颗粒材料应变局部化渐进破坏宏观数值模拟

吕玺琳^{1,2*}, 薛大为^{1,2}, 马一跃¹, 曾盛¹, 黄茂松^{1,2}

1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092;

2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092

* E-mail: xilinxu@tongji.edu.cn

收稿日期: 2021-07-29; 接受日期: 2021-10-12; 网络版发表日期: 2022-04-08

国家重点研发计划(编号: 2016YFC0800200)和国家自然科学基金(批准号: 41672270)资助项目

摘要 从离散元细观和有限元连续介质力学角度, 研究了颗粒材料应变局部化触发和演化特性. 通过离散元模拟, 获得了颗粒体应变局部化触发前后力学响应的变化情况, 并通过颗粒相对位移角度分析得出了剪切带演化特征. 通过分析颗粒材料应变局部化尺寸效应, 得出了试样尺寸与平均粒径之比对剪切带厚度的影响规律. 采用基于微态方法的广义热力学框架, 引入一个非局部细观变量作为附加的运动学变量, 建立了一种考虑压力相关应变软化材料的隐式梯度塑性模型. 利用虚功率原理和热力学第二定律, 构建了隐式梯度理论的Helmholtz偏微分控制方程, 并提出耦合位移和微变量的正则化有限元数值算法. 平面应变压缩试验数值模拟表明, 所提出的算法能够消除数值解的网格敏感性, 验证了引入隐式梯度对应应变软化颗粒材料病态边值问题正则化的能力. 通过对地基承载力和隧道开挖面稳定性问题的分析, 得出了颗粒材料应变软化对其宏观力学响应的影响, 结果表明材料应变软化导致更小的破坏区域和更集中的局部变形.

关键词 颗粒材料, 应变软化, 渐进破坏, 应变局部化, 离散元, 有限元模拟

1 引言

土体是一种典型的颗粒材料, 其渐进破坏过程常伴随应变局部化触发和发展^[1,2]. 在临近破坏的天然土体或土工构筑物(如地基、边坡和隧道等)中都可观察到此类渐进发展的应变局部化现象^[3]. 从物理角度来看, 它可被视为与热力学相变类似^[4]的“软模式”失稳. 在数学上, 应变局部化通常被视为变形分叉问题. 在不违反平衡或相容性情况下, 潜在非线性场方程的变形局部化解成为可能^[5], 可利用分叉理论预测局部化

变形的失稳触发点^[6,7]. 当前以离散元为代表的细观分析和以有限元模拟为代表的连续介质分析被应用于应变局部化渐进破坏过程研究.

离散单元法将土体视为颗粒集, 基于粒间接触模拟土体宏观物理力学特性, 粒间接触模型则基于牛顿定律进行分析. 细观角度分析被广泛用于土体剪胀剪缩、硬化软化、应变局部化等问题研究. 例如, Oda 等人^[8]采用微距X光对颗粒微观空间分布和散体材料剪切带演化过程进行了分析. Alshibli和Hasan^[9]采用X光扫描密砂, 观察到了应变局部化发生时孔隙比突变

引用格式: 吕玺琳, 薛大为, 马一跃, 等. 颗粒材料应变局部化渐进破坏宏观数值模拟. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 1022–1034

Lü X L, Xue D W, Ma Y Y, et al. Microscopic and macroscopic numerical simulation of the progressive failure of granular materials (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 1022–1034, doi: 10.1360/SST-2021-0326

现象. Besuelle等人^[10]及Hall等人^[11]近年在颗粒介质应变局部化物理试验细观观测上取得了较多创新成果, Fu和Dafalias^[12]通过离散元模拟研究了剪切带内细观结构演化. Guo^[13]基于离散元对应变局部化剪切带内外颗粒间应力传递方式进行了对比, 解释了其对剪切带宽度的影响; Li等人^[14]考虑非圆颗粒定向排列; Zhao和Guo^[15]研究了土体原生各向异性对应变局部化的影响. Yang等人^[16]在松砂和中密砂模型中发现了应变软化现象. 为模拟颗粒间孔隙水流动, Shan和Zhao^[17]结合离散元和流体模拟, 分析了土体微观物理力学特性.

基于连续理论的有限元数值模拟在分析应变软化问题时将遭遇网格依赖性. 随着网格细化, 有限元数值模拟的应变局部化带厚度减小, 这与实际情况不符. 当前已有多种方法克服这一难题, 如黏塑性理论^[18]、微极理论^[19,20]、积分型非局部理论^[21,22], 以及应变梯度理论均是可行的边值问题正则化方法^[23,24]. Aifantis^[25,26]是将应变梯度理论应用于边值问题正则化的最早研究者之一. 他引入能体现局部化带宽的材料特征长度, 并将局部塑性应变的高阶导数引入屈服条件, 从而提出了显式梯度理论. 然而, 显式梯度理论物理意义不够明确, 在数值计算时需追踪内部动态弹塑性边界. 为克服这些不足, 隐式梯度理论得以提出^[27]. 该理论引入了非局部细观变量的高阶梯度, 细观变量则通过一种具备高阶边界条件的Helmholtz偏微分方程与局部内部变量耦合^[28,29]. Forest^[30]利用广义微态(micromorphic)方法为隐式理论建立了完善的热力学基础. 一系列隐式模型得以建立, 如压力无关Mises屈服函数结合损伤理论被用于建立损伤-塑性隐式模型^[31~33]. Poh和Swaddiwudhipong^[34]结合混凝土损伤本构模型模拟混凝土力学响应, 模拟结果与试验结果符合较好. Zreid和Kaliske^[35,36]基于微平面方法, 提出了隐式梯度增强混凝土损伤-塑性本构模型, 成功模拟了混凝土加卸载行为. Bryant和Sun^[37]将广义微态理论与修正剑桥模型结合, 分析了非弹性局部化变形尺寸效应, 然而该模型并未考虑颗粒材料的非关联流动特性.

