从 Frobenius 特征标公式到顶点算子

献给刘绍学教授 90 华诞

景乃桓^{1,2}

1. Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh 27695, USA;

2. 上海大学理学院数学系, 上海 200444

E-mail: jing@math.ncsu.edu

收稿日期: 2018-04-18; 接受日期: 2018-06-20; 网络出版日期: 2018-10-30

国家自然科学基金 (批准号: 11531004) 资助项目

摘要 本文利用群表示论方法简洁证明了 Frobenius 对称群特征标公式和 Specht 圈群特征标公式. Frobenius 关于对称群的特征标公式已经显现了顶点算子的雏形, 本文提出的证明关键是利用对称群 Grothendieck 环的乘法公式得到 Bernstein 顶点算子. 同时, 本文将此方法推广到圈群链的 Grothendieck 环, 利用顶点算子和广义 Clifford 代数导出圈群的不可约特征标, 简单地证明了 Specht 关于圈群的特征标公式.

关键词 Frobenius 特征标公式 顶点算子 Grothendieck 环 Specht 特征标公式

MSC (2010) 主题分类 17B69, 20C15

1 引言

Frobenius 通过推广数论中交换群特征标的概念, 引入了有限群的特征标概念, 创造性地利用对称函数方法, 完全确定了对称群的不可约特征标. Frobenius 关于对称群的特征标公式^[1]开创了群表示理论, 具有划时代的意义.

用 Schur-Weyl 对偶来描述 Frobenius 公式可参见经典文献 [2]. Frobenius 公式与对称函数的直接联系在文献 [3] 中已有详细介绍, 直到文献 [4] 进一步系统化. 与本文最接近的是文献 [5] 中的 McKay 对应和顶点算子法, 后者已经运用范畴化的思想得到了 Specht 公式. 本文主要运用 Grothendieck 环的乘法来导出顶点算子的基本公式, 然后用生成函数的方法来重新诠释 Frobenius 方法.

Frobenius 特征标公式的本质是建立了从特征标空间到对称函数环之间的同构映射, 在此映射下, 每一个不可约特征标对应于一个正交 Schur 对称函数, 并且每一个共轭类对应于一个幂积对称函数. 这样, Frobenius 公式便通过这两组对称函数组成的正交基底的转换矩阵系数来计算对称群不可约特征标的数值.

英文引用格式: Jing N. From Frobenius character formula to vertex operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1717–1728, doi: 10.1360/N012018-00110

全体对称群的不可约表示组成的 Grothendieck 环, 其乘法运算是本文的出发点. 本文证明了该环的局部常数特征函数在乘法运算下满足一类很特殊的性质, 而这一类特殊性质可以导出 Bernstein 顶点算子, 该顶点算子对应于 Schur 对称函数, 进而通过这种方法来计算对称群的所有不可约特征标. 此后, Specht 关于圈群的特征标表的工作可以更好地用 Clifford 顶点代数来计算.

对称群 S_n 的表示空间 $R(S_n)$ 在自然加法下生成 Abel 群, 它们全部加起来组成一个新的加法群

$$R_S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(S_n). \quad (1.1)$$

R_S 上的经典内积 $(\cdot, \cdot)$ 由下列方式定义: 对于任意两个表示 ρ_1 和 ρ_2 , $(\rho_1, \rho_2) = \dim \text{End}(\rho_1, \rho_2)$, 然后再线性延拓到整个空间. 利用对称群的外直积 $S_m \times S_n$ 按文字排列自然嵌入到 S_{m+n} 加法群 R_S 上可以定义乘法使得 R_S 成为结合代数. 具体而言, 对于两个共轭类函数 $f \in R(S_m)$ 和 $g \in R(S_n)$, 其乘法定义为

$$f \cdot g = \text{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} f \otimes g. \quad (1.2)$$

R_S 在此乘法下组成的环称为对称群链的 Grothendieck 环. 事实上, R_S 也构成一个 Frobenius 代数.

对称群链组成的 Grothendieck 环拥有一个非常特殊的性质: 可以选择 R_S 内局部常数函数作为 R_S 的一组正交基底. 利用 S_n 的共轭类是由所有 n 的分拆 $\mathcal{P}_n$ 来刻画, 可以把加群 R_S 进行分次:

$$R_S = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} R_\lambda, \quad (1.3)$$

此处 $R_\lambda = \{f \in R_S \mid f(C_\lambda) = \text{const}\}$, $\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$, 而 $\mathcal{P}_n$ 是 n 的分拆的集合. 对于任意固定分拆 μ , 定义函数 $\beta_\mu \in R_S$ 为共轭类 C_μ 上取值 $z_\mu = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!$ 的特征函数, 即

$$\beta_\mu(C_\lambda) = \begin{cases} z_\mu, & \lambda = \mu, \\ 0, & \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (1.4)$$

特别地, S_n 的一维表示就可以用 β_n 来表示. 那么, Frobenius 公式的要旨便可以简单归结为: 所有其他共轭类函数都可以简单地利用 β_n 的乘积简单表达出来.

下面进一步说明这一原理. 首先对称群 S_n 的一维不可约表示都可以通过一维表示在 Grothendieck 环的乘法 (1.2) 下生成. 设 χ_n 为 S_n 的平凡表示对应的特征标, 注意到 $\beta_{(n)}$ 为在共轭类 $C_{(n)}$ 上取值 n 的特殊函数, 乘法规则 (1.2) 可以导出

$$\beta_{(m)}\beta_{(n)} = \beta_{(m,n)}. \quad (1.5)$$

那么, 在 R_S 上考虑一维表示的整体生成函数得到

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n t^n = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} t^i \right). \quad (1.6)$$

最后的指数函数正好是顶点算子的一半. 为了构造所有的不可约特征标, 可以运用 Bernstein 顶点算子

$$B(t) = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}^*}{i} t^{-i} \right) \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} t^i \right) = \sum_n B_n t^n. \quad (1.7)$$

这样一般的不可约特征标便可以表为 $B_{\lambda_1} B_{\lambda_2} \cdots B_{\lambda_l}$, 这就是 Frobenius 公式的顶点算子表达方式.

