

概率守恒原理的历史起源与发展现状¹⁾

杨迪雄²⁾ 陈国海 李 辉

(大连理工大学工程力学系, 辽宁大连 116024)

(工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁大连 116024)

摘要 随机事件的不确定性传播与演化都遵循概率守恒原理, 它是与能量守恒原理和质量守恒原理一样基本的、自然界遵守的普遍规律。随机力学涵盖随机结构分析、随机振动、可靠性评价、可靠性优化设计和随机最优控制等内容, 而概率守恒原理在其中起着根本性、决定性的作用。随机静、动力系统的一对概率密度积分方程是刻画随机性传播与演化的统一基本方程。本文论述概率守恒原理的历史起源和发展现状, 追溯其在统计物理中的起源, 阐述其在概率论、随机力学中的发展状况。而且, 从概率守恒原理推导建立时间-空间域的概率密度积分方程, 并介绍概率密度积分理论和直接概率积分法的基本思想, 及其在静动力系统随机响应与结构可靠度分析和可靠性优化设计方面的研究进展, 旨在推动随机力学的科研和教学。

关键词 随机力学, 概率守恒原理, 直接概率积分法, 历史起源, 研究进展

中图分类号: O324 DOI: [10.6052/1000-0879-24-402](https://doi.org/10.6052/1000-0879-24-402)

文献标识码: A CSTR: [32047.14.1000-0879-24-402](https://cstr.cn/32047.14.1000-0879-24-402)

HISTORICAL ORIGIN AND CURRENT DEVELOPMENT OF THE PRINCIPLE OF PROBABILITY CONSERVATION¹⁾

YANG Dixiong²⁾ CHEN Guohai LI Hui

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian 116024, Liaoning, China)

Abstract Uncertainty propagation and evolution of random events obey the principle of probability conservation, which is a fundamental and universal law of nature, paralleling the principles of energy conservation and mass conservation. Stochastic mechanics involves the aspects of stochastic structural analysis, random vibration, reliability assessment, reliability-based design optimization, and stochastic optimal control, in which the principle of probability conservation plays a fundamental and decisive role. A pair of probability density integral equations for stochastic static and dynamic systems are the unified and fundamental equations that represent the propagation and evolution of randomness. This paper describes the historical origin and current development of the principle of probability conservation, tracing its origin in statistical physics and elaborating its development in probability theory and stochastic mechanics. Then, the probability density integral equation in the time-space domain based on the principle of probability conservation is derived and established. Moreover, the theory of probability density integral, basic idea of direct probability integral method

2024-10-08 收到第 1 稿, 2024-11-13 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金(12032008, 52378484)和国家重点研发计划项目(2020YFB1709401)资助。

2) 通讯作者: 杨迪雄, 博士, 教授, 研究方向为随机振动与结构可靠性、结构抗震减灾与优化设计、计算力学。

E-mail: yangdx@dlut.edu.cn

引用格式: 杨迪雄, 陈国海, 李辉. 概率守恒原理的历史起源与发展现状. 力学与实践, 2025, 47(2): 456-465

Yang Dixiong, Chen Guohai, Li Hui. Historical origin and current development of the principle of probability conservation. *Mechanics in Engineering*, 2025, 47(2): 456-465

and its recent developments in stochastic response analysis of static and dynamic systems, structural reliability evaluation and reliability-based optimum design are introduced, aiming to promote the advancement of research and teaching in stochastic mechanics.

Keywords stochastic mechanics, principle of probability conservation, direct probability integral method, historical origin, research advances

飞机、建筑、桥梁等会受到大气湍流、风载荷、地震动、波浪等随机激励作用, 而且结构本身也存在材料物理性质和构件几何尺寸等方面的随机不确定性。为保障结构服役安全, 在工程设计和运维阶段人们必须科学地考虑这些随机因素。随机力学旨在解决考虑随机不确定性因素影响下工程结构与工业装备的力学分析计算和设计问题, 其研究内容主要包括: 输入不确定性量化与表征、随机响应分析、可靠性评定、可靠性优化设计和随机最优控制^[1]。结构随机响应分析通常计算响应的概率密度函数 (probability density function, PDF) 和统计矩, 并探究随机性在结构中的传播规律。对于含随机参数场的静力问题, 研究者发展了摄动法和谱随机有限元法。然而, 针对非线性和随机性耦合的问题, 随机有限元分析仍待提出高效、简便的算法。进一步, 需要对结构进行可靠度分析与基于可靠度的优化设计。针对静力可靠度分析, 研究者发展了近似法 (如: 一次可靠度方法、二次可靠度方法、矩方法)、代理模型法和随机抽样法。前两种方法主要是对功能函数进行不同程度的近似, 得到近似可靠度, 适用性有限。蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo simulation, MCS) 的通用性强, 但计算成本极高, 且有随机收敛性。为此, 一些改进的随机抽样法 (如: 重要性抽样法、子集模拟、线抽样) 被提出, 但是这类方法的通用性降低, 且对于大型复杂结构而言, 计算成本仍然较高。

对于受随机激励作用的线性或弱非线性动力系统, 林家浩等^[2]提出了随机振动功率谱高效分析的虚拟激励法, 这是矩传递的方法。非线性随机振动与动力可靠度分析方法主要是基于两类概率密度演化方程: 一类是经典的福克-普朗克-柯尔莫哥洛夫 (Fokker-Planck-Kolmogorov, FPK) 方程^[3], 它刻画随机动力响应的概率密度函数的演化规律, 以此为基础, 研究者发展了扩散过程法。然而, 该二阶偏微分方程的漂移项和扩散项

耦合了系统动力学方程, 求解难度大, 并不适用于非高斯激励及含随机参数的多自由度大型结构。第二类为李杰和陈建兵基于概率守恒原理建立的广义概率密度演化方程, 该方程刻画响应和输入随机向量两者的联合概率密度函数的演化规律^[4]。他们提出了随机动力学分析的概率密度演化方法, 将广义概率密度演化方程与系统动力学方程解耦逐步依次求解。但是, 该方程是一个双曲型偏微分方程, 并且具有间断初始条件, 常采用总变差不增 (total variation diminishing) 格式的有限差分法进行求解, 但计算较为复杂, 且难以避免数值耗散和色散问题。对于同时含有随机参数和随机激励的强非线性系统, 进行随机响应和可靠度统一、高效分析, 是一个十分重要但具有挑战性的难题。