本文结合近年来应变软化颗粒材料渐进破坏方面的研究进展, 针对土体应变局部化渐进破坏过程离散元细观模拟和基于引入了正则化机制的有限元模拟方法进行了研究. 在应变局部化宏微观特性研究方面, 通过离散元模拟框架, 考虑砂土边界条件和颗粒尺寸的影响, 对应变局部化发生过程进行模拟, 并分析了颗

粒尺寸对应变局部化剪切带宽度及产生过程的影响. 在正则化有限元模拟方面, 通过利用广义微态热力学一致性框架, 在考虑摩擦项的屈服函数中引入微应变及梯度, 建立了压力相关隐式梯度塑性模型. 建立开发了耦合位移和非局部细观变量有限元程序, 通过数值算例验证了所建模型对应变软化材料病态边值问题的正则化能力. 根据两类常见的岩土工程边值问题, 研究了土体应变软化对荷载变形响应及局部化变形模式的影响规律.

2 颗粒材料应变局部化细观数值模拟

2.1 应变局部化离散元模拟

颗粒材料受荷变形过程中, 在达到塑性极限前可能发生失稳, 一般体现为应变局部化和分散性失稳两种模式. 应变局部化表现为局部应变集中, 位移和应变速率在空间上明显突变. 为从细观角度分析颗粒材料应变局部化, 进行双轴试验离散元模拟. 由于颗粒形状对颗粒材料力学特性有一定影响^[38], 为考虑颗粒形状效应并提高计算效率, 采用两个相同圆形颗粒形成的块体(clump)颗粒生成试样, 块体颗粒长短轴之比设为1.5. 块体颗粒虽不能完全反映天然土体颗粒的真实形状, 但能较好地反映颗粒间咬合作用和各向异性特性^[38]. 根据典型砂土的颗粒级配, 离散元试样的颗粒级配曲线如图1(a)所示, 不均匀系数 $C_u=1.3$. 采用分层压实法制密实试样, 通过无摩擦刚性板分层压密, 建立的双轴试样数值分析模型如图1(b)所示, 制成试样的初始孔隙比为0.16. 颗粒间采用抗转动模型, 模型参数如表1所示.

采用刚性墙通过伺服机制对模型进行100 kPa等压固结, 固结完成后删除两侧刚性墙, 生成小颗粒模拟柔性边界, 如图1(b)所示, 并再次施压固结, 固结完成后孔隙比为0.152. 然后, 通过上下墙加压对试样进行剪切, 模拟得到的应力应变曲线如图2所示. 随着应变增加, 剪应力呈现为先增大到峰值再降低的趋势. 在偏应力达到峰值时, 应变局部化剪切带开始出现并趋于明显.

2.2 应变局部化尺寸效应

颗粒材料受荷后的力学响应存在尺寸效应, 该效应也影响应变局部化特性. 为分析应变局部化尺寸效

图 1 (网络版彩图)双轴试验离散元模拟. (a) 颗粒累计级配曲线; (b) 离散元试样($d_{50}=0.18$ mm)

Figure 1 (Color online) Discrete element simulation of biaxial test. (a) Aumulative particle grading curve; (b) discrete element sample ($d_{50}=0.18$ mm).

表 1 试样微观参数

Table 1 Microscopic parameters for the specimen

参数	值
墙-颗粒摩擦角 ($^{\circ}$)	0
墙法相刚度 (N/m)	1.0×10^9
颗粒数量	6800
颗粒长轴比	1.5
颗粒密度 (kg/m^3)	2650
颗粒阻尼比	0.7
粒间弹性模量 E (N/m)	5.0×10^{11}
粒间法切向刚度比	3.33
粒间法向刚度 kn	$E \cdot r$
粒间内摩擦角	0.5
柔性边界粒间摩擦角	0
柔性边界压缩刚度	$kn/5$
柔性边界抗拉强度 (MPa)	1.0×10^{100}
孔隙比(固结后)	0.154 (各向同性) 0.149 (K_0)

应, 在前述模拟基础上增加4组模拟, 分析相同试样尺寸和级配特征条件下不同平均颗粒粒径对试样力学响应的影响. 模拟得到的应力应变关系和体变特性如图3

所示. 结果表明, 随着模型与平均颗粒尺寸之比 R 增大, 应力应变曲线峰值降低, 应变局部化触发点有一定延迟. 计算得到的峰值及残余内摩擦角如图4所示, 结果表明 R 增大, 峰值摩擦角将减小, 残余摩擦角增大.

为分析应变局部化剪切带内外的变形分布特性, 得到试样内颗粒的相对位移分布如图5所示. 随着 R 增

图 2 (网络版彩图)应变局部化发展过程

Figure 2 (Color online) Development of strain localization.

图 3 (网络版彩图)试样力学响应随尺寸比的变化. (a) 应力应变关系; (b) 体积应变变化

Figure 3 (Color online) Variation of mechanical response of specimen with the size ratio. (a) Stress-strain relationship; (b) volume strain change.

大, 集中变形区域变窄, 当 R 大于40时, 剪切带宽度及倾角随 R 的变化已不明显. 通过分析试样变形分布情况得到集中变形带宽度, 其随 R 的变化如图6所示, 带宽随 R 增大而增大, 当 R 达到一定值后, 带宽不再变化.

图 4 (网络版彩图) 摩擦角随尺度参数变化

Figure 4 (Color online) Variation of friction angle with scale parameter.

图 5 (网络版彩图) 剪切带宽度的尺寸效应

Figure 5 (Color online) Size effect of shear band width.

图 6 (网络版彩图) 剪切带宽度随尺度参数变化

Figure 6 (Color online) Variation of shear band width with scale parameter.

3 应变软化颗粒材料渐进破坏有限元模拟

3.1 应变梯度理论

对于应变软化颗粒材料, 基于经典连续体介质理论的有限元数值模拟常遭遇网格敏感性难题. 具体表现为当网格变密时, 剪切带宽度逐渐减小, 模拟结果丧失客观性. 应变梯度理论是一种能克服应变软化导致网格敏感性的正则化方法, 其通常可分为显式和隐式两类. 显式理论通过在屈服函数中引入硬化参数的二阶梯度, 其屈服函数表达式为

$$F(\sigma_{ij}, \bar{\kappa}) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_y(\bar{\kappa}), \quad (1)$$

式中, σ_{ij} 为当前应力状态, σ_y 反映了硬化规律, $\bar{\kappa}$ 为非局部梯度硬化参数, 为

$$\bar{\kappa} = \kappa + l^2 \nabla^2 \kappa, \quad (2)$$

式中, κ 为局部硬化参数, 通常为非弹性应变, l 为材料特征长度.