本文将利用这一方法研究圈群 $\Gamma_n = \Gamma \wr S_n$ 的所有不可约特征标, 首先证明 G_n 所对应的群链的 Grothendieck 环

$$R_\Gamma = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(\Gamma_n) \quad (1.8)$$

具有类似的 Frobenius 代数结构, 通过类似 (1.2) 的方式定义乘法, 然后证明 R_Γ 的特征函数也有类似性质, 最后利用圈群的 Schur 函数得到全部的不可约特征标. 这一方法可以简洁地得到 Specht 特征标公式.

2 对称群的特征标和顶点算子

设 S_n 是 n 个文字的对称置换群. 按照 Frobenius 的一般理论, S_n 的全体复不可约表示的个数正好等于 S_n 的共轭类个数. 因为每一个置换都可以表示为不相交循环置换的乘积, 这些不相交循环置换的长度在共轭作用下不变, 所以, S_n 每一个共轭类正好对应于整数 n 的一个分拆:

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l, \quad (2.1)$$

其中循环置换的长度 α_i 按递减 (或递增) 方式排列, 而分拆 α 的长度 $l = l(\alpha)$ 便是相互交换的循环置换的个数. 若分拆中数字 i 的重数为 m_i , 则

$$n = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \cdots, \quad m_i \geq 0. \quad (2.2)$$

令 $R(G)$ 为群 G 的复数域上的 Grothendieck 群. 作为向量空间 $R(G)$ 是 G 上的复共轭类函数 (简称类函数) $R(G) = \bigoplus_{\pi \in G^*} \mathbb{C}\chi_\pi$, 此处 G^* 为 G 的复单模的集合, 而 χ_π 是不可约模 π 对应的特征标. $R(G)$ 上有对称双线性型:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)g(x^{-1}) = \sum_{C \in G_*} \frac{1}{z_C} f(C)g(C^{-1}). \quad (2.3)$$

设 β_C 为共轭类集合 G_* 上的“正则化”特征类函数:

$$\beta_C(g) = \begin{cases} z_C, & g \in C, \\ 0, & g \notin C, \end{cases} \quad (2.4)$$

那么, $\{\beta_C\}$ 组成 $R(G)$ 上的一组基, 且有 $\langle \beta_C, \beta_{C'} \rangle = \delta_{C^{-1}, C'} z_C$, 这里 $z_C = |G|/|C| = |Z(C)|$ 是共轭类 C 的中心化子 $Z(C)$ 的阶. 如果 w 是 C 内的一个代表元, 也写成 $\beta_C = \beta_w$, 那么, 特征 χ 可以表为

$$\chi = \sum_{C \in G_*} \frac{1}{z_C} \chi(C) \beta_C = \langle \chi, \mathbf{B} \rangle. \quad (2.5)$$

最后的等式中的 $\mathbf{B}$ 是 G 上以 $R(G)$ 为值的类函数, 其定义为 $\mathbf{B} = \sum_C \beta_C$. 等式 (2.5) 一般称为 Frobenius 对应.

从子群 H 到 S_n 的诱导特征标 β_C^G ($m \leq n$) 是

$$\beta_C^G(u) = \frac{1}{|H|} \sum_{s \in S_n} \beta_C(s^{-1}us), \quad (2.6)$$

其中 $\dot{\beta}_C$ 是 S_n 上的延拓函数: $\dot{\beta}_C|_H = \beta_C$ 且 $\dot{\beta}_C(S_n \setminus H) = 0$.

现在开始考虑一组群链: $1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq G_3 \leq \dots$ 使得 $G_m \times G_n \hookrightarrow G_{m+n}$. 表示 (加法) 群

$$R_G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(G_n) \quad (2.7)$$

在二元乘法

$$f \cdot g = \text{Ind}_{G_m \times G_n}^{G_{m+n}} f \otimes g, \quad f \in R(G_m), \quad g \in R(G_n) \quad (2.8)$$

下组成一个交换代数. R_G 上的双线性型由 G_n 上的双线性型导出: 如果 $f = \sum f_n$, $g = \sum g_n$, $f_n, g_n \in R(G_n)$, 那么, $\langle R(G_m), R(G_n) \rangle = 0$, $m \neq n$, 并且

$$\langle f, g \rangle = \sum \langle f, g \rangle_{G_n}. \quad (2.9)$$

如果 $G_n = S_n$, 则 R_G 实际上是一个环, 因为此时不难验证该乘法满足结合率. 如果 C_1 和 C_2 分别是 G_m 和 G_n 的共轭类, 用 $C_1 \cup C_2$ 表示 $C_1 \times C_2 \subset G_m \times G_n$ 在 G_{m+n} 内确定的共轭类. 特别地, λ 和 μ 是对称群 S_m 和 S_n 的两个共轭类对应的分拆, 那么, $\lambda \cup \mu$ 就是合并 λ 和 μ 的部分所组成的分拆. 对于由对称群 S_n 组成的群链, 记 $R(S) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(S_n)$.

首先来证明下面的重要命题, 它说明了为何要定义正则化特征函数以及 Frobenius 对应的意义.

命题 2.1 设 λ 和 μ 分别是 m 和 n 的两个分拆, 则在 $R(S)$ 上,

$$\beta_\lambda \cdot \beta_\mu = \beta_{\lambda \cup \mu}. \quad (2.10)$$

进而可以得到 $R(S) = \mathbb{C}[\beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \beta_{(3)}, \dots]$, 并且 $\{\beta_\lambda\}$ 组成 $R(S)$ 上的一组线性正交基:

$$\langle \beta_\lambda, \beta_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}, \quad (2.11)$$

此处 $z_{(1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots)} = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$.

