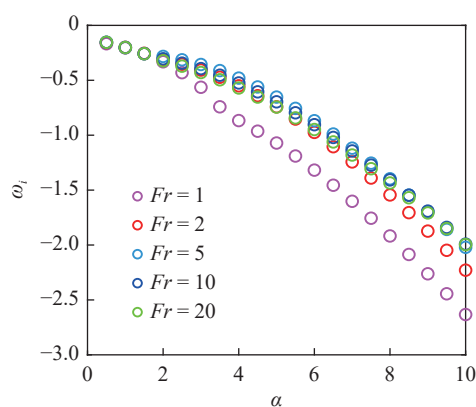
(b) $Kn = 0.03$ (c) $Kn = 0.05$

图 4 不同努森数、不同弗劳德数下增长率随波数的变化 (续)
Fig. 4 Variation of growth rate with wavenumber under different Kn s and Fr s (continued)

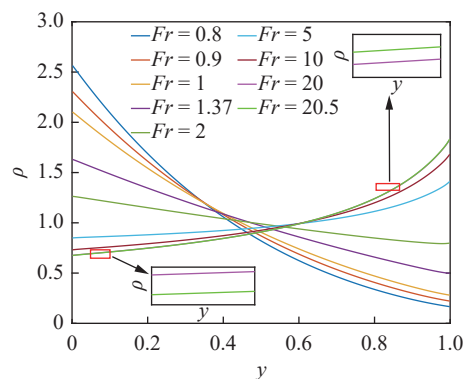


图 5 $Kn = 0.01$ 时密度随弗劳德数的变化
Fig. 5 Variation of density with Fr when $Kn = 0.01$

的增加, 增长率整体上呈现单调递减的趋势, 流动保持稳定状态. 进一步增加努森数, 如图 4(c), 其呈现出与图 4(b) 相似的变化趋势, 并且增长率整体上较图 4(b) 而言有下降趋势. 可见, 整体上稀薄效应对流动起到致稳作用.

3.2 普朗特数的影响

Ramachandran 等^[35]指出, 在一个标准大气压

下, 普朗特数随着温度升高发生显著变化, 变化范围约为 0.5 ~ 0.9. 此外, Hansen^[36] 和 Capitelli 等^[37]指出, 在高温且低压条件下, 普朗特数会进一步降低, $Pr = 0.2$ 的情况是可能存在的. 可见由于流动环境的影响使普朗特数出现较大的变化, 因此本节在 $r = 0.5$, $Fr = 2$ 的条件下选取 $Pr = 0.2, 0.5$ 和 0.8 这 3 种情况用来探究其对 Rayleigh-Bénard 对流稳定性的影响规律.

图 6 表示不同努森数、不同普朗特数下增长率随波数的变化情况. $Kn = 0.01$ 时, 如图 6(a) 所示, 随

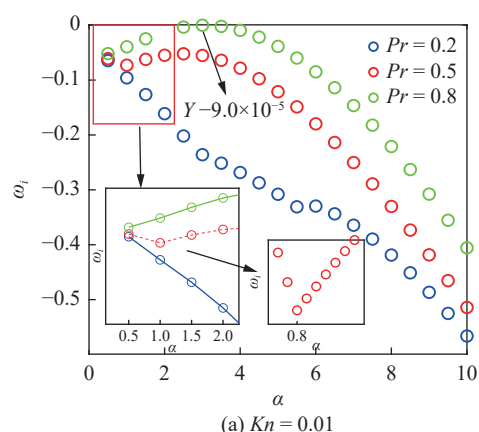
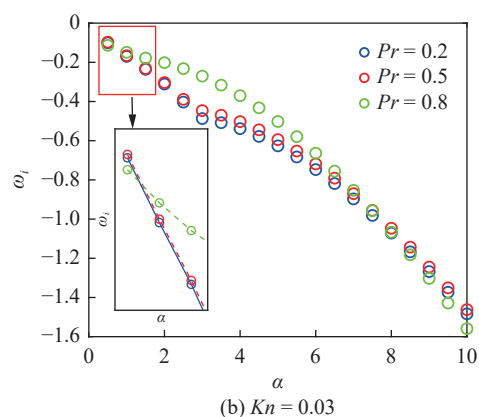
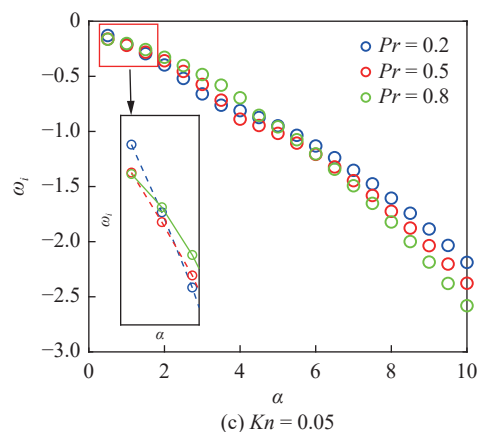
(a) $Kn = 0.01$ (b) $Kn = 0.03$ (c) $Kn = 0.05$