显式理论已被证明能正则化应变软化材料导致的病态边值问题, 起到消除数值模拟结果网格敏感性的作用. 然而, 该理论在应用于颗粒材料时存在一定缺陷. 从理论角度来看, 显式理论仅将新引入的硬化参数梯度作为新的内变量, 并未引入不相容的完整微变形场. 从数值实现角度来看, 由于需计算局部硬化参数的高阶梯度, 故塑性乘子的形函数通常需采用 C_1 连续的双变量场插值构造, 数值实现上十分困难. 此外, 式(2)中的梯度项只存在于非弹性区域, 高阶边界条件的存在导致在数值编程时需追踪变化的弹性-非弹性边界, 更增加了数值计算难度. 为克服显式理论在这两方面的缺陷, 隐式梯度理论得以提出. 隐式梯度理论通过Helmholtz偏微分方程引入了一个非局部细观变量(或称为细观应变). Helmholtz偏微分方程在一定边界条件下将该细观变量(及其梯度)与硬化参数(如等效塑性应变或损伤应变)耦合. 与显式理论的主要不同点在于显式理论中的梯度项是通过本构关系确定的常微分方程演化, 而隐式理论的梯度项则通过偏微分方程引入了一个完整、且不相容的细观变形场. 该Helmholtz偏微分方程为

$$\xi - \kappa = l^2 \nabla^2 \xi, \quad (3)$$

式中, ξ 为非局部细观变量, 反映了模拟中需要计算的非弹性细观应变.

非局部细观变量 ξ 与整体域内的局部变量 κ 大小有关, 具有长距离交互效应, 因而这种模型具备较强的非局部性. 理论上, 式(3)可通过积分型非局部理论中非局部积分公式泰勒级数展开得到, 与积分型非局部理论联系密切, 从而也被称为梯度型非局部理论. 从式(3)可看出, 引入的非局部细观变量可同时定义在弹性区的非弹性区域, 这样就不需在数值模拟过程中动态追踪高阶弹塑性边界. 此外, 由于没有直接引入局部硬化参数的高阶梯度, 因此只需要满足 C_0 连续条件即可.

隐式梯度理论的屈服函数为

$$F(\sigma_{ij}, \kappa, \xi) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_y(\kappa, \xi). \quad (4)$$

这种隐式梯度理论(或梯度型非局部理论)已被证实金属材料及摩擦脆性材料渐进破坏过程模拟中的适用性^[34,35,39], 然而针对应变软化颗粒材料的研究目前相对较少, 且现有研究未考虑完备的热力学一致性框架, 从而无法对式(3)的物理意义给出合理解释.

3.2 压力相关应变软化隐式梯度模型

3.2.1 热力学框架

当应变软化颗粒材料发生渐进破坏失稳时, 局部化变形区域外储存的弹性能将转移至非弹性区域, 且将会部分转化为耗散能. 针对隐式梯度理论而言, 一个完备的热力学一致性框架应充分考虑细观应变及其梯度和对应的共轭应力对上述过程的影响. 根据Forest^[30]提出的广义微态理论, 隐式梯度理论的修正自由能密度函数为

$$\psi = \psi_{\text{conv}}(\epsilon^e, \kappa) + \frac{1}{2}\tilde{h}(\kappa - \xi)^2 + \frac{1}{2}\tilde{h}l^2(\nabla \xi)^2, \quad (5)$$

式中, $\psi_{\text{conv}}(\epsilon^e, \kappa) = (1/2)\epsilon_{ij}^e \cdot \sigma_{ij} + (1/2)H\kappa^2$ 为自由能函数, ϵ_{ij}^e 为弹性应变, κ 可取为等效塑性剪应变, H 为塑性硬化模量, $\tilde{h}$ 为对应于宏观细观交互作用的耦合模量.

在数学上, 材料特征长度是从量纲分析中推导出的参数. 在物理上, 该参数是联系细观结构(如微裂纹、位错、空核、颗粒粒径和孔隙等)到宏观连续体的一种材料特性. 广义微态理论宏-细观代表体积元如图7所示.

除自由能密度函数外, 还需考虑隐式梯度理论的耗散方程(假设等温条件, 忽略体力)为

图7 (网络版彩图)宏-细观代表体积元示意图

Figure 7 (Color online) Schematic diagram of macro and micro representative volume element.

$$D = P_m - \dot{\psi}, \quad (6)$$

式中, P_m 为内部功率密度, 针对常规连续体模型可表示为 $P_m = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$, 反映了在任何子区域 B 上消耗的功率, $\dot{\psi}$ 表示自由能密度函数的时间导数, 反映了在子区域 B 上自由能随时间的变化.

由于细观应变及其梯度的引入将会导致额外产生的共轭应力, 因此修正内部功率密度为

$$P_m = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + Q \cdot \dot{\xi} + \tau_k \cdot \nabla \dot{\xi}, \quad (7)$$

式中, σ_{ij} , Q 和 τ_k 分别为应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$, 细观应变率 $\dot{\xi}$ 及其梯度 $\nabla \dot{\xi}$ 对应的共轭应力.

对应地, 修正外部功率密度为

$$P_{\text{ex}} = \bar{t}_i \cdot \dot{u}_i + \bar{T} \cdot \dot{\xi}, \quad (8)$$

式中, $\bar{t}_i$ 和 $\bar{T}$ 为面力.