当前, 随机力学主要面临 3 个挑战: 第一, 结构随机响应分析、可靠度分析、可靠性优化设计通常是分别采用不同的方法求解; 第二, 对于结构随机静力学和随机动力学问题、线性和非线性问题缺乏通用、高效、简便的方法; 第三, 面对非线性、大规模、多物理场结构系统的随机性传播与量化分析需求, 亟待发展更稳定、更准确、更高效的计算方法。因此, 本文致力于建立适用于线性/非线性、静力/动力系统随机响应、可靠度分析、基于可靠度的优化设计的统一理论和普适、高效计算方法。首先回顾随机力学中重要的概率守恒原理的起源与发展, 然后介绍近年来作者团队基于概率守恒原理的密度积分描述 (即概率密度积分方程) 提出的概率密度积分理论和随机力学的直接概率积分法, 展示其在静/动力系统随机响应分析^[1]、可靠性评价^[5-6]和可靠性优化设计^[7-10]等方面的研究进展, 以推动随机力学理论的发展、教学与工程应用。

1 概率守恒原理的历史回顾

刘俊丽等^[11]在《中国力学史与方法论研究二

十年回顾》一文中深刻指出：“对力学及分支学科的发展简史进行研究与总结，从力学发展的历史，总结寻找力学发展的客观规律，指导力学学科的发展和建设，从力学的过去时探索力学的将来时。”受此启发，我们梳理总结随机力学的理论基础，即概率守恒原理的发展历史，包括其在统计物理中的起源，并展望它的未来。

对于一个随机动力系统，从输入向量到输出响应的过程可以表示为映射

$$\mathcal{G}: Y = g(\Theta, \mathbf{r}, t) \quad (1)$$

其中， Θ 表示随机输入向量， $\mathbf{r}$ 为空间位置坐标向量。

概率守恒原理是概率论和随机力学的重要基本原理^[4, 12-14]，表述为：随机性从系统输入到输出的传播、演化过程中，由随机源确定的概率测度保持不变。一般而言，系统的随机源来自随机结构参数和随机激励，记作输入向量 Θ 。随机静、动力系统的概率守恒原理分别表达为如下的一对概率守恒方程

$$\int_{\Omega_Y} p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\Theta} p_\Theta(\theta_s) d\theta_s \quad (2)$$

$$\int_{\Omega_Y} p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\Theta} p_\Theta(\theta_d) d\theta_d \quad (3)$$

式(2)中， $p_\Theta(\theta_s)$ 和 $p_Y(\mathbf{y})$ 分别表示静力系统随机输入向量和随机输出响应的联合概率密度函数， Ω_Θ 和 Ω_Y 分别表示输入和输出向量空间，此式表征随机静力系统的概率守恒原理。式(3)中， $p_\Theta(\theta_d)$ 表示动力系统随机输入向量的联合概率密度函数，而 $p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)$ 则表示在空间点 $\mathbf{r}$ 处的随机响应 $\mathbf{y}$ 在 t 时刻的联合概率密度函数。概率守恒原理具有时间平移对称性，意味着概率守恒方程(3)在任意时刻均成立，即在任何时刻，系统某一个或多个输出响应发生的概率总是不变的，它等于系统输入发生的概率，但是其概率密度函数 $p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)$ 是变化的。

关于概率守恒原理的起源最早可以追溯到统计物理^[15-19]。统计物理是以概率论和系综理论为基础发展起来的。平衡态统计物理的基本方程是 Liouville 方程，而非平衡态统计物理的基本方程是 Boltzmann 方程。1838 年，针对满足哈密顿力学正则性的气体，Liouville 建立了著名的

Liouville 方程^[17-19]。原来得到的方程只是数学形式，后人赋予了其概率统计的含义^[19]。现代版本的 Liouville 方程写为

$$\frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \sum_{l=1}^m \frac{\partial [p_Y(\mathbf{y}, t) A_l(\mathbf{y}, t)]}{\partial y_l} = 0 \quad (4)$$

其中， $A_l(\mathbf{y}, t)$ 表示状态向量 $\mathbf{y}$ 的导数项， p 为相密度。建立方程(4)的前提条件是相密度（即粒子数的概率密度函数）守恒原理，即相轨道上相点数密度随时间演化而不变^[16-17]。实际上，相密度守恒原理即为体积元（微元体）上的概率守恒原理。在统计物理中，统计系综是一个重要的概念。系综是指在相空间的某一控制区域内，不同时刻大量宏观性质完全相同的力学系统的集合。根据统计系综理论，系综中的粒子数是不变的^[19]，而且全同粒子的质量密度相同，这就表明质量守恒。从另一个角度，利用相密度，即粒子数的概率密度函数的概念，则“系综中的粒子数是不变的”也意味着系综的概率守恒。质量守恒原理在内涵上和形式上与概率守恒原理是非常相似的，在统计物理和随机动力学的文献^[1, 20-21]中都可以看到这一点。值得指出的是，随机动力学中的 Liouville 方程旨在刻画初始条件具有随机性的马尔科夫系统的不确定性传播、演化规律^[3-4, 13]。

1872 年，Boltzmann 同样依据相密度守恒原理，考虑气体分子间相互作用的碰撞项，建立了分子动理学理论的 Boltzmann 方程^[17, 19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = \\ \int d^3\mathbf{v}_1 \int d\Omega'_1 v_r \frac{d\sigma_{11}}{d\Omega'_1} [p(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t) \cdot \\ p(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t) - p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)p(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)] \end{aligned} \quad (5)$$

