

# 严格解码量子纠错码

曹涵彦<sup>1,2†</sup>, 冯东阳<sup>1,2,3†</sup>, 张潘<sup>1,3\*</sup>

1. 中国科学院理论物理研究所, 北京 100190

2. 中国科学院大学物理科学学院, 北京 100049

3. 中国科学院大学杭州高等研究院基础物理与数学科学学院, 杭州 310024

† 同等贡献

\* 联系人, E-mail: [panzhang@itp.ac.cn](mailto:panzhang@itp.ac.cn)

## Exact decoding of quantum error-correcting codes

Hanyan Cao<sup>1,2†</sup>, Dongyang Feng<sup>1,2,3†</sup> & Pan Zhang<sup>1,3\*</sup><sup>1</sup> Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China<sup>2</sup> School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China<sup>3</sup> School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS, Hangzhou 310024, China

† Equally contributed to this work

\* Corresponding author, E-mail: [panzhang@itp.ac.cn](mailto:panzhang@itp.ac.cn)doi: [10.1360/CSB-2025-5126](https://doi.org/10.1360/CSB-2025-5126)

量子计算因其在密码破译、药物设计、材料探索等领域的革命性潜力而备受瞩目, 被视为下一代计算范式的关键。然而, 这一巨大潜力面临着一个根本性挑战: 量子比特极其脆弱, 极易受到环境噪声的干扰。这些无处不在的噪声会导致硬件层面每秒发生数亿次错误, 使得当前量子计算机难以实现稳定、高精度的计算。为了跨越这一障碍, 量子纠错技术应运而生, 它如同连接原始硬件与可靠算法之间的核心桥梁。其核心思想在于: 将逻辑比特的信息冗余编码在多个物理比特之上, 形成一个更坚固的单元。通过持续测量特定的辅助比特, 系统能够实时诊断逻辑比特可能发生的错误类型, 并据此施加精准修正。这一闭环过程的核心目标, 正是在充满噪声的环境中主动压制逻辑比特上的错误, 最终在逻辑层面实现远超物理硬件水平的计算精度与可靠性。

为实现上述编码以及纠错过程, 研究人员提出了各种各样的纠错码, 如: 重复码、表面码以及各种低密度奇偶校验码等。在各种各样的量子纠错码中, 重复码是目前唯一在实验中大码距且错误率极低的量子纠错编码方案。这一独特优势使其成为评估量子硬件性能、检测量子比特漏失等缺陷的关键工具, 同时也为构建可扩展的容错量子计算机奠

定了基础。谷歌量子计算团队在2023年的实验中实现了码距为25的重复码, 展示了 $10^{-6}$ 量级的逻辑错误率; 后续研究发现造成这一微小错误率的原因是宇宙中高能射线的影响<sup>[1,2]</sup>, 在最近的实验中<sup>[3]</sup>, 谷歌量子计算团队采用码距29的重复码实验进一步将错误率降低到 $10^{-10}$ , 并推测错误的原因是未知的关联噪音。

为实现上述极低的错误率, 解码算法至关重要, 它必须尽可能精确, 以避免引入额外的算法误差。然而, 现有解码算法MWPM<sup>[4,5]</sup>虽然高效, 却并不是理论最优的解码方法, 因此有可能引入额外的逻辑错误。那么一个自然的问题是: 是否存在理论上最优的解码方法, 从根本上去除解码算法可能带来的逻辑错误呢?