证明 首先对任意自然数 i 和非负整数 m 来证明等式

$$\beta_{(i^m)} = \beta_{(i)}^m. \quad (2.12)$$

可以设 $\beta_{(i)}^m$ 中的特征函数因子分别对应如下的 m 个互换的 i 阶循环置换:

$$C_1 = (a_1 \cdots a_i), \quad C_2 = (b_1 \cdots b_i), \quad \dots, \quad C_m = (c_1 \cdots c_i).$$

现在计算 $\beta_{(i)}^m$ 在 $C_1 \cdots C_m$ 上的值. 根据诱导特征的性质, 有

$$\begin{aligned} \beta_{(i)}^m(C_1 \cdots C_m) &= \text{Ind}_{S_i \times \dots \times S_i}^{S_{im}} \beta_{(i)}^{\otimes m}(C_1 \cdots C_m) \\ &= \sum_{r \in S_{im}/S_m \times \dots \times S_m} (\beta_{(i)} \otimes \dots \otimes \beta_{(i)})(r^{-1} C_1 \cdots C_m r). \end{aligned}$$

在共轭作用下,

$$r^{-1} C_1 \cdots C_m r = (r^{-1}(a_1) \cdots r^{-1}(a_i)) \cdots (r^{-1}(c_1) \cdots r^{-1}(c_i))$$

还是等于 $C_1 \cdots C_m$, 当且仅当作为陪集代表元的 r 对于文字 $1, 2, \dots, mi$ 的作用, 相当于把 m 个集合 $\{a_1, \dots, a_i\}, \{b_1, \dots, b_i\}, \dots, \{c_1, \dots, c_i\}$ 仍然映射到 m 个集合 $\{a_1, \dots, a_i\}, \{b_1, \dots, b_i\}, \dots, \{c_1, \dots, c_i\}$. 这样便有

$$\beta_{(i)}^m(C_1 \cdots C_m) = m! \beta_{(i)}(C_1) \cdots \beta_{(i)}(C_m) = \beta_{(i^m)}(C_1 \cdots C_m)$$

正好是 $\beta_{(i^m)}$ 的非平凡数值. 根据同样的推导不难得知, $\beta_{(i)}^m$ 在其他的共轭类上取值均为 0, 所以, $\beta_{(i)}^m = \beta_{(i^m)}$.

同理可以得出, 如果 $\lambda \cap \mu = \emptyset$, 则 $\beta_\lambda \cdot \beta_\mu = \beta_{\lambda \cup \mu}$. 根据这两种情形可以推出一般情形下 $\beta_\lambda \cdot \beta_\mu = \beta_{\lambda \cup \mu}$. 于是, 对于由循环类 $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots)$ 确定的一般共轭类, 规范化特征函数总有

$$\beta_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots)} = \beta_{(\alpha_1)} \beta_{(\alpha_2)} \beta_{(\alpha_3)} \cdots \quad (2.13)$$

最后一个结果由 $\beta_\alpha, \alpha \vdash n$ 组成 $R(S_n)$ 的正交基得到. $\square$

注 2.1 不难验证 $R(S)$ 实际上是一个 Hopf 代数, 余积、反极 (anti-pode) 和余单位分别为

$$\Delta(\beta_{(n)}) = \beta_{(n)} \otimes 1 + 1 \otimes \beta_{(n)}, \quad (2.14)$$

$$S(\beta_{(n)}) = -\beta_{(n)}, \quad (2.15)$$

$$\eta(\beta_{(n)}) = \delta_{n,0}. \quad (2.16)$$

现在回到对称群 S_n 的表示. 所有的不可约特征标可以记为 $\chi_\lambda, \lambda \vdash n$. S_n 的平凡表示对应于分拆 (n) , 其特征标便是

$$\chi_{(n)} = \sum_{\alpha \vdash n} \frac{1}{z_\alpha} \beta_\alpha. \quad (2.17)$$

利用命题 2.1, $\chi_{(n)}$ 的生成函数作为 $R(S)$ 的一元可以表为

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{(n)} t^n = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \frac{t^{|\alpha|}}{z_\alpha} \beta_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1+2m_2+\cdots=n} \frac{t^n}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2!} \beta_{(1^{m_1})} \beta_{(2^{m_2})} \cdots \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t^{im_i}}{i^{m_i} m_i!} \beta_{(i^{m_i})} \right) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp \left(\frac{t^i \beta_{(i)}}{i} \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} t^i \right). \end{aligned}$$

这正是 Garland 注意到的顶点算子的一半. 类似地, S_n 的交错表示 $V_{(1^n)}$ 对应的特征标生成函数在 $R(S)$ 内是

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{(1^n)} t^n &= \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \frac{\text{sgn}(\alpha)}{z_\alpha} \beta_\alpha t^{|\alpha|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1+2m_2+\cdots=n} \frac{(-1)^{n-m_1-m_2-\cdots}}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2!} \beta_{(1^{m_1})} \beta_{(2^{m_2})} \cdots t^n \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m_i=0}^{\infty} (-1)^{m_i} \frac{(-t)^{im_i}}{i^{m_i} m_i!} \beta_{(i^{m_i})} \right) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp \left(- \frac{(-t)^i \beta_{(i)}}{i} \right) \\ &= \exp \left(- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} (-t)^i \right) = S(\chi(-t)). \end{aligned}$$

对于 $f \in R(S)$, 定义 f^* 如下: 如果 $f \in R(G_n)$, 则对于任意 $g \in R(G_m), h \in R(G_{m-n})$, 有

$$\langle f^* g, h \rangle = \langle g, fh \rangle. \quad (2.18)$$

不难验证 $\beta_{(n)}^* = n \frac{\partial}{\partial \beta_{(n)}}$. 进而马上得到如下结果:

引理 2.1 作为 $R(S)$ 上的阶化线性算子, $\beta_{(n)}$ 和 $\beta_{(n)}^*$ 分别把 $R(S_m)$ 映到 $R(S_{m \pm n})$ 并且

$$[\beta_{(m)}, \beta_{(n)}^*] = -m \delta_{m,n} \text{Id}. \quad (2.19)$$

为了构造 $R(S)$ 中对应于不可约特征标的正则基, 引入顶点算子^[6]

$$S(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n t^{-n} = \chi(t) \chi(-t^{-1})^* = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \beta_{(i)} t^i \right) \exp \left(- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta_{(i)}} t^{-i} \right). \quad (2.20)$$

显然, $S(t)1 = \chi(t)$. 注意, 这里可以说这两个顶点算子是从 S_n 的平凡模通过乘法得到的. 为了方便, 也引入对偶顶点算子:

$$S(t)^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^* t^{-n} = \exp \left(- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \beta_{(i)} t^i \right) \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta_{(i)}} t^{-i} \right). \quad (2.21)$$

令 $\phi(\beta_{(n)}) = p_n$ 为 n 次幂积对称函数, 则 ϕ 成为 $R(S)$ 到对称函数环 Λ 的同构. 从 (2.17) 得知, $\phi(\chi_{(n)}) = s_n$, 即 n 次 Schur 多项式或者 n 次完备对称多项式.

在同构映射下, ϕ 正好把顶点算子 $S(t)$ 映到 Bernstein 顶点算子^[7].

命题 2.2 作为 $R(S)[t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}]$ 上的算子, 顶点算子满足下列交换关系:

$$\begin{aligned} t_1 S(t_1) S(t_2) &= -t_2 S(t_2) S(t_1), \\ t_2(t_1 - t_2) S(t_1) S^*(t_2) &= t_1(t_2 - t_1) S^*(t_2) S(t_1). \end{aligned}$$

定理 2.1^[6] 对于分拆

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n,$$

$S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} \cdots S_{\lambda_l} 1$ 组成 $R(S_n)$ 内的正则正交向量并且正好对应于不可约特征标 χ_λ . 因此, 特征标表由矩阵系数给出

$$\chi_\lambda(C_\mu) = \langle S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} \cdots S_{\lambda_l} 1, \beta_{\mu_1} \cdots \beta_{\mu_k} \rangle. \quad (2.22)$$

在同构映射 ϕ 下, 特征标 $S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} \cdots S_{\lambda_l} 1$ 对应于 Schur 对称多项式 s_λ , 而共轭类函数 $\beta_{\mu_1} \cdots \beta_{\mu_k}$ 对应于幂积对称多项式 $p_\mu = p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_k}$.

证明 事实上, 利用顶点算子的性质, 当 $|t_1| > \cdots > |t_l|$ 时,

$$S(t_1) S(t_2) \cdots S(t_l) 1 = \prod_{i < j} \left(1 - \frac{t_j}{t_i} \right) \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{(n)}}{n} (t_1^n + \cdots + t_l^n) \right). \quad (2.23)$$

因此, $t_1^{l-1} t_2^{l-2} \cdots t_l S(t_1) S(t_2) \cdots S(t_l) 1$ 可以延拓到整个 $\mathbb{C}^l$ 上 $(t_1, \dots, t_l)$ 的反对称函数.

利用 Vandermonde 行列式的性质, 可以证明 (参见文献 [8])

$$S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} \cdots S_{\lambda_l} 1 = \det(\chi_{(\lambda_i - i + j)})_{l \times l}. \quad (2.24)$$

所以,

$$\phi(S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} \cdots S_{\lambda_l} 1) = \det(s_{\lambda_i - i + j})_{l \times l}. \quad (2.25)$$

根据 Jacobi-Trudi 公式^[4], $\phi(S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} \cdots S_{\lambda_l} 1) = s_\lambda$ 正好是对应于分拆 λ 的 Schur 对称多项式. 进而也证明了 Frobenius 特征标公式:

$$s_\lambda = \sum_{\mu} \chi_\lambda(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu}. \quad (2.26)$$

证明完毕. □

下面将会在更一般的情形下简单证明顶点算子乘积生成正交向量.

3 圈群的特征标

圈群是对称群的推广. 如果把对称群表示为 $n \times n$ 的置换矩阵, 那么在任意给定有限群 Γ 上的圈群 $\Gamma_n = \Gamma \wr S_n$ 就是用 Γ 内的元素作为矩阵系数生成的广义置换矩阵组成的. 若 $g = (g_i)$, $h = (h_i) \in \Gamma^n$, $\sigma, \tau \in S_n$, 则圈群中两个元素 (g, σ) 和 (h, τ) 的乘法定义为

$$(g, \sigma)(h, \tau) = (gh^\sigma, \sigma\tau), \quad g^\sigma = (g_{\sigma^{-1}(i)}). \quad (3.1)$$

注意 $\sigma h \sigma^{-1} = h^\sigma$, 故而 $(h^\sigma)^\tau = h^{\tau\sigma}$. 为了方便, 可以把 $h^\sigma = \sigma h \sigma^{-1}$ 写为 $h_{\sigma^{-1}}$, 这样便有 $(h_{\sigma^{-1}})_{\tau^{-1}} = h_{(\sigma\tau)^{-1}}$, 也正好与它的分量吻合: $h_i^\sigma = h_{\sigma^{-1}(i)}$. 这样 $(g, \sigma)^{-1} = (g_\sigma^{-1}, \sigma^{-1})$.