式中， $\mathbf{r}$ 表示空间坐标向量， $\mathbf{v}$ 为粒子运动速度， $\mathbf{F}$ 是作用在粒子单位质量上的力， p 表示相密度，等式右边项表示粒子相互碰撞项，其中碰撞前始态中粒子 1 和粒子 2 的速度在 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 附近的 $d^3\mathbf{v}_1$ 和 $d^3\mathbf{v}_2$ 范围内，碰撞后末态中粒子 1 和粒子 2 的速度在 $\mathbf{v}'_1$ 和 $\mathbf{v}'_2$ 附近的 $d^3\mathbf{v}'_1$ 和 $d^3\mathbf{v}'_2$ 范围内， v_r 表示碰撞的两个粒子的相对速度， $d\Omega'_1$ 是碰撞位置附近的微元， σ_{11} 为碰撞截面。

为简化表达，后续的随机输入向量及其实现分别用 Θ 和 θ 表示。除了全域上的，概率守恒原

理在微元体上的表达式为

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{y} = p_\Theta(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (6)$$

当随机输出向量 $\mathbf{Y}$ 和随机输入向量 $\boldsymbol{\Theta}$ 的维度相同时，由式 (6) 两边除以 $d\mathbf{y}$ 得到概率密度变换公式^[12, 22]

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = p_\Theta(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} / d\mathbf{y} = p_\Theta [g^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)] \cdot |J_{g^{-1}}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)| = p_\Theta(\boldsymbol{\theta}) / |J_g(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)| \quad (7)$$

其中， $g^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)$ 表示 $\mathbf{Y} = g(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{r}, t)$ 的逆函数，这里要求 $\mathbf{Y} = g(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{r}, t)$ 是单调函数； $|J_g(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)|$ 为映射函数 g 的雅可比矩阵的行列式。概率密度变换公式 (7) 的前提条件是概率守恒原理，它是概率论中表达输出随机向量的概率密度函数和输入随机向量的概率密度函数之间关系的公式之一。但是该变换公式对状态向量的映射单调性以及输入和输出变量数目要求严格，而且对具有隐式映射关系的结构系统很难求解其雅可比矩阵，所以它难以用于实际工程问题。概率密度变换公式的适用范围有限，它并非基本公式。下面第 2 节将从概率守恒原理出发，导出表征随机不确定性传播与演化的普适基本公式——时间-空间域概率密度积分方程。

由此可见，概率守恒原理最早在统计物理中已有所体现。而后，概率守恒原理逐渐得到概率论（包括随机微分方程）和随机动力学学者的重视。1967 年，Syski^[12] 提出了概率守恒原理的概念和内涵，给出了随机动力系统的概率守恒方程，并将其作为概率论基本原理。1973 年，随机振动与结构振动控制专家宋祖德介绍了概率守恒原理，展示了静力系统的概率守恒方程^[13]。遗憾的是，这一重要原理在很长一段时间内没有被用于解决实际工程问题。从 2003 年起，李杰和陈建兵基于概率守恒原理的随机事件描述推导建立了广义概率密度演化方程^[4]，提出了结构随机动力响应和可靠度分析的概率密度演化方法。李杰和陈建兵的工作打破了概率守恒原理被长期忽视的不利局面，使这一原理在工程应用中发挥了重要作用，并受到了随机力学界的关注。

2 概率密度积分方程

本节基于概率守恒原理推导建立具有普适性

的时间-空间域概率密度积分方程。根据狄拉克 δ 函数的筛选性，输出空间 Ω_Y 的状态向量 $\mathbf{y}$ 在时间-空间域中的联合概率密度函数可表示为

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = \int_{\Omega_Y} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{y}) p_Y(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{s} \quad (8)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克函数， $\mathbf{s}$ 表示输出空间 Ω_Y 中的积分向量，也是随机向量 $\mathbf{Y}$ 的实现，与 $\mathbf{y}$ 具有相同的含义，都满足映射 $\mathcal{G} : \mathbf{Y} = g(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{r}, t)$ 。

由微元体上的概率守恒方程： $p_Y(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{s} = p_\Theta(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$ ，将其代入式 (8)，则积分向量从 $\mathbf{s}$ 变换到 $\boldsymbol{\theta}$ ，积分域也由 Ω_Y 变换到 Ω_Θ ，即得

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = \int_{\Omega_\Theta} \delta[g(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t) - \mathbf{y}] p_\Theta(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (9)$$

由狄拉克函数的对称性，则式 (9) 变为

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = \int_{\Omega_\Theta} \delta[\mathbf{y} - g(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t)] p_\Theta(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (10)$$

式 (10) 是刻画时间-空间域随机动力系统随机不确定性传播与演化规律的多维或高维积分公式，我们称之为概率密度积分方程^[4]，它在任意时刻都成立，具有时间平移不变性。概率密度积分方程表征了随机响应 $\mathbf{Y}$ 的 PDF 与随机输入 $\boldsymbol{\Theta}$ 的 PDF 之间的关系，其中的狄拉克 δ 函数蕴含了线性/非线性系统的物理变化规律。随机动力学中有一个表征高斯白噪声激励作用下马尔科夫系统转移概率密度的积分方程：查普曼-柯尔莫哥洛夫-斯莫拉伍斯基（Chapman-Kolmogorov-Smolowski, CKS）方程（从 CKS 方程可导出 FPK 方程）。然而，相比于 CKS 方程，概率密度积分方程不要求随机动力系统满足马尔可夫性质（即无后效性），适用于复杂随机激励作用下的一般随机系统。作为概率守恒原理的积分表达式，概率密度积分方程 (10) 实际上是密度形式的全概率公式

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = \int_{\Omega_\Theta} p_{Y|\Theta}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t) p_\Theta(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$$

式 (10) 中的狄拉克函数 $\delta[\mathbf{y} - g(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t)]$ 是一个线性泛函，在概率论中的含义即为条件概率密度函数 $p_{Y|\Theta}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t)$ 。 $p_{Y|\Theta}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t)$ 代表给定随机输入 $\boldsymbol{\theta}$ 的条件下随机响应 $\mathbf{y}(\mathbf{r}, t)$ 的 PDF，当随机输入给定 $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}$ 时，则响应 $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$ 的唯一可能值是 $g(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t)$ ，因此该条件 PDF 可写为 $p_{Y|\Theta}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t) = \delta[\mathbf{y} - g(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}, t)]$ 。