根据热力学第二定律, 任何子区域 B 上的自由能变化均应当小于或等于 B 上消耗的功率, 即 $D \geq 0$. 因此, 可根据式(5)~(7)推导得到以下应力表达式:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e}, \quad (9)$$

$$Q = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \tilde{h}(\xi - \kappa), \quad (10)$$

$$\tau_k = \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \xi} = \tilde{h}l^2 \nabla \xi, \quad (11)$$

以及热力学力:

$$\chi = \frac{\partial (\Psi - \Psi_{\text{conv}})}{\partial \kappa} = \tilde{h}(\kappa - \xi), \quad (12)$$

$$R = \frac{\partial \Psi_{\text{conv}}}{\partial \kappa} = H\kappa. \quad (13)$$

在数值计算中, 虚功率原理要求外部和内部功率在每个收敛计算步保持平衡, 即 $P_m = P_{\text{ex}}$. 由式(7)和(8)

可推导得到隐式梯度理论的控制偏微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} = 0 & \text{in } B, \\ u_i = \bar{u}_i & \text{on } S_u, \\ \sigma_{ij} n_{ij} = \bar{t}_i & \text{on } S_t, \end{cases} \quad (14)$$

以及

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial \tau_k}{\partial x_k} & \text{in } B, \\ \xi^p = \bar{\xi}^p & \text{on } S_u, \\ \tau_k n_k = \bar{T} & \text{on } S_t, \end{cases} \quad (15)$$

式中, n_{ij} 和 n_k 是计算域表面的外法线方向.

式(14)为经典连续体理论的宏观应力平衡方程, 式(15)为细观力平衡方程. 利用式(10)和(11), 式(15)中的平衡条件可转化为Helmholtz偏微分方程式(3). 至此, 根据广义微态理论, 隐式梯度理论中的Helmholtz偏微分方程代表了细观尺度上的力平衡条件. 可利用这里的推导结果, 建立满足热力学一致性且适用于应变软化颗粒材料的压力相关隐式梯度模型.

3.2.2 压力相关隐式梯度本构方程

参考Drucker-Prager模型及前述推导的应力和热力学的表达式(式(9)~(13)), 基于线性硬化准则, 建立屈服函数和塑性势函数分别为

$$\begin{cases} F = \sqrt{q^2 + l_0^2} - \chi - (c + p \cdot \tan \varphi) - R, \\ G = \sqrt{q^2 + l_0^2} - \chi - (c + p \cdot \tan \psi) - R, \end{cases} \quad (16)$$

式中, $q = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ 为等效切应力, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ 为偏应力, $p = \sigma_{kk}/3$ 为平均应力, c 为黏聚力, φ 和 ψ 分别为内摩擦角和剪胀角. 其中, ψ 应小于或等于 φ , 当 ψ 等于 φ 时, 塑性势函数与屈服函数相同, 流动法则由非相关联转化为相关联. R 和 χ 分别由式(12)和(13)得到.

建立的压力相关隐式梯度本构方程与传统理想弹塑性Drucker-Prager模型不同点主要在于: (1) 通过 R 引入了线性应变软化机制, 反映应变软化颗粒材料的应变软化特性; (2) 通过 χ 引入了细观变量连续体对宏观连续体的影响; (3) 通过引入参数 l_0 , 对圆锥型屈服面顶角进行平滑处理, 以避免数值积分过程中的数值奇异问题.

对于所建立的模型, 需确定9个材料参数, 即弹性模量 E , 泊松比 ν , 内聚力 c , 摩擦角 φ , 膨胀角 ψ , 顶点平滑参数 l_0 , 塑性硬化模量 H , 耦合模量 $\tilde{h}$ 和特征长度 l . 这些参数可根据试验数据(如直剪试验和/或三轴试验)进行曲线拟合和反演来确定. 针对特征长度 l , 目前并没有直接的试验测量方法. 已有的研究表明: 对于金属, 可使用微扭转和/或微弯曲测试来确定特征长度取值. 对于颗粒材料(如土体), 剪切带宽度一般与粒径等细观尺度特性相关, 通常是平均粒径的倍数. 因此, 用于体现限制局部化带宽的特征长度尺度可能与颗粒大小有关. 此外, 显微CT图像和宏观力学响应的组合也是确定梯度模型的特征长度参数 l 的一种可能方法.

3.2.3 应力回射算法

通过建立隐式应力回射算法, 可对上节本构模型进行数值积分求解. 模型中的未知量 $\mathbf{x}$ 及残余向量 $\mathbf{r}$ 分别为

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \sigma_{ij} \\ \bar{\chi} \\ \kappa^p \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^{e, \text{tr}} + \Delta\varepsilon_{ij}^p(\sigma, \chi, \Delta\lambda) \\ \bar{\chi} - \bar{\chi}^{\text{tr}} - (\kappa - \kappa^n) \\ \kappa - \kappa^n - \Delta\kappa(\sigma, \chi, \Delta\lambda) \\ F(\sigma, \chi, \Delta\lambda) \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

式中, $\bar{\chi} = \chi / \tilde{h}$, κ^n 为上一计算步收敛的等效塑性剪应变, 上标 tr 代表试变量.

通过对残余向量 $\mathbf{r}$ 线性化, 可得到

$$[\mathbf{J}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{\varepsilon}\}, \quad (19)$$

式中, $\mathbf{C}^e$ 为弹性矩阵, $\{\mathbf{\varepsilon}\} = \{d\varepsilon_{ij}, -d\xi, 0, 0\}^T$, $[\mathbf{J}]$ 为残余向量 $\mathbf{r}$ 的雅可比矩阵, 表示为

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \left(C_{ijkl}^{-1} + \frac{\partial \Delta\varepsilon_{ij}^p}{\partial \sigma_{kl}}\right) \frac{\partial \Delta\varepsilon_{ij}^p}{\partial \bar{\chi}} & 0 & \frac{\partial \Delta\varepsilon_{ij}^p}{\partial \Delta\lambda} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\partial \Delta\kappa}{\partial \sigma_{kl}} & -\frac{\partial \Delta\kappa}{\partial \bar{\chi}} & 1 & -\frac{\partial \Delta\kappa}{\partial \Delta\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial F}{\partial \bar{\chi}} & \frac{\partial F}{\partial \kappa} & \frac{\partial F}{\partial \Delta\lambda} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

通过对 $[\mathbf{J}]$ 求逆, 可获得一致切线刚度矩阵. 将其编写为数值计算程序, 即可在每一步积分过程中更新本构中的未知变量.