为了更好地把 $R(S)$ 推广到圈群上, 要把 $R(S)$ 扩大成为顶点算子代数, 并利用波色费米对应 (boson-fermion correspondence) 来更好地求解圈群的特征标. 令

$$V(S) = R(S) \otimes \mathbb{C}[\mathbb{Z}\beta] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(S) e^{n\beta},$$

这里群代数 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}\beta]$ 的乘法定义为

$$e^{m\beta} e^{n\beta} = e^{(m+n)\beta}. \quad (3.2)$$

e^β 通过乘法作用在 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}\beta]$ 上, 同时定义算子 ∂_β :

$$\partial_\beta e^{n\beta} = n e^{n\beta}. \quad (3.3)$$

那么, $t^\partial e^{n\beta} = t^n e^{n\beta}$. 对 Bernstein 算子进行改造, 引入如下顶点算子:

$$X(t) = X(\beta, t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \beta_{(i)} t^i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta_{(i)}} t^{-i}\right) e^\beta t^{\partial_\beta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n t^{-n-1/2}, \quad (3.4)$$

$$X^*(t) = X^*(\beta, t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \beta_{(i)} t^i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta_{(i)}} t^{-i}\right) e^{-\beta} t^{-\partial_\beta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n^* t^{-n-1/2}. \quad (3.5)$$

从命题 2.2 马上得到 X_m 和 X_n^* 满足 Clifford 代数的关系:

命题 3.1 作为 $F(S)[t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}]$ 上的算子, 顶点算子满足下列交换关系:

$$X_m X_n + X_n X_m = X_m^* X_n^* + X_n^* X_m^* = 0, \quad X_m X_n^* + X_n^* X_m = \delta_{m, -n}.$$

如果把 $R(S)$ 上的双线性内积推广到 $V(S)$ 上, 则可以定义内积:

$$\langle f e^{m\beta}, g e^{n\beta} \rangle = \delta_{m, n} \langle f, g \rangle_{R(S)}. \quad (3.6)$$

利用 Clifford 代数关系很容易得到向量 $X_{n_1} X_{n_2} \cdots X_{n_l} e^{m\beta}$ ($n_1 < n_2 < \cdots < n_l < 0$) 组成 $V(S)$ 上的一组正则正交基. 具体地有如下结果:

定理 3.1 [8] 对于分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$, 向量

$$X_{-\lambda_1 - (l-1) - 1/2} X_{-\lambda_2 - (l-2) - 1/2} \cdots X_{-\lambda_l - 1/2} e^{m\beta}$$

组成 $R(S_n) e^{(m+l)\beta}$ 内的正则正交向量并且正好对应于不可约特征标 χ_λ :

$$X_{-\lambda - \rho + 1/2} e^{m\delta} = X_{-\lambda_1 - (l-1) - 1/2} X_{-\lambda_2 - (l-2) - 1/2} \cdots X_{-\lambda_l - 1/2} e^{m\beta} = s_\lambda e^{(m+l)\beta}. \quad (3.7)$$

对称群的全部特征标值由矩阵系数给出 (Frobenius 特征标公式的另一种顶点算子表达式)

$$\chi_\lambda(C_\mu) = \langle X_{-\lambda - \rho + 1/2} 1, \beta_{(\mu_1)} \cdots \beta_{(\mu_k)} e^{l\beta} \rangle. \quad (3.8)$$

现在可以把对称群的结果推广到圈群了. 设有限群 Γ 的所有不可约特征标为 $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. 设 $\Gamma^* = \{\gamma_i \mid i = 0, \dots, r\}$, 对应于不可约特征标 γ_i 的不可约 Γ -模是 V_i , 那么, 在 $R(\Gamma)$ 上就有

$$\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (3.9)$$

现在来看圈群的共轭类. 根据 Specht 的研究, 圈群 Γ_n 的共轭类对应于 Γ_* 上的权为 n 的分拆函数, 即所有 $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{P}$ 满足条件 $\|\rho\| := \sum_{x \in \Gamma} |\rho(x)| = n$ 的全体映射的集合, 或者是 n 的全部带颜色的分拆的集合, 这里 $\|\rho\|$ 称为分拆函数 ρ 的权. 假定 $\Gamma_* = \{c_i \mid i = 0, \dots, r\}$ 是 Γ 的全体共轭类的集合, 记 $\zeta_c = |\Gamma : Z_\Gamma(c)|$ 为共轭类 c 的长度, 这里 $Z_\Gamma(c)$ 是共轭类 c 的中心化子, 那么可以这样来描述共轭类 ρ 的代表元.

先引入循环积 (cycle-product) 的概念. 设 $x = (g, \sigma) \in \Gamma_n$, 而 $g = (g_1, \dots, g_n) \in \Gamma^n$, $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k) \in S_n$ 是一个循环, 就称元素 $g_{i_k} \dots g_{i_2} g_{i_1}$ 为对应于循环 σ 的循环积. 显然, 循环积所属的共轭类是与循环 σ 的表示方法无关的, 只取决于循环排列 $i_1 i_2 \dots i_k$. 如果 (h, τ) 是 Γ_n 的任意元, 那么,

$$(h, \tau)(g, \sigma)(h, \tau)^{-1} = (hg_{\tau^{-1}} h_{\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}}^{-1}, \tau\sigma\tau^{-1}),$$

故而循环积

$$\begin{aligned} & (hg_{\tau\sigma\tau^{-1}}^{-1})_{\tau(i_k)} \dots (hg_{\tau\sigma\tau^{-1}}^{-1})_{\tau(i_2)} (hg_{\tau\sigma\tau^{-1}}^{-1})_{\tau(i_1)} \\ &= h_{\tau(i_k)} g_{i_k} h_{\tau(i_{k-1})}^{-1} \dots h_{\tau(i_2)} g_{i_2} h_{\tau(i_1)}^{-1} h_{\tau(i_1)} g_{i_1} h_{\tau(i_k)}^{-1} \\ &= h_{\tau(i_k)} g_{i_k} \dots g_{i_2} g_{i_1} h_{\tau(i_k)}^{-1} \end{aligned}$$

与原来的循环积同属一个共轭类. 因此, Γ_n 的共轭类与 Γ_* 上的权为 n 的分拆函数一一对应.