$\mathbf{r}, t)$], 即有如下公式

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = \int_{\Omega_\Theta} p_{Y|\Theta}(\mathbf{y}|\Theta = \theta, \mathbf{r}, t)p_\Theta(\theta)d\theta = \int_{\Omega_\Theta} \delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r}, t)]p_\Theta(\theta)d\theta \quad (11)$$

对于随机静力系统, 输出向量与时间坐标无关, 则概率密度积分方程可表示为

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = \int_{\Omega_\Theta} \delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r})]p_\Theta(\theta)d\theta \quad (12)$$

另一方面, 从概率密度积分方程出发, 对方程两边关于 $\mathbf{y}$ 积分, 可推导得到概率守恒方程

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_Y} p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{y} &= \int_{\Omega_Y} \int_{\Omega_\Theta} \delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r}, t)] \cdot \\ p_\Theta(\theta)d\theta d\mathbf{y} &= \int_{\Omega_\Theta} \left\{ \int_{\Omega_Y} \delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r}, t)] \cdot \right. \\ d\mathbf{y} \Big\} p_\Theta(\theta)d\theta &= \int_{\Omega_\Theta} p_\Theta(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

由此证明了: 概率密度积分方程是概率守恒方程的充分必要条件这一基本定理。因为概率密度积分方程实际上是密度形式的全概率公式, 所以与概率密度变换公式 (7) 一样, 全概率公式也遵守概率守恒原理。此外, 由概率密度积分方程可导出 FPK 方程^[23]和 Liouville 方程, 表明概率密度积分方程与概率密度微分方程在某些情形下是等价的。并且, 概率密度积分方程 (10) 适用于工程中常见的非高斯、非平稳随机激励, 是描述时空动力系统不确定性传播、演化的统一基本方程。著名数学家冯康曾精辟地指出: “同一物理定律的不同的数学表达, 尽管物理上等价, 但计算上不等效”。确实, 概率密度积分方程的求解^[1]相较于常见的几种概率密度微分方程的求解更方便和高效。回想起概率密度和能量密度这两个密度概念, 与之相关的基本方程都自然地表示为更易求解的积分方程。

3 概率密度积分理论和直接概率积分法

基于前面建立的概率密度积分方程, 我们推导了随机响应统计矩、可靠度及其灵敏度分析的概率密度积分公式, 建立了解决随机静/动力系统随机响应分析、可靠度评价和可靠性优化设计及最优控制问题的概率密度积分统一理论。进而,

提出了针对多维/高维概率密度积分高效计算的直接概率积分法。

3.1 概率密度积分理论

借助概率密度积分方程, 容易导出在输入概率空间积分的随机时变响应的均值表达式^[24]。在经典随机振动理论中, 某个随机时变响应 $Y(\mathbf{r}, t)$ 的均值定义为

$$E[Y(\mathbf{r}, t)] = \int_{\Omega_Y} yp_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{y} \quad (14)$$

公式 (14) 是响应概率空间上的概率密度积分公式, 然而响应 PDF 是未知量, 经典公式不便计算。于是将概率密度积分公式 (10) 代入式 (14), 可得计算随机动力响应均值的新公式

$$\begin{aligned} E[Y(\mathbf{r}, t)] &= \int_{\Omega_Y} \int_{\Omega_\Theta} y\delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r}, t)]p_\Theta(\theta) \cdot \\ d\theta d\mathbf{y} &= \int_{\Omega_\Theta} \left\{ \int_{\Omega_Y} y\delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r}, t)]d\mathbf{y} \right\} \cdot \\ p_\Theta(\theta)d\theta &= \int_{\Omega_\Theta} \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r}, t)p_\Theta(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

值得说明的是, 式 (15) 的静力形式 $E[Y(\mathbf{r})] = \int_{\Omega_\Theta} \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r})p_\Theta(\theta)d\theta$ 在有的教材中有所展示, 但是并未给出推导过程, 而概率密度积分方程中狄拉克 δ 函数的使用使得式 (15) 的推导过程简单易懂。类似地, 随机动力响应的标准差与高阶统计矩、相关函数、协方差函数、相关系数函数等统计量也容易推导得出。

结构可靠度是指在规定的条件和条件下, 结构完成预定功能的概率。长期以来, 动力可靠度和体系可靠度的准确高效分析是结构可靠性理论发展中悬而未决的挑战性难题^[25-26]。对于随机动力系统, 构造响应的极值映射 $\mathcal{F}: Y_{\text{ext}} = \max_{0 < \tau \leq t} \{Y(\Theta, \tau)\}$ 。相应的功能函数表示为 $Z(t) = f(\Theta, t) = B_{\text{ext}} - Y_{\text{ext}}(t) = B_{\text{ext}} - \max_{0 < \tau \leq t} \{Y(\Theta, \tau)\}$ (B_{ext} 表示极值响应 Y_{ext} 的阈值), 当 $Z(t)$ 小于零时, 结构失效。因此, 将时变功能函数的概率密度函数在安全域内积分即可得到结构首次超越动力可靠度的新公式^[5, 24]

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \Pr\{Z(t) > 0\} = \int_0^\infty p_Z(z, t)dz = \\ \int_0^\infty \left\{ \int_{\Omega_\Theta} \delta[z - f(\theta, t)]p_\Theta(\theta)d\theta \right\} dz &= \\ \int_{\Omega_\Theta} \mathcal{H}[f(\theta, t)]p_\Theta(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\mathcal{H}(\cdot)$ 表示 Heaviside 函数, 与狄拉克函数的关系为 $\delta(x) = d\mathcal{H}(x)/dx$ 。对于随机静力系统, 类似地基于功能函数的概率密度积分方程严密地导出静力可靠度公式 $P_f = \int_{\Omega_{\Theta}} \mathcal{H}[f(\theta)] p_{\Theta}(\theta) d\theta$, 这正是可靠度分析蒙特卡洛模拟采用的公式 (其中的指示函数即为 Heaviside 函数), 过去该公式是基于直观计数概念得到的。