近期, 我们提出了一种基于平面图自旋玻璃模型配分函数的精确解的最大似然解码算法, 并将这一创新方法命名为“Planar”<sup>[6]</sup>。利用Planar解码算法, 我们首次实现了在线路级噪音下重复码的严格最优解码, 并精确求解了线路级噪音下重复码的纠错阈值。此外, 我们将该方法应用于谷歌的实验数据以及北京量子信息科学研究院的超导量子芯片实验, 获得了比经典MWPM算法更低的逻辑错误率, 并指出谷歌实验中至少有四分之一的错误并非源自其声称的未知错误源, 而

引用格式: 曹涵彦, 冯东阳, 张潘. 严格解码量子纠错码. 科学通报, 2025, 70: 4387–4389

Cao H, Feng D, Zhang P. Exact decoding of quantum error-correcting codes (in Chinese). Chin Sci Bull, 2025, 70: 4387–4389, doi: [10.1360/CSB-2025-5126](https://doi.org/10.1360/CSB-2025-5126)

是由于所采用的解码算法本身。

Planar方法的精髓是将纠错码的最优解码问题映射到统计物理伊辛模型的配分函数计算问题上,并利用平面图伊辛模型严格计算方法加以求解。下面以重复码线路级噪音模型进行介绍。图1(a)展示了一个码距为3的比特翻转重复码的线路,在线路级噪音下,这个线路中每一个量子门操作都可能造成错误。为便于处理这种复杂的噪音模型,我们首先通过辅助比特的测量结果之间的线性异或(Xor)定义了奇偶校验探测器<sup>[7]</sup>。没有错误发生时这些探测器的结果都是平庸的;如果出现了非平庸的探测结果,则意味着线路中有些区域发生了错误,而这些探测信号可以被用来推断所发生的逻辑错误是什么。其中不同颜色的线路区域中发生的比特翻转噪音会改变图1(b)中相应颜色的奇偶校验探测器的测量结果。在这个例子中,逻辑比特只有发生比特翻转和没有翻转两种可能。理论上,最优的解码方法需要计算这两种情况所发生的概率值。但是,由于每种情况会对应到指数多个可能的错误构型(即所有区域上有没有发生错误的组合),概率值的计算需要把指数多个错误构型的发生概率进行求和。由此可见,这个计算与求和指数多个伊辛模型构型的权重来求配分函数是非常类似的。在这个例子中,我们会先将线路转换成为图1(b)中所示的纠错图,并将所有符合测量信号的错误构型的求和转换为这张图所对应的对偶图中自旋变量的求和<sup>[7]</sup>。进一步,通过量子纠错的统计物理映射<sup>[8]</sup>,我们将纠错图转换成图1(c)中所示的伊辛模型,此时逻辑错误的总概率就严格对应到此伊辛模型的配分函数求解了。我们注意到,这个伊辛模型中没有任何一条边会跨过另外一条边,因此我们称之为“平面图”伊辛模型。

在理论物理领域,伊辛模型的严格求解,特别是Onsager 1944年提出的二维伊辛模型严格解,具有里程碑的意义:它

证明了二维伊辛模型存在相变,为相变与临界现象提供了深刻的见解,并启发了后续统计物理严格理论的发展。在本文所述工作中,我们将有限大小平面图伊辛模型的一种严格求解方法——1952年所提出的Kac-Ward理论<sup>[9]</sup>,用于纠错码所对应的平面图伊辛模型,从而提出了应用于线路噪音重复码的最优解码方法。此方法不仅解码精度高,计算速度也非常快,通过实验数据拟合得到的纠错时间复杂度为 $O(N^{0.82})$ ,其中 $N$ 为对应伊辛模型变量的个数。

我们用大量的数值实验验证了严格解码方法的优越性。首先,对于已知噪音模型(例如退化噪音和超导SI1000噪音模型)的重复码,新方法首次得到了严格的纠错阈值,如图2(a)和(b)所示;其次,在谷歌最新的量子存储实验的实测数据之上<sup>[3]</sup>,我们对其重复码解码过程进行了重新解析并得到了比谷歌所使用方法更低的逻辑错误率,以及更小的“错误压低因子”图2(c),也因此展示了谷歌实验中的误差至少有四分之一不是来源于其所宣称的未知错误源,而是谷歌所采用的解码算法;最后,北京量子信息科学研究院的团队在72量子比特的芯片上开展了不同码距的无重置操作重复码量子存储纠错实验。在相关实验数据上的解码结果展示了在非理想的噪音模型条件下Planar算法仍然有相较于MWPM的显著优势,如图2(d)所示。