设分拆函数 $\rho = (\rho(c)) \in \mathcal{P}(\Gamma_*)$ 写成一个带颜色的分拆

$$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l), \quad \rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_l > 0,$$

而 ρ_i 所带颜色为 $c'_i \in \Gamma_*$, 那么对应的 Γ_n 中的共轭类的代表元就可以是满足下面条件的圈群中的元:

$$\begin{aligned} & (g^{(1)} g^{(2)} \dots g^{(l)}, \sigma_1 \dots \sigma_l), \quad g^{(i)} = (g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{i\rho_i}) \in \Gamma^{\rho_i}, \quad g_{i\rho_i} \dots g_{i2} g_{i1} = c'_i, \\ & \sigma_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \rho_j + 1, \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j + 2, \dots, \sum_{j=1}^i \rho_j \right) \in S_{\rho_i}. \end{aligned}$$

特别地, 可以选择 $g^{(i)} = (c'_i, 1, \dots, 1) \in \Gamma^{\rho_i}$. 不难得到共轭类 ρ 的轨道长度是

$$Z_\rho = \prod_{c \in \Gamma_*} z_{\rho(c)} \zeta_c^{l(\rho(c))}. \quad (3.10)$$

对于两个表示 $\pi_i: \Gamma_{n_i} \rightarrow \text{End}(V_i)$, 定义乘法

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \text{Ind}_{\Gamma_{n_1} \times \Gamma_{n_2}}^{\Gamma_{n_1+n_2}} \pi_1 \otimes \pi_2. \quad (3.11)$$

对于两个用 X 着色分拆 $\rho = (\rho(x), \tau(x))$, $\tau = (\tau(x))$, 推广分拆的并集定义: $\rho \cup \tau = (\rho(x) \cup \tau(x))_{x \in X}$. 对于每一个共轭类 C_ρ , 引入正则特征函数 $a_\rho \in R(\Gamma_n)$:

$$a_\rho(C_\mu) = \begin{cases} Z_\rho, & \rho = \mu, \\ 0, & \rho \neq \mu. \end{cases} \quad (3.12)$$

现在证明下列重要命题:

命题 3.2 设 ρ 和 ρ' 是用 Γ_* 着色的两个分拆, 则在 $R_\Gamma = \bigoplus_{n \geq 0} R(\Gamma_n)$ 上有

$$a_\rho \cdot a_{\rho'} = a_{\rho \cup \rho'}. \quad (3.13)$$

证明 设着色分拆 $\rho = (\rho(c)) \in \mathcal{P}_m(\Gamma_*)$, $\rho' = (\rho'(c)) \in \mathcal{P}_n(\Gamma_*)$, 对应 c 的分拆分别为

$$\rho(c) = (1^{m_1(c)} 2^{m_2(c)} \dots), \quad \rho'(c) = (1^{m'_1(c)} 2^{m'_2(c)} \dots).$$

对于任意的 $r \geq 1$ 和 $c \in \Gamma_r$, 对于 $x \in C_\rho$ 和 $x' \in C_{\rho'}$ 中的一个颜色为 c 且长度为 r 的循环就分别为

$$(i_1 i_2 \cdots i_r), \quad g_{i_r} \cdots g_{i_2} g_{i_1} = c; \quad (j_1 j_2 \cdots j_r), \quad g_{j_r} \cdots g_{j_2} g_{j_1} = c,$$

那么正则特征函数 $a_\rho \cdot a_{\rho'}$ 在 $x \times x'$ 的值根据乘法定义就是

$$a_\rho \cdot a_{\rho'}(x \times x') = \text{Ind}_{\Gamma_m \times \Gamma_n}^{\Gamma_{m+n}} a_\rho \otimes a_{\rho'}(x \times x') = \sum_{y \in \Gamma_{m+n}/\Gamma_m \times \Gamma_n} a_\rho \otimes a_{\rho'}(y x \times x' y^{-1}).$$

因为 $\Gamma_{m+n}/\Gamma_m \times \Gamma_n \simeq S_{m+n}/S_m \times S_n$, 所以可以用置换 y 来做代表元. 在置换 y 的共轭作用下, 元素 $x \times x'$ 中的每一个长度为 r 的循环保持长度和颜色不变. 这样, 在陪集代表 y 的共轭作用下, $x \times x'$ 的全长度为 r 颜色为 c 的循环之集合:

$$(i_1^{(1)} \cdots i_r^{(1)}), \dots, (i_1^{(m_r(c))} \cdots i_r^{(m_r(c))}), (j_1^{(1)} \cdots j_r^{(1)}), \dots, (j_1^{(m'_r(c))} \cdots j_r^{(m'_r(c))})$$

仍然保持不变相当于对集合

$$\{i_a^{(b)}, j_a^{(e)} \mid 1 \leq a \leq r, 1 \leq b \leq m_r(c), 1 \leq e \leq m'_r(c)\}$$

进行了一次重新组合, 故而 (固定 c 和 r) 这样的陪集置换就有 $\frac{(m_r(c) + m'_r(c))!}{m_r(c)! m'_r(c)!}$ 个. 因此,

$$a_\rho \cdot a_{\rho'}(x \times x') = \prod_{c \in \Gamma_*, r \geq 1} \frac{(m_r(c) + m'_r(c))!}{m_r(c)! m'_r(c)!} a_\rho(x) \cdot a_{\rho'}(x').$$

容易得知 $a_\rho \cdot a_{\rho'}$ 在其他的共轭类上为 0, 于是, $a_\rho \cdot a_{\rho'} = a_{\rho \cup \rho'}$. □

这样便有如下关于 R_Γ 的刻画:

定理 3.2 表示环 R_{Γ_*} 是由 $a_n(c) := a_{n(c)}$ ($n \in \mathbb{N}$, $c \in \Gamma_*$) 生成的交换环. 生成元 $a_{n(c)}$ 按照通常乘法规则:

$$a_{m(c)} a_{n(c)} = a_{n(c)} a_{m(c)} = a_{(m(c), n(c))}, \quad a_{m(c)} a_{n(c')} = a_{n(c')} a_{m(c)} = a_{(m(c), n(c'))}.$$