由于传统的体系可靠度分析方法存在构造与搜索失效模式的组合爆炸和相关系数计算困难的问题, 常用的方法, 如概率网络评估、分支定界法等很难准确、高效地评估结构的体系可靠度。但是因为基于极值映射建立的整体功能函数的概率密度积分方程内蕴各失效模式间的相关性, 避免了组合爆炸问题, 也不需要计算复杂的相关系数, 所以直接概率积分法可方便地计算体系可靠度, 包括动力系统的体系可靠度^[6, 24]。

可靠度灵敏度分析可指导结构响应的不确定性控制和基于可靠度的优化设计, 是不确定量化的重要环节之一。过去的可靠度灵敏度分析通常采用有限差分这种蛮力计算方式。基于随机动力系统的概率密度积分方程, 我们推导了失效概率对随机性和确定性设计变量的灵敏度分析半解析公式 (17) 和公式 (18)^[10]。采用 Heaviside 函数直接处理概率约束, 提高了结构优化的寻优能力, 建立了基于直接概率积分法的结构静/动力可靠性优化设计高效新算法。

$$\frac{\partial P_f(\mathbf{X}, \mu_{\Theta}, t)}{\partial \mu_{\Theta_i}} = \int_{\Omega_{\Theta}} \mathcal{H}[-f(\mathbf{X}, \theta, t)] \frac{\partial p_{\Theta}(\theta)}{\partial \mu_{\Theta_i}} d\theta \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f(\mathbf{X}, \mu_{\Theta}, t)}{\partial X_i} &= - \int_{\Omega_{\Theta}} \delta[f(\mathbf{X}, \theta, t)] \cdot \\ &\quad \frac{\partial f(\mathbf{X}, \theta, t)}{\partial X_i} p_{\Theta}(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (18)$$

其中, P_f 为失效概率, $P_f = 1 - P_r$, $\mathbf{X}$ 表示系统中的确定性向量, μ_{Θ} 代表随机向量 Θ 的均值。对于随机静力系统, 同样借助概率密度积分方程获得可靠度灵敏度的积分表达式, 进而进行可靠性优化设计。对随机变量分布参数的灵敏度计算采用与可靠度分析相同的代表点和赋得概率, 不需额外的结构分析, 计算效率极高; 对于确定性变量的灵敏度计算, 根据狄拉克函数的特点, 只需要计算少量代表性响应确定性变量的灵敏度,

计算效率仍然较高。

综上可见, 求解随机静/动力系统响应 PDF 的概率密度积分方程, 及基于概率密度积分方程导出的统计矩公式、可靠度公式和可靠度灵敏度公式都是多维/高维概率密度积分公式。本质上, 随机力学和概率论的关键计算公式离不开多维/高维概率密度积分^[25-27], 但是以往因为缺乏高效的多维/高维积分算法, 人们发展了多种多样的近似、简化求解方法。从概率密度积分的新视角, 研究和解决随机力学与概率论问题的理论即为概率密度积分理论。它是一种内禀的、统一的方法论, 重塑了随机力学和概率论的知识内容。在概率密度积分理论框架下可以统一、高效地进行结构静动力随机响应、可靠度和可靠度灵敏度的数值求解, 并实现可靠性优化设计^[8, 10]、基于可靠度的拓扑优化设计^[9]和结构随机最优控制^[7]。下面介绍计算多维/高维概率密度积分的直接概率积分法的具体技术和研究进展。

3.2 直接概率积分法的计算技术和研究进展

为了获得静/动力随机响应的概率密度函数, 我们提出了直接概率积分法, 从而直接、高效求解概率密度积分方程这种含狄拉克 δ 函数的多维/高维积分问题^[1]。将静/动力系统的概率密度积分方程与系统控制方程 (用显式或隐式映射表示) 联立, 如式 (19) 所示, 就可以实现静/动力系统的随机性传播、演化分析

$$\begin{aligned} \text{静力: } &\begin{cases} \mathcal{G}: \mathbf{Y} = \mathbf{g}(\Theta, \mathbf{r}) \\ p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = \int_{\Omega_{\Theta}} \delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r})] p_{\Theta}(\theta) d\theta \end{cases} \\ \text{动力: } &\begin{cases} \mathcal{G}: \mathbf{Y} = \mathbf{g}(\Theta, \mathbf{r}, t) \\ p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = \int_{\Omega_{\Theta}} \delta[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta, \mathbf{r}, t)] p_{\Theta}(\theta) d\theta \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

容易看出, 概率密度积分方程与系统控制方程在计算上是解耦的。为解算概率密度积分方程所示的多维/高维积分, 直接概率积分法利用了两个技术: 概率空间剖分和狄拉克函数光滑化技术。首先利用概率空间剖分技术, 采用低偏差序列作为初始代表点 (即积分点), 再进行点集重整, 并计算每个代表点的赋得概率 (即积分权重), 以得到高维概率空间内的低偏差点集及其赋得概率 $\{\theta_q, P_q\}, q = 1, 2, \dots, N$ 。

在两步选点法^[28]的基础上, 我们通过发展先进的概率空间剖分方法, 高效地求解了高达 1000 维的超高维问题, 这对于高维数值积分而言

是一个重要突破。其次, 由于狄拉克 δ 函数是含奇异性的广义函数, 为了数值求解, 采用高斯函数对狄拉克函数光滑化, 本质上是在计算网格上插值, 式 (12) 和式 (10) 分别写为

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[\mathbf{y}-\mathbf{g}(\theta_q, \mathbf{r})]^2/2\sigma^2} P_q \quad (20)$$

$$p_Y(\mathbf{y}, \mathbf{r}, t) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[\mathbf{y}-\mathbf{g}(\theta_q, \mathbf{r}, t)]^2/2\sigma^2} P_q \quad (21)$$