图 6 不同努森数、不同普朗特数下增长率随波数的变化
Fig. 6 Variation of growth rate with wavenumber under different Kn s and Pr s

着普朗特数的增加, 增长率呈现上升趋势, 当 $Pr = 0.8$ 且波数为 3 时, 增长率达到波峰, 峰值几乎等于 0, 此时流动处于失稳边缘, 若减小努森数, 流动可能会出现失稳现象。

比较有意思的是, $Pr = 0.2$ 时, 增长率随波数几乎呈单调递减趋势, $Pr = 0.8$ 时, 增长率随波数先增大后减小, 而 $Pr = 0.5$ 时, 增长率在波数约为 0.8 附近出现“拐点”, 然后随波数增大呈现先增大后减小的趋势。因此在波数 0.8 附近加密, 并观察波数从 0.6~1.0 时扰动密度特征函数, 如图 7 所示。可以看到, 随着波数的增加, 扰动密度的幅值在整个流域发生了显著的变化。波数小于 0.8 时, 扰动密度只有一个极值(极小值), 而波数从 0.8 开始, 扰动密度出现了两个极值。

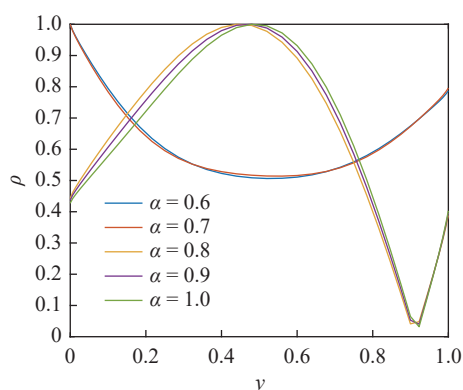


图 7 不同波数下密度的特征函数

Fig. 7 Characteristic function of density at different wavenumbers

随着努森数的增大, 如图 6(b) 和图 6(c) 所示, 增长率呈现出单调减小的趋势。图 6(b) 中发现, 波数为 0.5 时, $Pr = 0.5$ 对应的增长率最大, 随着波数从 1 持续增加到 7, 增长率随着普朗特数的增加呈现上升趋势, 之后随着波数从 7.5 开始增加, $Pr = 0.5$ 所对应的增长率反而最大, 其次是 $Pr = 0.2$, 最后才是 $Pr = 0.8$; 图 6(c) 中也有类似现象, 3 个普朗特数对应增长率的大小出现了交替变化, 只是随着努森数增大, 交替变化的位置点逐渐靠前。

另外, 从图 6 还可以看出, $Kn = 0.01$ 时, $Pr = 0.8$ 对应的最大增长率最大; $Kn = 0.03$ 时, $Pr = 0.5$ 对应的最大增长率最大; $Kn = 0.05$ 时, $Pr = 0.2$ 对应的最大增长率最大。即随着稀薄程度的增大, 最不稳定模态对应的普朗特数逐渐减小。

4 结论

本文针对稀薄气体效应和热对流效应耦合作用

下的流动稳定性问题, 发展了基于 Boltzmann-Shakhov 模型方程的全流域流动线性稳定性分析方法, 研究了稀薄效应下不同流动参数对 Rayleigh-Bénard 对流稳定性的影响, 得到以下结论。