3.3 宏-细观耦合有限元方法

在进行数值计算时, 由于方程组(15)的存在, 需建立宏-细观耦合有限元方法, 求解在附加边界条件下的非局部细观变量. 通过引入在边界处消失的权函数 w_i 和 ϖ , 并利用式(16), 可将总体控制方程的强形式, 即式(14)和(15)改写为以下弱形式:

$$\begin{cases} \int_{S_i} w_i \tilde{t}_i da = \int_B \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dv, \\ \int_{S_T} \varpi T da = \int_B \frac{\partial \varpi}{\partial x_k} \tilde{h} l^2 \frac{\partial \xi}{\partial x_k} dv - \int_B \varpi \tilde{h} (\xi - \kappa) dv. \end{cases} \quad (21)$$

仅考虑平面应变条件, 位移和细观应变的求解通过以下方式在每个单元内插值:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \sum_A N_u^A \mathbf{u}^A, \\ \xi = \sum_A N_\xi^A \xi^A, \end{cases} \quad (22)$$

式中, A 代表单元节点编号, $\mathbf{u}^A$ 和 ξ^A 分别表示节点位移和非局部细观变量, N_u^A 和 N_ξ^A 为形状函数.

利用标准伽辽金方法, 对权函数以相同方式插值, 得到

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \sum_A N_u^A \mathbf{w}^A, \\ \varpi = \sum_A N_\xi^A \varpi^A. \end{cases} \quad (23)$$

将式(22)和(23)代入式(21), 可得到:

$$\begin{cases} \int_S N_u^T t_i da = \int_B \mathbf{G}_u^T \sigma_{ij} dv, \\ \int_S N_\xi^T T da = \int_B \mathbf{G}_\xi^T \tilde{h} l^2 G_\xi^T \xi dv + \int_B N_\xi^T \tilde{h} (\xi - \kappa) dv. \end{cases} \quad (24)$$

在数值计算中, 为了通过牛顿迭代法求得刚度矩阵, 可将上述公式线性化为

$$\begin{cases} \int_B \mathbf{G}_u^T (\mathbf{A}_{ijkl}) \mathbf{G}_u dv \delta \mathbf{u} + \int_B \mathbf{G}_u^T (\mathbf{B}_{ij}) \mathbf{N}_\xi dv \delta \xi = 0, \\ \int_B \mathbf{N}_\xi^T (\mathbf{C}_{kl}) \mathbf{G}_u dv \delta \mathbf{u} + \int_B \mathbf{N}_\xi^T \mathbb{D} \mathbf{N}_\xi dv \delta \xi \\ + \int_B \mathbf{G}_\xi^T \mathbb{E} \mathbf{G}_\xi dv \delta \xi = 0. \end{cases} \quad (25)$$

因此, 切线矩阵可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{uu} = \int_B \mathbf{G}_u^T (\mathbf{A}_{ijkl}) \mathbf{G}_u dv, \\ \mathbf{K}_{u\xi} = \int_B \mathbf{G}_u^T (\mathbf{B}_{ij}) \mathbf{N}_\xi dv, \\ \mathbf{K}_{\xi u} = \int_B \mathbf{N}_\xi^T (\mathbf{C}_{kl}) \mathbf{G}_u dv, \\ \mathbf{K}_{\xi\xi} = \int_B \mathbf{N}_\xi^T \mathbb{D} \mathbf{N}_\xi dv + \int_B \mathbf{G}_\xi^T \mathbb{E} \mathbf{G}_\xi dv, \end{cases} \quad (26)$$

式中, $\mathbf{A}_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$, $\mathbf{B}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi}$, $\mathbf{C}_{kl} = -\tilde{h} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{kl}}$, $\mathbb{D} = \tilde{h} \left(1 - \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \right)$ 和 $\mathbb{E} = \tilde{h} l^2$ 可采用应力返回算法获得.

根据上述推导, 离散线性化残差变为

$$\{\mathbf{w}^T \quad \varpi^T\} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\xi} \\ \mathbf{K}_{\xi u} & \mathbf{K}_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_\xi \end{Bmatrix} = 0. \quad (27)$$

结合前述推导过程, 通过Abaqus-UEL界面编写用户定义的材料和2D平面应变4节点线性等参四边形单元, 可将压力相关隐式梯度模型在有限元数值计算平台中实现.

3.4 平面应变剪切试验模拟验证

通过平面应变剪切试验数值模拟, 对所建模型对于应变软化材料的正则化能力进行验证. 建立的分析模型以及边界条件如图8所示, 试样尺寸为24 mm × 10 mm, 试样顶部施加垂直位移 d , 并限制顶部边界水平位移, 基座底部位移为全约束. 采用线性插值的四节点四边形单元生成网格, 通过240, 960和3840个单元建立的模型如图9所示. 采用的材料参数为: 弹性模量 $E = 6.0 \times 10^4$ kPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 内聚力 $c = 20$ kPa, 摩擦角 $\varphi = 20^\circ$, 膨胀角 $\psi = 15^\circ$, 塑性硬化模量 $H = -4.0 \times 10^3$ kPa, 耦合模量 $\tilde{h} = 8.0 \times 10^3$ kPa, 特征长度参数 $l = 0.5$ mm, 顶点平滑参数 $l_0 = 1.0$ kPa.

若将耦合模量 $\tilde{h}$ 和特征长度参数 l 设为零, 模型将退化为局部型的应变软化模型. 采用传统局部型模型计算得到的塑性应变分布如图10所示, 计算结果存在网格依赖性. 随着网格细化, 剪切带逐渐变窄, 而带内塑性应变幅值增大. 数值解随着网格的细化而无法趋近于确定解. 梯度模型计算得到的塑性应变分布如图11所示, 随着网格的加密, 数值解逐渐趋于真解. 通过对比如图12所示的力-位移曲线, 所得结果随网格细化

图 8 计算模型及边界条件

Figure 8 Calculation model and boundary conditions.