此外,我们提出的Planar解码方法具有普适性,可应用于所有最大似然解码问题,可映射为平面图自旋玻璃模型的量子纠错码体系。例如,Planar方法可以适用于表面码(surface code)、旋转表面码(rotated surface code)以及六边形码(hexagon code)在独立且无关联的码容量噪音下的解码<sup>[10]</sup>。在文献[6]的补充材料中,作者详细给出了表面码到平面自旋玻璃模型的完整映射方法以及相应的数值结果。这些数值实验结果充分证明,相较于传统的MWPM,Planar解码器展现出显著优势。

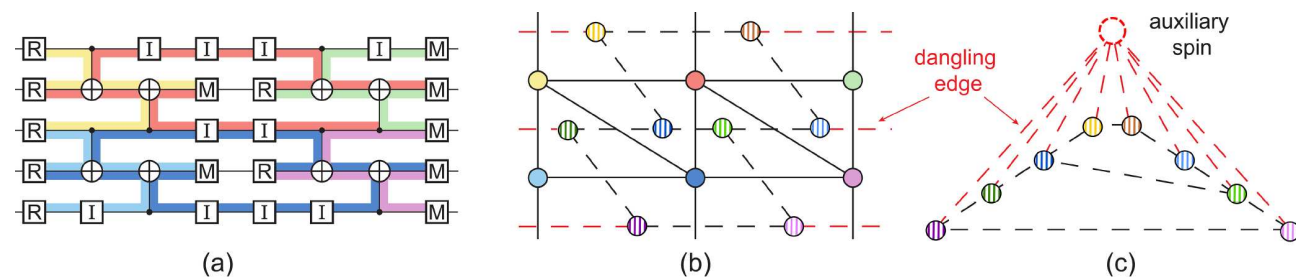


图1 (网络版彩色)(a) 码距为3且重复观测轮数为2的重复码纠错线路; (b) 探测器噪音模型对应的纠错图(实线)及其对偶图(虚线); (c) 增加辅助自旋后构成的平面图伊辛模型示意图<sup>[6]</sup>

Figure 1 (Color online) (a) Quantum error-correction circuit for a distance-3 repetition code with 2 rounds of syndrome measurement; (b) decoding graph (solid lines) corresponding to the detector error model and its dual graph (dashed lines). (c) diagram of the Ising model constructed by adding an auxiliary spin<sup>[6]</sup>