(1) 上、下壁面之间的密度分布处于由“上轻下重”向“下轻上重”过渡的状态时, 流动往往容易失稳, 但如何定量地界定还需进一步研究。

(2) 在研究普朗特数对流动的影响时发现增长率在特定波数附近会出现“拐点”, 经分析其原因可能是扰动密度特征函数在这一波数前后从一个极值(极小值)向两个极值点突变。

(3) 随着稀薄程度的增大, 最不稳定模态对应的普朗特数逐渐减小, 稀薄情况下小普朗特数对稳定性的影响不容忽视。

参 考 文 献

- 1 朱广生, 段毅, 姚世勇等. 跨流域高速飞行器气动设计研究现状及思考. 宇航学报, 2023, 44(3): 358-367 (Zhu Guangsheng, Duan Yi, Yao Shiyong, et al. Research status and consideration on aerodynamic design of hypersonic flight vehicle covering various flow regimes. *Journal of Astronautics*, 2023, 44(3): 358-367 (in Chinese))
- 2 张围臣. 综合热效应影响下的高速飞行器气动/控制一体化设计. [博士论文]. 绵阳: 西南科技大学, 2024 (Zhang Guichen. Integrated aerodynamic/control design of high-speed aircraft under the influence of comprehensive thermal effect. [PhD Thesis]. Mianyang: Southwest University of Science and Technology, 2024 (in Chinese))
- 3 Adham AM, Mohd-Ghazali N, Ahmad R. Thermal and hydrodynamic analysis of microchannel heat sinks: A review. *Renewable & Sustainable Energy Reviews*, 2013, 21: 614-622
- 4 Wagner C, Harned N. Lithography gets extreme. *Nature Photonics*, 2010, 4(1): 24-26
- 5 Goshayeshi B, Di Staso G, Toschi F, et al. Numerical study of heat transfer in Rayleigh Bénard convection under rarefied gas conditions. *Physical Review E*, 2020, 102(1): 013102
- 6 Wu C, Bi L, Zhao J, et al. A novel linear stability method based on Shakhov Bhatnagar-Gross-Krook equations for Rayleigh-Bénard convection in rarefied gases. *Physics of Fluids*, 2024, 36(12): 124117
- 7 胡宇鹏, 李友荣. 长方体腔内关于密度极值温度对称加热-冷却时冷水瑞利-贝纳德对流稳定性. 力学学报, 2015, 47(5): 722-730 (Hu Yupeng, Li Yourong. Numerical investigation on flow stability of Rayleigh-Bénard convection of cold water in a rectangular cavity cooled and heated symmetrically relative to the temperature of density maximum. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(5): 722-730 (in Chinese))
- 8 徐炜, 包芸. 利用 FFT 高效求解二维瑞利-贝纳德热对流. 力学学报, 2013, 45(5): 666-671 (Xu Wei, Bao Yun. An efficient solution for 2D Rayleigh-Bénard convection using FFT. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(5): 666-671 (in Chinese))