图 9 有限元网格划分. (a) 240个单元; (b) 960个单元; (c) 3840个单元

Figure 9 Finite element mesh generation. (a) 240 elements; (b) 960 elements; (c) 3840 elements.

图 10 (网络版彩图)局部模型得到的等效塑性应变分布. (a) 240个单元; (b) 960个单元; (c) 3840个单元

Figure 10 (Color online) Equivalent plastic strain distribution obtained from local model. (a) 240 elements; (b) 960 elements; (c) 3840 elements.

而收敛至某一确定曲线. 值得注意的是, 虽计算得到的等效塑性剪应变区宽度趋向于某确定值, 但要完全消除敏感性, 需采用足够密的网格进行计算.

图 11 (网络版彩图)梯度模型得到的等效塑性应变分布. (a) 240个单元; (b) 960个单元; (c) 3840个单元

Figure 11 (Color online) Equivalent plastic strain distribution obtained from gradient model. (a) 240 elements; (b) 960 elements; (c) 3840 elements.

图 12 (网络版彩图)荷载-位移响应. (a) 局部模型; (b) 梯度模型

Figure 12 (Color online) Load-displacement response. (a) Local model; (b) gradient model.

3.5 颗粒材料特征长度

为获得颗粒材料特征长度, 需建立宏观变形场与细观非弹性变形场间的关联. 这里可通过Helmholtz偏微分方程式(3)建立, 其中起关键作用的是材料特征长度参数 l . 值得注意的是, 在数值模拟中使用的单元尺

寸需小于或等于长度尺度 l , 从而确保大多数正则化模型(包括梯度模型)的有效性. 因此, 如果计算模型较大(以m为单位)的条件下, 在网格划分时往往需要数百万及上千万单元, 这将导致巨大的计算成本. 为了避免这一情况, 根据前述细观模拟研究结果表明, 若试样宽度与平均粒径 d_{50} 的比值大于某临界值(如60), 则平均粒径对剪切带宽度和应力-应变曲线的影响较小. 根据这一结论, 可提出另一种可能的方法, 即在保证试样宽度与平均粒径 d_{50} 的比值大于临界值时, 放大平均粒径值, 并据此确定特征长度参数. 在这一过程中, 还可通过降低应变软化率来补偿放大特征长度对数值结果的影响.

4 应变软化颗粒材料边值问题模拟

4.1 地基承载力

将引入的隐式梯度的应变软化塑性本构模型用于条形基础地基承载力数值模拟. 考虑到对称型, 使用一半模型来提高计算效率, 建立的计算模型如图13所示. 模型尺寸为8 m×4 m, 底座位移完全约束, 侧面水平位移约束. 基础区域施加竖向荷载, 且假定基础-土层接触面为完全粗糙(即加载过程中, 加载区域无水平方向位移). 模型划分为12800个单元. 材料参数为: 弹性模量 $E=4.0\times 10^4$ kPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 内聚力 $c=40$ kPa, 摩擦角 $\varphi=30^\circ$, 膨胀角 $\psi=15^\circ$, 塑性硬化模量 $H=-8.0\times 10^2$ kPa, 耦合模量 $\tilde{h}=1.6\times 10^3$ kPa, 特征长度参数 $l=0.2$ m, 顶点平滑参数 $l_0=0.5$ kPa.

进一步基于梯度理论分析地基土应变软化对条形基础地基承载特性的影响. 根据理想弹塑性模型和隐式梯度应变软化模型, 计算得到等效塑性剪应变分布如图14所示. 两个模型均显示塑性区出现在基础下方并延伸至地表形成滑动面, 但相对理想弹塑性模型而

图13 条形地基承载力计算模型

Figure 12 Calculation model of bearing capacity of strip foundation.

言, 应变软化模型得到的破坏范围更接近于基础, 局部化区域更集中. 土体应变软化导致基础附近有更大变形, 但地表变形影响范围较小. 产生这种现象的原因在于随着地基沉降增加, 基础附近土体先进入应变软化状态, 屈服应力降低导致土体抗变形能力减弱, 并产生更大地表隆起和水平位移. 距基础较远处土体应变软化程度较小, 当该处土体发生塑性流动前, 地基整体已达到残余强度状态. 计算的荷载位移关系如图15所示, 理想弹塑性模型得到的极限承载力大于应变软化条件下的值, 且土体应变软化导致承载力达到峰值后持续降低.

4.2 隧道开挖面被动破坏

在盾构隧道开挖过程中, 开挖面上过大的支护压力可能导致开挖面被动变形过大乃至破坏, 使得地面

图14 (网络版彩图)等效塑性剪应变分布. (a) 理想弹塑性模型; (b) 应变软化模型

Figure 14 (Color online) Equivalent plastic shear strain distribution. (a) Ideal elastoplastic model; (b) strain softening model.

图15 (网络版彩图)荷载位移响应

Figure 15 (Color online) Load-displacement response.

隆起。然而,在现有的隧道开挖面被动破坏研究中,大多基于理想弹塑性材料开展,较少考虑土体应变软化的影响。为反映土体应变软化的影响,将建立的模型用于浅埋隧道渐进被动破坏过程模拟,建立的分析模型如图16所示。模型高度为20 m,宽度为30 m,隧道直径为5 m,埋深为6 m。假定隧道衬砌为刚性,即开挖区域上下边界不产生位移。模型底部位移完全约束,且模型两侧边界约束法向变形,通过在开挖面施加水平位移荷载来模拟开挖过程施加的过高支护压力。计算模型划分为4107个单元。模型参数为:弹性模量 $E=4.0 \times 10^4$ kPa,泊松比 $\nu=0.3$,内聚力 $c=40$ kPa,摩擦角 $\varphi=30^\circ$,膨胀角 $\psi=5^\circ$,塑性硬化模量 $H=-1.0 \times 10^3$ kPa,加权系数 $\tilde{h}=2 \times 10^3$ kPa,特征长度参数 $l=0.5$ m,顶点平滑参数 $l_0=1.0$ kPa。

基于理想弹塑性模型及隐式梯度应变软化塑性模

图 16 隧道开挖面被动破坏模型

Figure 16 Model of passive failure of tunnel excavation face.