若 $\rho = (\rho(c))$, $\rho(c) = (1^{m_1(c)} 2^{m_2(c)} \dots)$, 则

$$a_\rho := \prod_{c \in \Gamma_*, r \geq 1} a_{r, m_r(c)} = \prod_{c \in \Gamma_*, r \geq 1} a_{r, m_r(c)}(c). \quad (3.14)$$

证明 $a_{m(c)} a_{n(c)} = a_{\{m(c), n(c)\}}$ 等都是 $a_\rho a_{\rho'} = a_{\rho \cup \rho'}$ 的特殊情形. 任何共轭类函数都是有特征函数生成的, 所以结论成立. 特别地,

$$\langle a_n(c), a_m(c') \rangle = \delta_{m,n} \delta_{c,c'}. \quad (3.15)$$

证明完毕. □

设 γ 是群 Γ 的不可约模 V_γ 的特征标, 那么 $V_\gamma^{\otimes n}$ 在下列作用下构成圈群 Γ_n 的模 $\eta_n(\gamma)$:

$$((g_1, \dots, g_n), \sigma) v_1 \otimes \dots \otimes v_n = g_1 v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes g_n v_{\sigma^{-1}(n)}, \quad (3.16)$$

其特征标可以通过生成函数来确定.

定理 3.3 在 R_Γ 上有如下等式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(\gamma) z^n = \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{c \in \Gamma_*} \zeta_c^{-1} \gamma(c) a_r(c) \right). \quad (3.17)$$

证明 因为 $a_\rho(C_\mu) = \delta_{\rho\mu} Z_\rho$, 便有

$$\eta_n(\gamma) = \sum_{\rho \in \mathcal{P}_n(\Gamma_*)} \frac{\eta_n(\gamma)(C_\rho)}{Z_\rho} a_\rho. \quad (3.18)$$

进而,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(\gamma) z^n = \sum_{\rho \in \mathcal{P}(\Gamma_*)} \frac{1}{Z_\rho} \eta_n(\gamma)(\rho) a_\rho z^{\|\rho\|}. \quad (3.19)$$

设 Γ 在 V_γ 上的表示为 $\gamma(g)v_j = \sum_{ij} a_{ij}(g)v_i$, 先考虑最简单的循环置换的情形 $\sigma = (12 \cdots n)$, 且循环积 $g_n g_{n-1} \cdots g_1 = c$, 那么, (g, σ) 在 $V_\gamma^{\otimes n}$ 上的作用就是 (见 (3.16))

$$\begin{aligned} (g, \sigma)(v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes \dots \otimes v_{j_n}) &= g_1 v_{j_n} \otimes g_2 v_{j_1} \otimes \dots \otimes g_n v_{j_{n-1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 j_n}(g_1) a_{i_2 j_1}(g_2) \cdots a_{i_n j_{n-1}}(g_n) v_{i_n} \otimes v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{n-1}}. \end{aligned}$$

所以, 其迹为

$$\text{tr}(g, \sigma) = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1 j_n}(g_1) a_{j_2 j_1}(g_2) \cdots a_{j_n j_{n-1}}(g_n) = \gamma(g_n g_{n-1} \cdots g_1) = \gamma(c).$$

由此便推出, 若 (g, σ) 的共轭类是 $\rho = (\rho(c))$, $\rho(c) = (1^{m_1(c)} 1^{m_1(c)} \cdots)$, 那么,

$$\text{tr}(g, \sigma) = \prod_{c \in \Gamma_*} \prod_{r \geq 1} \gamma(c)^{m_r(c)} = \prod_{c \in \Gamma_*} \gamma(c)^{l(\rho(c))}. \quad (3.20)$$

于是, 根据 $a_n(c)$ 的乘法规则, 可以计算特征标 $\eta_n(\gamma)$ 的生成函数

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{\rho \in \mathcal{P}_n(\Gamma_*)} \frac{1}{Z_\rho} \eta_n(\gamma)(\rho) a_\rho z^n &= \sum_{\rho} \frac{1}{Z_\rho} \prod_{c \in \Gamma_*} \gamma(c)^{l(\rho(c))} a_\rho z^{\|\rho\|} \\ &= \prod_{c \in \Gamma_*} \prod_{r \geq 1} \left(\sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{1}{r^{m_r} m_r!} \frac{\gamma(c)^{m_r}}{\zeta_c^{m_r}} a_r(c)^{m_r} z^{r m_r} \right) \\ &= \prod_{c \in \Gamma_*} \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\gamma(c)}{\zeta_c} a_r(c) z^r \right) \\ &= \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{c \in \Gamma_*} \frac{\gamma(c)}{\zeta_c} a_r(c) z^r \right). \end{aligned}$$

证明完毕. □

据此引入 R_Γ 内另一组生成元

$$a_r(\gamma) = \sum_{c \in \Gamma_*} \frac{\gamma(c)}{\zeta_c} a_r(c). \quad (3.21)$$

作为 $R(\Gamma_r)$ 中的函数, $a_r(\gamma)$ 在共轭类上的取值为 $\zeta_c \gamma_c$. 这样便有下面的定理:

定理 3.4 在 R_Γ 上有如下等式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(\gamma) z^n = \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} a_r(\gamma) z^r \right). \quad (3.22)$$

由此得到 $\eta_n(\gamma)$ 是以 $a_r(\gamma)$ 为变量的齐次对称完备函数:

$$\eta_n(\gamma) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{a_\mu(\gamma)}{z_\mu}, \quad (3.23)$$

此处对于分拆 $\mu = (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_l)$, 有 $a_\mu(\gamma) = a_{\mu_1}(\gamma) a_{\mu_2}(\gamma) \cdots a_{\mu_l}(\gamma)$.