- 9 Zhang J, Fan J, Fei F. Effects of convection and solid wall on the diffusion in microscale convection flows. *Physics of Fluids*, 2010, 22(12): 122005
- 10 Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961
- 11 Liu S, Xia SN, Yan R, et al. Linear and weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection of perfect gas with non-Oberbeck-Boussinesq effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, 845: 141-169
- 12 Requilé Y, Hirata SC, Ouarzazi MN. Viscous dissipation effects on the linear stability of Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, 146: 118834
- 13 Stefanov S, Roussinov V, Cercignani C. Rayleigh-Bénard flow of a rarefied gas and its attractors. I. Convection regime. *Physics of Fluids*, 2002, 14(7): 2255-2269
- 14 Manela A, Frankel I. On the Rayleigh-Bénard problem in the continuum limit: effects of temperature differences and model of interaction. *Physics of Fluids*, 2005, 17(11): 118105
- 15 Manela A, Frankel I. On the Rayleigh-Bénard problem in the continuum limit. *Physics of Fluids*, 2005, 17(3): 036101
- 16 Wang YP, Khayat RE, Zobaer MA. Onset of thermal convection of a weakly rarefied maxwellian gas: A continuum-slip approach. *Physics of Fluids*, 2021, 33(2): 026102
- 17 Wu C, Bi L, Zhao J, et al. Instability onset of Rayleigh-Bénard convection for diatomic rarefied gases: Effects of molecular interaction models and flow parameters. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, 220: 124923
- 18 Zhang WM, Meng G, Wei XY. A review on slip models for gas microflows. *Microfluidics and Nanofluidics*, 2012, 13: 845-882
- 19 Stefanov S, Cercignani C. Monte Carlo simulation of Bénard's instability in a rarefied gas. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 1992, 11(5): 543-553
- 20 Cercignani C, Stefanov S. Bénard's instability in kinetic theory. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1992, 21(4-6): 371-381
- 21 张俊, 樊菁. Rayleigh-Bénard 热对流的动理论分析. *科学通报*, 2008, 53(18): 2176-2180 (Zhang Jun, Fan Jing. Dynamic theory analysis of Rayleigh-Bénard thermal convection. *Chinese Science Bulletin*, 2008, 53(18): 2176-2180 (in Chinese))
- 22 Tzeng PY, Liu MH. Direct-simulation Monte Carlo modeling on two-dimensional Rayleigh-Benard instabilities of rarefied gas. *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, 2005, 47: 805-823
- 23 Fan J, Shen C. Statistical simulation of low-speed rarefied gas flows. *Journal of Computational Physics*, 2001, 167(2): 393-412
- 24 Zou S, Zhong CW, Bi L, et al. A new linear stability analysis approach for microchannel flow based on the Boltzmann Bhatnagar-Gross-Krook equation. *Physics of Fluids*, 2022, 34(12): 124114
- 25 Zou S, Bi L, Zhong CW, et al. A Novel linear stability analysis method for plane Couette flow considering rarefaction effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, 963: A33
- 26 Zou S, Bi L, Zhong CW, et al. A Normal-mode approach for high-speed rarefied plane Couette flow. *Physics of Fluids*, 2024, 36(1): 014121
- 27 Li ZH, Zhang HX. Gas kinetic algorithm using Boltzmann model equation. *Computers & Fluids*, 2004, 33(7): 967-991
- 28 Li MY, Lu CY, Chou CC. Mixed-regime computational fluid dynamics using the moving boundary truncated grid method for the Boltzmann-Bhatnagar-Gross-Krook model. *Physics of Fluids*, 2025, 37(2): 027123
- 29 曾嘉楠, 李琪, 吴雷. 分子气体稀薄效应的动理学建模. *空气动力学学报*, 2022, 40(2): 1-30 (Zeng Jianan, Li Qi, Wu Lei. Kinetic modeling of rarefied molecular gas dynamics. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2022, 40(2): 1-30 (in Chinese))
- 30 He XY, Shan XW, Doolen GD. Discrete Boltzmann equation model for nonideal gases. *Physical Review E*, 1998, 57(1): R13-R16
- 31 Shizgal B. A Gaussian quadrature procedure for use in the solution of the Boltzmann equation and related problems. *Journal of Computational Physics*, 1981, 41(2): 309-328
- 32 Malik MR. Numerical methods for hypersonic boundary layer stability. *Journal of Computational Physics*, 1990, 86(2): 376-413
- 33 Sorensen DC. Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1992, 13(1): 357-385
- 34 邹森. 基于 Boltzmann 模型方程的流动稳定性研究. [博士学位论文]. 西安: 西北工业大学, 2024 (Zou Sen. Flow stability study based on the Boltzmann model equation. [PhD Thesis]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2024 (in Chinese))
- 35 Ramachandran A, Saikia B, Sinha K, et al. Effect of Prandtl number on the linear stability of compressible Couette flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2015, 61: 553-561
- 36 Hansen CF. Approximations for the thermodynamic and transport properties of high-temperature air//National Advisory Committee for Aeronautics, 1958
- 37 Capitelli M, Colonna G, Gorse C, et al. Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 2000, 11(2): 279-289