图 17 (网络版彩图)等效塑性剪应变分布。(a) 理想弹塑性模型;(b) 应变软化模型

Figure 17 (Color online) Equivalent plastic shear strain distribution. (a) Ideal elastoplastic model; (b) strain softening model.

型得到的等效塑性剪应变分布如图17所示。结果表明,塑性区域在隧道开挖面的底部及拱顶附近出现,并逐渐在空间上传播到地面。然而,应变软化模型显示出比理想弹塑性模型更接近隧道面的局部破坏模式,计算得到的位移分布也证实了这一点,如图18所示。结果表明,对于应变软化土体,由隧道开挖面被动破坏引起的地面变形仅限于紧邻隧道面的区域,而从理想弹塑性模型获得的地面变形区域则更加偏离了隧道开挖面。同时,应变软化模型导致了更大的地表位移,这一规律与地基承载力分析类似,说明了应变软化对失稳区域的影响主要体现在更大的变形幅值以及更小的变形范围两方面。计算得到的开挖面支护压力与变形的关系表明,土体软化导致支护压力达到峰值后迅速减小,且峰值压力明显小于理想弹塑性情形。

5 总结

通过离散元细观和有限元连续介质角度研究了颗粒材料应变局部化特性,构建了梯度理论正则化的应变软化材料渐进破坏数值模拟技术,对典型岩土工程边值问题进行了模拟分析,得到如下结论。

(1) 双轴试验离散元模拟结果表明,密实颗粒材料在加载过程中呈现出先硬化后软化的应力应变关系,体积变形表现为先剪缩后剪胀。应变局部化存在尺寸效应,其带宽随试样尺寸与颗粒平均直径之比增大而增大,当该比值超过一定值后,尺度效应消失。

(2) 隐式梯度理论通过Helmholtz偏微分方程将细观变量(及其梯度)与局部硬化参数耦合,进而引入了

图 18 (网络版彩图)开挖面支护压力与变形的关系

Figure 18 (Color online) Relationship between support pressure and deformation of excavation face.

一个完整且不相容的细观变形场, 该变形场体现了非局部特性. 基于微态方法的广义热力学理论框架, 利用热力学第二定律建立了控制方程与非线性本构关系. 进一步地, 在考虑摩擦项的屈服函数中引入细观应变及梯度, 建立了考虑压力依赖性的非关联流动隐式梯度应变软化塑性模型, 开发了耦合位移和细观变量的有限元计算程序.

(3) 平面应变压缩试验的数值模拟表明, 所建立的

分析方法可消除应变局部化带和力-位移响应计算结果的网格敏感性, 从而验证了该模型能很好地正则化应变软化土体导致的病态边值问题. 对两类典型岩土工程边值问题(地基承载力及隧道开挖面稳定性分析)开展的数值模拟表明, 土体应变软化导致边值问题中获得的失稳破坏区域相比理想塑性模型更小, 而靠近荷载附近的土体则产生更大变形, 计算得到的力-位移响应呈现出先增加后减少最后达到稳定的趋势.

参考文献

- Ikeda K, Yamakawa Y, Desrues J, et al. Bifurcations to diversify geometrical patterns of shear bands on granular material. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 198001
- Huang M S. Analysis methods for stability and bearing capacity of soils (in Chinese). *Chinese J Eng Des*, 2016, 38: 1–34 [黄茂松. 土体稳定与承载特性的分析方法. *岩土工程学报*, 2016, 38: 1–34]
- Alshibli K A, Batiste S N, Sture S. Strain localization in sand: Plane strain versus triaxial compression. *J Geotech Geoenviron Eng*, 2003, 129: 483–494
- Goddard J D. Continuum modeling of granular media. *Appl Mech Rev*, 2014, 66: 050801
- Hill R, Hutchinson J W. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J Mech Phys Solids*, 1975, 23: 239–264
- Huang M, Lu X, Qian J. Non-coaxial elasto-plasticity model and bifurcation prediction of shear banding in sands. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2009, 34: 906–919
- Lü X L, Huang M S, Qian J G. Strength of soils considering the influence of deformation bifurcation under true triaxial condition (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2011, 32: 21–26 [吕玺琳, 黄茂松, 钱建固. 真三维状态下土体强度及变形分叉影响. *岩土力学*, 2011, 32: 21–26]
- Oda M, Takemura T, Takahashi M. Microstructure in shear band observed by microfocus X-ray computed tomography. *Géotechnique*, 2004, 54: 539–542
- Alshibli K A, Hasan A. Spatial variation of void ratio and shear band thickness in sand using X-ray computed tomography. *Géotechnique*, 2008, 58: 249–257
- Besuelle P, Viggiani G, Lenoir N, et al. X-ray micro CT for studying strain localization in clay rocks under triaxial compression. In: *GEOX 2006—2nd International Workshop on X-Ray CT for Geomaterials*. Aussois, 2006. 35–52
- Hall S A, Muir Wood D, Ibraim E, et al. Localised deformation patterning in 2D granular materials revealed by digital image correlation. *Granular Matter*, 2010, 12: 1–14
- Fu P, Dafalias Y F. Study of anisotropic shear strength of granular materials using DEM simulation. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2011, 35: 1098–1126
- Guo P. Critical length of force chains and shear band thickness in dense granular materials. *Acta Geotech*, 2012, 7: 41–55
- Li X, Yu H S, Li X S. Macro-micro relations in granular mechanics. *Int J Solids Struct*, 2009, 46: 4331–4341
- Zhao J, Guo N. The interplay between anisotropy and strain localisation in granular soils: A multiscale insight. *Géotechnique*, 2015, 65: 642–656
- Yang Z X, Yang J, Wang L Z. Micro-scale modeling of anisotropy effects on undrained behavior of granular soils. *Granular Matter*, 2013, 15: 557–572
- Shan T, Zhao J. A coupled CFD-DEM analysis of granular flow impacting on a water reservoir. *Acta Mech*, 2014, 225: 2449–2470
- Oka F, Higo Y, Kimoto S. Effect of dilatancy on the strain localization of water-saturated elasto-viscoplastic soil. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 3625–3647
- Alsaleh M I, Voyiadjis G Z, Alshibli K A. Modelling strain localization in granular materials using micropolar theory: Mathematical formulations. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2006, 30: 1501–1524
- Li X K, Tang H X. Pressure-dependent elasto-plastic Cosserat continuum model and finite element simulation of strain localization (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2005, 9: 1497–1505 [李锡夔, 唐洪祥. 压力相关弹塑性Cosserat连续体模型与应变局部化有限元模拟. *岩石力学与工*