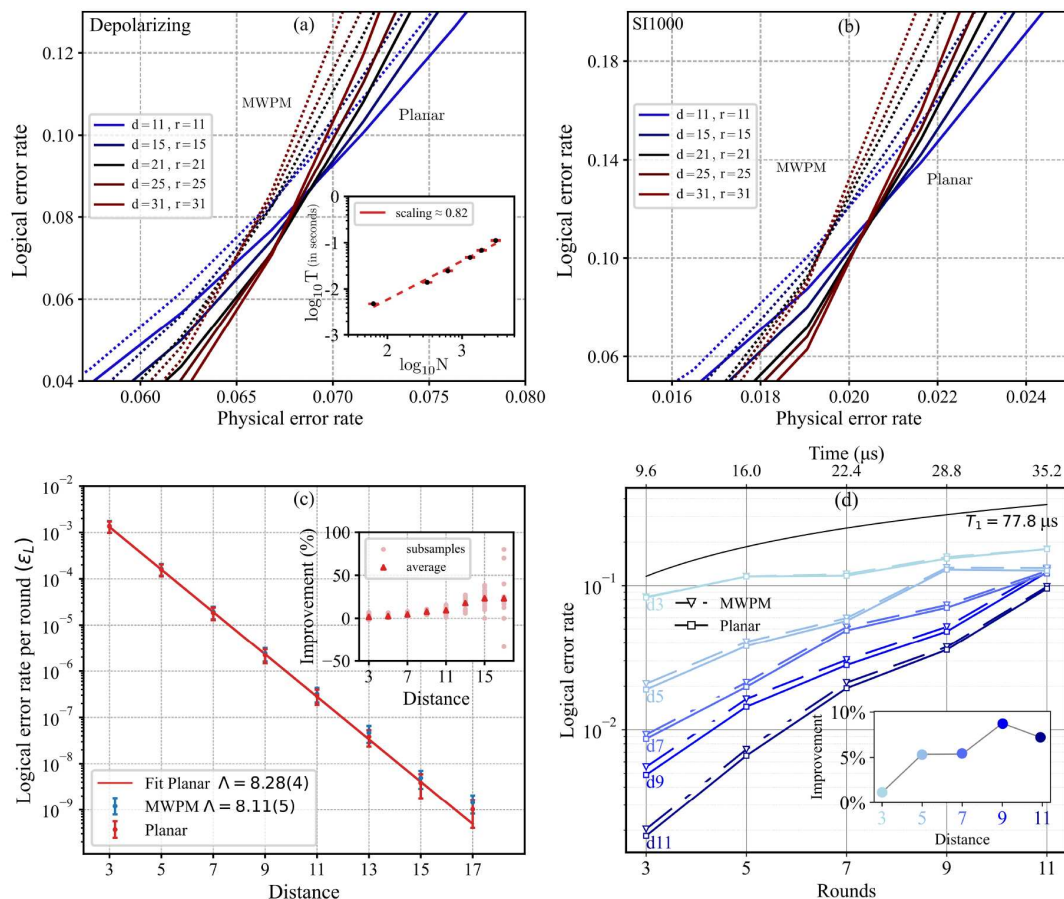


图2 (网络版彩色)(a) 退化噪声模型下重复码的Planar严格解码结果; (b) 超导SI1000噪声模型下重复码的严格解码结果; (c) 谷歌重复码量子存储实验数据的Planar解码结果; (d) 72比特超导量子芯片上所实现的重复码量子存储实验的解码结果<sup>[6]</sup>

**Figure 2** (Color online) (a) Exact decoding results for the repetition code under the depolarizing noise model; (b) exact decoding results for the repetition code under the superconducting SI1000 noise model; (c) decoding results for Google's repetition code quantum memory experimental data; (d) decoding results of the repetition code quantum memory experiment implemented on a 72-qubit superconducting quantum chip<sup>[6]</sup>

## 推荐阅读文献

- 1 Acharya R, Aleiner I, Allen R, et al. Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit. *Nature*, 2023, 614: 676–681
- 2 Li X G, Wang J H, Jiang Y Y, et al. Direct evidence for cosmic-ray-induced correlated errors in superconducting qubit array. 2024, arXiv: 2402.04245
- 3 Acharya R, Abanin D A, Aghababaie-Beni L, et al. Quantum error correction below the surface code threshold. *Nature*, 2025, 638: 920–926
- 4 Dennis E, Kitaev A, Landahl A, et al. Topological quantum memory. *J Math Phys*, 2002, 43: 4452–4505
- 5 Higgott O. PyMatching: a Python package for decoding quantum codes with minimum-weight perfect matching. *ACM Trans Quantum Computing*, 2022, 3: 1–16
- 6 Cao H, Zhao S, Feng D, et al. Exact decoding of quantum error-correcting codes. *Phys Rev Lett*, 2025, 134: 190603
- 7 McEwen M, Bacon D, Gidney C. Relaxing hardware requirements for surface code circuits using time-dynamics. *Quantum*, 2023, 7: 1172
- 8 Chubb C T, Flammia S T. Statistical mechanical models for quantum codes with correlated noise. *Annales de l'Institut Henri Poincaré D*, 2021, 8: 269–321
- 9 Kac M, Ward J C. A combinatorial solution of the two-dimensional Ising model. *Phys Rev*, 1952, 88: 1332–1337
- 10 Feng D, Cao H, Zhang P. PLANAR: a software for exact decoding quantum error correction codes with planar structure. *Chin Phys B*, 2025, 34: 050311