采用加权核密度估计法可自适应地确定式 (19) 和式 (20) 中高斯函数的光滑化参数 σ , 具体步骤参见文献 [24]。

式 (20) 和式 (21) 包含了代表性响应 $\mathbf{g}(\theta_q, \mathbf{r})$ 和 $\mathbf{g}(\theta_q, \mathbf{r}, t)$, 对于显式映射, 代表点上的响应容易获得, 但对于隐式映射 (如: 矩阵代数方程、

常微分方程、偏微分方程), 还涉及代表性响应的数值计算。MCS 利用随机采样 (随机选取代表点) 和等权重计算多维积分问题, 拟蒙特卡洛模拟 (quasi Monte Carlo simulation, QMCS) 利用基于数论方法的确定性采样 (如低偏差的 Sobol 点集) 和等权重计算多维积分, 效率比 MCS 得到显著提高。而对于直接概率积分法, 也利用基于数论方法的确定性采样, 但采用不等权重计算多维积分, 通常数百次自适应采样即可获得高精度的积分结果, 精度优于 QMCS^[24]。因此, 直接概率积分法通过解耦计算系统控制方程和概率密度积分方程, 获得静/动力系统输出响应的 PDF 和联合 PDF, 是随机不确定性传播分析的统一、高效方法。图 1 为随机动力系统的概率从输入空间到输出空间的传播示意图^[1]。

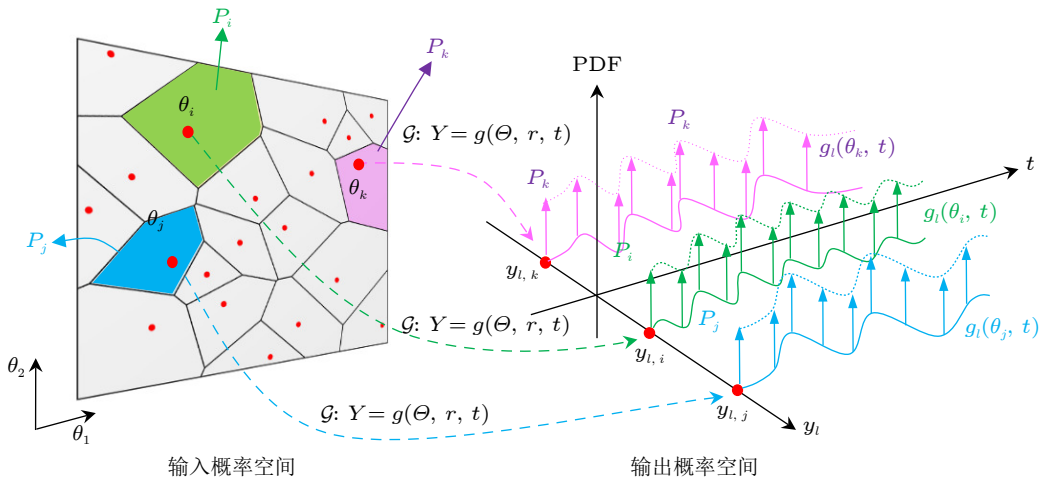


图 1 随机动力系统从输入空间到输出空间的概率传播

需要指出的是, 在直接概率积分法的第一篇关于静/动力系统随机响应分析的工作完成后, 我们了解到 Fan 等^[29] 针对随机动力系统发表了相关论文。该文从广义概率密度演化方程出发, 利用特征线法得到了狄拉克函数表示的形式解^[29], 它实际上就是动力系统的概率密度积分方程。然后, 引入高斯函数对狄拉克函数光滑化, 并利用数论方法产生代表点, 进而获得响应的概率密度函数。这两项工作^[1,29] 在研究思路、基本方程的推导、计算技术和计算效果方面不同。

由式 (15) 可见, 采用直接概率积分法计算随机时变响应的均值和统计矩时, 只要已知随机输入的概率密度函数和求解系统响应, 不需要光滑

化狄拉克 δ 函数。从式 (16) 可见, 结构可靠度的计算是一个含 Heaviside 函数的多维/高维积分问题, 只需进行概率空间剖分, 也无需进行狄拉克函数光滑化。概率密度积分和结构系统控制方程是解耦计算的, 可见直接概率积分法是一种非侵入式的方法。直接概率积分法求解静动力系统随机响应 PDF、统计矩和可靠度的计算流程如图 2 所示。该方法也适用于一般的高维数值积分。

迄今, 直接概率积分法已用于板壳、建筑和桥梁结构随机响应的 PDF 与统计矩计算^[24, 30-31]、结构可靠度和体系可靠度分析^[5-6, 32]、灵敏度分析与可靠性优化设计^[8-10] 及随机最优控制^[7] 等方面。其共同之处是利用直接概率积分法直接、高效地

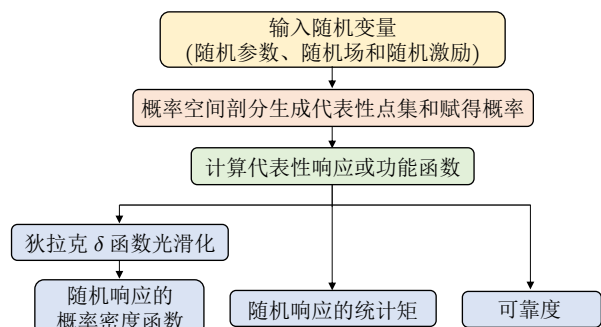


图 2 直接概率积分法求解静动力系统随机响应 PDF、统计矩和可靠度的流程图

求解多维或高维概率密度积分方程。针对复合材料板壳结构参数的空间变异性，建立了非侵入式随机有限元分析的直接概率积分法^[30]，获得随机响应和静动力可靠度。该方法具有普适性和高效性，突破了侵入式随机有限元法不能处理大变异性和非线性问题、不能考虑随机激励作用以及时间和空间域双重随机性的局限性。将含随机参数的发动机涡轮叶片低周疲劳问题表征为随机静力系统的可靠度问题，将高频随机激励下涡轮叶片