程学报, 2005, 9: 1497–1505]

- 21 Lu X, Bardet J P, Huang M. Spectral analysis of nonlocal regularization in two-dimensional finite element models. [Int J Numer Anal Meth Geomech](#), 2012, 36: 219–235
- 22 Qu X, Huang M S, Lü X L. Analysis of progressive failure in soils based on non-local Mohr-Coulomb models (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2013, 35: 523–530 [曲颢, 黄茂松, 吕玺琳. 基于非局部Mohr-Coulomb模型的土体渐进破坏分析. 岩土工程学报, 2013, 35: 523–530]
- 23 de Borst R, Pamin J, Peerlings R H J, et al. On gradient-enhanced damage and plasticity models for failure in quasi-brittle and frictional materials. [Comput Mech](#), 1995, 17: 130–141
- 24 Du X L, Hou S W, Lu D C, et al. Application of gradient plastic theory based on FEPG platform (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2012, 34: 1094–1101 [杜修力, 侯世伟, 路德春, 等. 梯度塑性理论的计算方法与应用. 岩土工程学报, 2012, 34: 1094–1101]
- 25 Aifantis E C. The physics of plastic deformation. [Int J Plast](#), 1987, 3: 211–247
- 26 Vardoulakis I, Aifantis E C. A gradient flow theory of plasticity for granular materials. [Acta Mech](#), 1991, 87: 197–217
- 27 Engelen R A B, Geers M G D, Baaijens F P T. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. [Int J Plast](#), 2003, 19: 403–433
- 28 Lü X, Xue D, Lim K W. Implicit gradient softening plasticity for the modeling of strain localization in soils. [Comput Methods Appl Mech Eng](#), 2020, 364: 112934
- 29 Anand L, Aslan O, Chester S A. A large-deformation gradient theory for elastic-plastic materials: Strain softening and regularization of shear bands. [Int J Plast](#), 2012, 30–31: 116–143
- 30 Forest S. Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage. [J Eng Mech](#), 2009, 135: 117–131
- 31 Peerlings R H J, De Borst R, Brekelmans W A M, et al. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. [Int J Numer Meth Eng](#), 1996, 39: 3391–3403
- 32 Peerlings R H J, Massart T J, Geers M G D. A thermodynamically motivated implicit gradient damage framework and its application to brick masonry cracking. [Comput Methods Appl Mech Eng](#), 2004, 193: 3403–3417
- 33 Poh L H, Sun G. Localizing gradient damage model with decreasing interactions. [Int J Numer Meth Eng](#), 2017, 110: 503–522
- 34 Poh L H, Swaddiwudhipong S. Over-nonlocal gradient enhanced plastic-damage model for concrete. [Int J Solids Struct](#), 2009, 46: 4369–4378
- 35 Zreid I, Kaliske M. An implicit gradient formulation for microplane Drucker-Prager plasticity. [Int J Plast](#), 2016, 83: 252–272
- 36 Zreid I, Kaliske M. A gradient enhanced plasticity-damage microplane model for concrete. [Comput Mech](#), 2018, 62: 1239–1257
- 37 Bryant E C, Sun W C. A micromorphically regularized Cam-clay model for capturing size-dependent anisotropy of geomaterials. [Comput Methods Appl Mech Eng](#), 2019, 354: 56–95
- 38 Xiao Y, Stuedlein A W, Ran J, et al. Effect of particle shape on strength and stiffness of biocemented glass beads. [J Geotech Geoenviron Eng](#), 2019, 145: 06019016
- 39 Poh L H, Peerlings R H J, Geers M G D, et al. An implicit tensorial gradient plasticity model – Formulation and comparison with a scalar gradient model. [Int J Solids Struct](#), 2011, 48: 2595–2604

Microscopic and macroscopic numerical simulation of the progressive failure of granular materials

LÜ XiLin^{1,2}, XUE DaWei^{1,2}, MA YiYue¹, ZENG Sheng¹ & HUANG MaoSong^{1,2}

¹ Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

² Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China

The onset and propagation mechanisms of strain localization in granular materials have been analyzed from both discontinuous microscale discrete element modeling (DEM) and continuum mechanics-based finite element modeling standpoints. Through DEM, the mechanical response before and after the inception of strain localization is obtained. The evolution characteristics of the shear band are obtained by analyzing the relative displacement angle of particles. By analyzing the size effect of strain localization in granular materials, the relationship between the sample size-to-average particle size ratio and the thickness of the shear band is obtained. A generalized thermodynamics framework based on the micromorphic approach is adopted, where a nonlocal microvariable as an additional kinematics variable is introduced. An implicit gradient softening plasticity model considering pressure dependence is then proposed. The additional so-called Helmholtz partial differential equation is derived using the principle of virtual power and the second law of thermodynamics. A regularized finite element method coupling displacement and microvariable are proposed. Numerical simulations of plane strain compression tests show that the proposed numerical method can produce solutions, which are independent of the spatial discretization, verifying the applicability of the proposed model on regularizing ill-posed boundary value problems of strain-softening granular materials. Through analyses of the bearing capacity of the foundation and the stability of the tunneling surface, the effects of strain-softening behavior on the inelastic strain localization characteristics and macroscale mechanical responses are investigated. The results show that strain-softening behavior results in smaller active instability regions and more concentrated localized deformation.

granular material, strain-softening, progressive failure, strain localization, discrete element method, finite element simulation

doi: [10.1360/SST-2021-0326](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0326)