类似对称群的情形, 可以计算出 $a_n(\gamma)$ 满足 Heisenberg 交换关系

$$[a_m(\gamma), a_n(\gamma')] = m \delta_{m,n} \delta_{\gamma, \gamma'}. \quad (3.24)$$

为了得到所有的不可约表示, 利用顶点算子方法^[5], 对于任意的不可约特征标 γ , 引入顶点算子

$$X(\gamma, z) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{-n}(\gamma) z^{-n} \right) \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n(\gamma) z^n \right) e^{\gamma} z^{\partial_\gamma} = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} X_n(\gamma) z^{-n-1/2}. \quad (3.25)$$

利用交换关系, 可以简单证明下面的定理:

定理 3.5 在 R_Γ 上有如下 Clifford 型等式:

$$\{X_m(\gamma_i), X_n(\gamma_j)\} = \{X_m(-\gamma_i), X_n(-\gamma_j)\} = 0, \quad (3.26)$$

$$\{X_m(\gamma_i), X_n(-\gamma_j)\} = \delta_{ij} \delta_{m,-n}. \quad (3.27)$$

证明 利用顶点算子的交换关系不难得到

$$\begin{aligned} X(\gamma_i, z) X(\gamma_j, w) &= :X(\gamma_i, z) X(\gamma_j, w): (z-w)^{\delta_{ij}}, \\ X(\gamma_i, z) X(-\gamma_j, w) &= :X(\gamma_i, z) X(-\gamma_j, w): (z-w)^{-\delta_{ij}}, \end{aligned}$$

此处 $:A:$ 为算子 A 的正则化子. 进而可以得到 $[X(\gamma_i, z), X(\gamma_j, w)] = 0$, $[X(\gamma_i, z), X(-\gamma_j, w)] = \delta_{ij} \delta(z-w)$. 取相应的系数算子即可完成定理证明. $\square$

推论 3.1 对于分拆函数 $\lambda = (\lambda(\gamma)) \in \mathcal{P}(\Gamma^*)$, 向量

$$X_\lambda := \overrightarrow{\prod_{\gamma \in \Gamma^*}} X_{\lambda_1(\gamma)}(\gamma) X_{\lambda_2(\gamma)}(\gamma) \cdots X_{\lambda_{l(\lambda(\gamma))}(\gamma)}(\gamma) e^\gamma$$

组成表示环 R_Γ 的一组特殊线性正交基, 并对应于所有的不可约特征标. 圈群 Γ_n 的特征标表由下面公式给出: $\chi_\lambda(C_\rho) = \langle X_\lambda, a_\rho \rangle$.

这个结论可以用顶点算子方法来简单证明, 具体操作可参见文献 [6, 8, 9]. 上述公式的对称函数形式就是著名的 Specht 公式^[10]. 用圈积对称函数的方法也可以描述 Specht 公式 (参见文献 [11]).

需要说明的是, 上述结论中的正交向量是顶点算子关系 (即推论 3.1) 的直接推论, 这便说明向量 $\pm X_\lambda$ 对应于表示环中的不可约特征标组成的基底. 然后用顶点算子的技巧不难得到 $X_\lambda(1) > 0$, 所以, X_λ 便给出圈群的所有不可约特征标, 维数公式的计算可参见文献 [5].

4 结论

Frobenius 关于对称群的特征标公式是群论中的经典篇章, 后由 Specht 利用对称函数方法推广到了任意有限群和对称群的圈群上. 经典的推导方法是利用对称群的表示环和对称函数环的同构性质加上 Frobenius 对应得到文献 [3, 4]. 文献 [5] 利用顶点算子和 McKay 对应也提出了一套方法来证明 Frobenius 和 Specht 公式.

本文突出 Grothendieck 环的乘法公式重新给出了一种新的方法, 据此说明 Frobenius 公式的早期理论中已经出现了顶点算子的雏形, 从中得到了简洁的方法证明 Frobenius 和 Specht 公式, 我们同时也比较了与文献 [5] 中运用 McKay 对应和顶点算子方法的异同.

参考文献

- 1 Frobenius F G. Über die charakter der symmetrischen Gruppe. S'ber Akad Wiss Berlin, 1900, 516–534 [Ges Abh III, 148–166]
- 2 Weyl H. The Classical Groups, Their Invariants and Representations. Princeton: Princeton University Press, 1946
- 3 Littlewood D E. The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2006
- 4 Macdonald I G. Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1995
- 5 Frenkel I, Jing N, Wang W. Vertex representations via finite groups and the McKay correspondence. Int Math Res Not IMRN, 2000, 4: 195–222
- 6 Jing N. Symmetric polynomials and $U_q(\widehat{sl}_2)$. Represent Theory, 2000, 4: 46–63
- 7 Zelevinsky A. Representations of finite classical groups. In: A Hopf Algebra Approach. Lecture Notes in Mathematics, vol. 869. Berlin: Springer, 1981
- 8 Jing N. Vertex operators, symmetric functions, and the spin group Γ_n . J Algebra, 1991, 138: 340–398
- 9 Jing N. Boson-fermion correspondence for Hall-Littlewood polynomials. J Math Phys, 1995, 36: 7073–7080
- 10 Specht W. Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe. Schriften Math Semin Berlin, 1932, 1: 1–32
- 11 Ingram F, Jing N, Stitzinger E. Wreath product symmetric functions. Int J Algebra, 2009, 3: 1–19

From Frobenius character formula to vertex operators

Naihuan Jing

Abstract In this paper, simplified derivation of Frobenius' character formula for the symmetric group and Specht's character formula for the wreath products is given. It is shown that vertex operators had their presence in Frobenius formula via the multiplication of the Grothendieck ring. The same method is applied to the Grothendieck ring of the wreath products of symmetric groups and any finite group to give a simplified proof of the Specht formula.

Keywords Frobenius character formula, vertex operators, Grothendieck ring, Specht character formula

MSC(2010) 17B69, 20C15

doi: 10.1360/N012018-00110