高周疲劳可靠度问题转化为随机振动问题，在直接概率积分法框架下对两类疲劳可靠性问题进行了统一求解^[33]。而且，把随机激励表达为基本随机变量的函数，利用直接概率积分法，发展了近断层地震动作用下大跨度斜拉桥随机振动响应和体系可靠度分析的通用、高效框架。结合斜拉桥动力学性能和首次超越失效准则，提出了大跨斜拉桥（图 3 所示）可靠度分析的串并联体系方式，即：任意 5% 拉索失效或塔梁、墩失效，结构失效^[24]。序列近似整数规划法是程耿东和梁缘提出的离散变量拓扑优化新方法，从根本上解决了拓扑优化设计的灰度难题^[34]。把序列近似整数规划法与直接概率积分法相结合，我们实现了连续体结构可靠性拓扑优化设计的两阶段离散变量方法，获得了比传统方法更精确的拓扑优化结果^[9]。此外，利用直接概率积分法和序列近似混合整数规划法，提出了基于动力可靠度的混合整数规划算法，解决了非平稳地震动激励下框架建筑非线性黏滞阻尼器布局 and 参数同步优化设计问题^[8]。

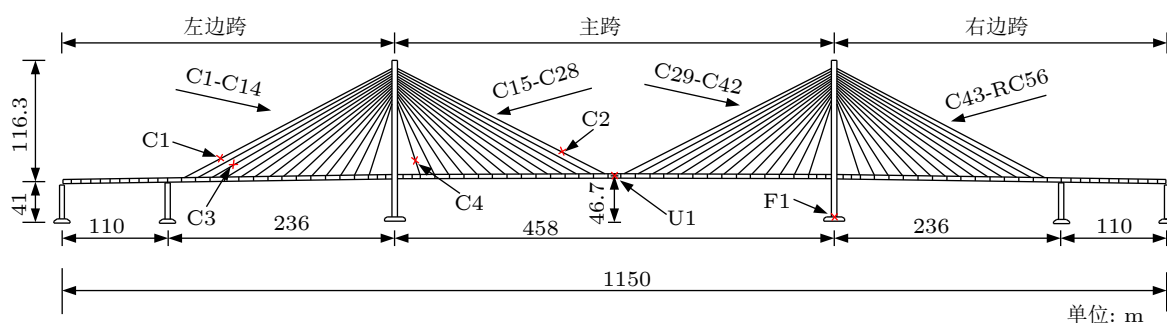


图 3 大跨斜拉桥正视图

一些学者开展了直接概率积分法的计算技术和工程应用研究，解决了重载列车-桥梁系统随机振动和可靠度分析^[35]、车轮不圆下轨道车辆随机振动分析^[36]、含 30228 个单元的核电厂结构随机动力学分析^[37]、混凝土面板堆石坝随机地震响应分析^[38]、沥青路面结构体系可靠度评价^[39]、数控机床系统的动力可靠性评价^[40]、声振结构随机响应分析^[41]、随机黏弹性阻尼结构拓扑优化设计^[42]等一系列问题。

4 结论

本文考查了概率守恒原理的历史起源与发展过程，详细介绍了基于概率守恒原理推导的时间-

空间域概率密度积分方程以及建立的概率密度积分理论和随机力学统一方法：直接概率积分法，并总结了直接概率积分法在工程结构随机静/动力响应与可靠度分析、可靠性优化设计中的研究进展。主要结论如下。

(1) 概率守恒原理是统计物理、概率论和随机力学的基本原理。它起源于 19 世纪建立起的统计物理理论，至 20 世纪中叶开始逐渐受到概率论、随机动力学领域学者的关注，如今已经走到了随机力学与概率论的舞台中央，得到重视、重用。

(2) 从概率密度积分的全新视角，基于概率守恒原理建立、命名了刻画时间-空间域随机性传

播、演化的统一基本方程,即概率密度积分方程,它在任意时刻都成立,具有时间平移对称性,其中的狄拉克函数蕴含了系统的物理变化规律。证明了概率密度积分方程是概率守恒方程的充分必要条件这一基本定理。论述了概率密度积分方程实际上是密度形式的全概率公式,且与概率密度变换公式一样,全概率公式也遵守概率守恒原理。基于概率密度积分方程,推导了随机响应的统计矩新公式、可靠度及其灵敏度计算公式,建立了解决静动力系统随机响应分析、可靠度评价和可靠性优化设计及最优控制问题的概率密度积分统一理论。

(3) 直接概率积分法把概率密度积分和结构系统控制方程解耦计算,是一种非侵入式的方法。利用基于数论方法的确定性采样,但采用不等权重计算多维/高维积分,精度优于QMCS。直接概率积分法作为随机不确定性量化与可靠性优化设计的统一、高效方法,解决了含高达1000维随机变量的大型线性、非线性结构系统随机静力学、动力学分析,及体系可靠度和动力可靠性优化设计难题,适用于高斯/非高斯随机激励、平稳/非平稳随机激励作用和马尔科夫/非马尔科夫系统。

(4) 直接概率积分法揭示了随机系统不确定性传播、演化的内在规律,打破了传统随机静力学和随机动力学的藩篱,融合了随机线性系统与随机非线性系统的研究,是通用、高效、优美的方法体系,并且易于理解,便于编程实现和嵌入CAE(计算机辅助工程)软件。该方法也能计算一般的高维积分。

直接概率积分法自2019年作者团队提出以来,得到了国内外同行学者的积极肯定和应用,已成功用于建筑、桥梁、大坝、空天飞行器、机械车辆等各种工程结构和工业装备的随机不确定性传播与量化分析,为大型结构可靠性、安全性评定和风险管理及数字化、智能化优化设计提供计算工具。展望未来,概率守恒原理、概率密度积分方程、概率密度积分理论和直接概率积分法将得到越来越多的重视、利用与发展,助推概率论与随机力学的科学研究,促进相关领域的教育教学和人才培养。

参考文献

- Chen GH, Yang DX. Direct probability integral method for stochastic response analysis of static and dynamic structural systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 357: 112612
- 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法. 北京: 科学出版社, 2004
- Frank TD. Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications. London: Springer, 2005
- Li J, Chen JB. Stochastic Dynamics of Structures. Singapore: John Wiley & Sons, 2009
- Chen GH, Yang DX. A unified analysis framework of static and dynamic structural reliabilities based on direct probability integral method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 158: 107783
- Chen GH, Yang DX, Liu YH, et al. System reliability analysis of static and dynamic structures via direct probability integral method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 388: 114262
- Li LX, Fang MX, Chen GH, et al. Reliability-based stochastic optimal control of frame building under near-fault ground motions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 163: 108098
- Li LX, Liang Y, Chen GH, et al. Simultaneous layout and size optimization of nonlinear viscous dampers for frame buildings under stochastic seismic excitation. *Engineering Structures*, 2022, 273: 115067
- Lei ZZ, Zhang J, Liang Y, et al. Efficient two-phase approach to reliability-based discrete variable topology optimization of continuum structures with multimodal distributions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 415: 116237
- Li H, Chen HS, Zhang J, et al. Direct probability integral method for reliability sensitivity analysis and optimal design of structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, 66: 200
- 刘俊丽, 朱涛. 中国力学史与方法论研究二十年回顾. *力学与实践*, 2023, 45(2): 482-492
Liu Junli, Zhu Tao. Twenty years' research on the history and methodology of Chinese mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2023, 45(2): 482-492 (in Chinese)
- Syski R. Stochastic differential equations// Saaty TL ed. Modern Nonlinear Equations. New York: McGraw-Hill, 1967: 458-534
- Soong TT. Random Differential Equations in Science and Engineering. New York: Academic Press, 1973
- Soong TT. Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. Chichester: John Wiley & Sons, 2004
- Gibbs JW. The Principles of Statistical Mechanics. New Haven: Yale University Press, 1902
- 李政道. 统计力学. 上海: 上海科学技术出版社, 2006
- 张启仁. 统计力学. 北京: 科学出版社, 2004
- 陈式刚. 非平衡统计力学. 北京: 科学出版社, 2010
- 沈惠川. 统计力学. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2011

- 20 Sobczyk K. Stochastic dynamics of engineering systems: origins, challenges and results. Mechanics of 21st Century, Proceedings of XXI ICTAM, Warsaw, Poland, 2004
- 21 Yao WW, Zhou XP, Qian QH. From statistical mechanics to nonlocal theory. *Acta Mechanica*, 2022, 233: 869-887
- 22 Papoulis A, Pillai SU. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2002
- 23 Yang DX, Chen HS, Meng Z, et al. Random vibration and dynamic reliability analyses for nonlinear MDOF systems under additive excitations via DPIM. *Journal of Engineering Mechanics*, 2021, 147(12): 04021117
- 24 Yang DX, Liu JL, Yu RF, et al. New framework for stochastic dynamic responses and system reliability analysis of long-span cable-stayed bridges under near-fault ground motions. *Engineering Structures*, 2025, 322: 119061
- 25 李杰. 工程结构可靠性分析原理. 北京: 科学出版社, 2021
- 26 Der Kiureghian A. Structural and System Reliability. London: Cambridge University Press, 2022
- 27 袁德美, 王学军. 测度论基础与高等概率论. 北京: 科学出版社, 2023
- 28 Chen JB, Yang JY, Li J. A GF-discrepancy for point selection in stochastic seismic response analysis of structures with uncertain parameters. *Structural Safety*, 2016, 59: 20-31
- 29 Fan WL, Chen JB, Li J. Solution of generalized density evolution equation via a family of δ sequences. *Computational Mechanics*, 2009, 43: 781-796
- 30 Huo H, Yu TX, Zhao J, et al. A novel uncertainty quantification method for determining deformations and reliabilities of stochastic laminated composite plates with geometric nonlinearity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2024, 420: 116731
- 31 Liu JR, Liu XL, Li LX, et al. Simultaneous determination of stochastic dynamic responses and reliabilities for geometrically nonlinear thin shells. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112: 9783-9805
- 32 Zhang Y, Chen X, Huo H, et al. Stochastic dynamics analysis for unilateral vibro-impact systems under combined excitation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2025, 285: 109828
- 33 Chen GH, Gao PF, Li H, et al. Fatigue reliability assessment of turbine blade via direct probability integral method. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2025, 38(4): 103328
- 34 Liang Y, Cheng GD. Topology optimization via sequential integer programming and canonical relaxation algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 348: 64-96
- 35 Liu HB, Song L, Xu L, et al. Stochastic analysis and dynamic reliability of the heavy-haul train-bridge system based on direct probability integral method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2023, 74: 103510
- 36 Wang TF, Zhou JS, Sun WJ, et al. A DPIM-based probability analysis framework to obtain railway vehicle vibration characteristics considering the randomness of OOR wheel. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2024, 75: 103587
- 37 Pang R, Zai DZ, Xu B, et al. Stochastic dynamic and reliability analysis of AP1000 nuclear power plants via DPIM subjected to mainshock-aftershock sequences. *Reliability Engineering and System Safety*, 2023, 235: 109217
- 38 Liu YZ, Pang R, Du MZ, et al. Simulation of non-stationary ground motions and its applications in high concrete faced rockfill dams via direct probability integral method. *Engineering Structures*, 2024, 298: 117034
- 39 Yang XS, Zhu HZ, Yang S, et al. An efficient analysis method for system reliability of semi-rigid base asphalt pavement structure based on direct probability integral method. *Construction and Building Materials*, 2024, 428: 136306
- 40 Peng HJ, Sun FJ, Wu F, et al. Dynamic reliability of mechanism based on direct probability integral method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 270: 109105
- 41 Ma HB, Zhang YH. Stochastic response analysis of 3D vibro-acoustic systems with geometrical uncertainties based on the extended finite element method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2024, 125: e7382
- 42 Tao TZ, Han WF, Zhao GZ. Efficient strategy for topology optimization of stochastic viscoelastic damping structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 278: 109431

(责任编辑: 胡 漫)