n - 平移代数、平凡扩张与预投射代数

献给刘绍学教授 90 华诞

郭晋云^{1*}, 万前红²

1. 湖南师范大学数学与统计学院, 高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室, 长沙 410081;

2. 湖南商学院数学与统计学院, 长沙 410205

E-mail: gjy@hunnu.edu.cn, 77927023@qq.com

收稿日期: 2017-12-08; 接受日期: 2018-03-12; 网络出版日期: 2018-10-31; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671126)、湖南省重点学科建设和湖南省自然科学基金 (批准号: 2016JJ6049) 资助项目

摘要 Koszul 稳定 n - 平移代数的对偶 τ - 切片代数是一类拟 $(n-1)$ -Fano 代数. 本文给出一个分次代数成为稳定 n - 平移代数的对偶 τ - 切片代数的判别法, 并证明 Koszul 稳定 n - 平移代数的齐次对偶 τ - 切片代数的预投射代数等于其二次对偶的扭平凡扩张的二次对偶, 作为其推论, 本文得到对偶切片代数的导出范畴与其预投射代数的非交换射影概型的导出范畴等价.

关键词 n - 平移代数 拟 n -Fano 代数 预投射代数 对偶 τ 切片代数

MSC (2010) 主题分类 16G70, 16L60, 16S37

1 引言

20 世纪以来, Iyama 引入并与其合作者研究了代数表示论高维理论^[1-4]. 文献 [5-7] 引入拟 n -Fano 代数, 成为高维表示理论与非交换代数几何的重要联系. 最近, Guo^[8,9] 引入 n - 平移代数并发现 Koszul 稳定 n - 平移代数的对偶 τ - 切片代数恰好是拟 $(n-1)$ -Fano 代数, 还得到对偶 τ - 切片代数 n -APR 倾斜 (APR-tilting) 与 τ - 形变 (mutation) 的关系及其表示范畴和导出范畴的 $\mathbb{Z}|_n Q$ 分支.

本文进一步讨论 n - 平移代数的性质和判定方法, 利用 Loewy 矩阵给出一个分次代数 Λ 的扭平凡扩张成为 n - 平移代数的条件, 这个判定法可用于判定一个无循环分次代数是否是稳定 n - 平移代数的对偶 τ - 切片代数.

在经典代数表示论中, 对每一个遗传代数 Γ , 可以通过其表示构造相应的预投射代数 $\Pi(\Gamma)$ ^[10,11]. 它们的二次对偶分别是根平方为 0 的代数 Λ 和它的一个扭平凡扩张 $\Delta_\sigma(\Lambda)$ ^[12,13]. 本文讨论高维表示中相应的代数, 以及 Koszul 稳定 n - 平移代数的齐次对偶 τ - 切片代数 Γ . 我们证明一个对应的结论: 若 Λ 是 Γ 二次对偶, $\Pi(\Gamma)$ 是 Γ 的预投射代数, 则 $\Pi(\Gamma)$ 是 Λ 的某个扭平凡扩张 $\Delta_\sigma(\Lambda)$ 的二次对偶. 作为其应用, 我们得到了对偶 τ - 切片代数 Γ 的导出范畴与预投射代数的非交换射影概型导出范畴等价. 当预投射代数凝聚时, 我们可以得到 BGG (Beilinson-Gel'fand-Gel'fand) 对应的一个非交换推广.

英文引用格式: Guo J Y, Wan Q H. n -Translation algebras, trivial extensions and preprojective algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1681-1698, doi: 10.1360/N012017-00258

2 预备知识

假设 k 是一个域, 本文考虑满足下列条件的代数. 设 $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \cdots$ 为 k 上的一个分次代数, 且 Γ_0 为 k 的直和, 而 Γ 由 Γ_0 和 Γ_1 生成. 这样的代数可以由界定箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \rho)$ 给出^[8, 14]: 设 $\Gamma_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} k_i$, 其中 k_i 作为代数与 k 同构. 令 e_i 为 k 的单位元在 k_i 到 Γ_0 标准嵌入的像, 则 $\{e_i \mid i \in Q_0\}$ 是 Γ_0 中正交本原幂等元的完全集合, 且作为 Γ_0 - Γ_0 - 双模, 有 $\Gamma_1 = \bigoplus_{i, j \in Q_0} e_j \Gamma_1 e_i$. 对每一对 $i, j \in Q_0$, 取定 $e_j \Gamma_1 e_i$ 的一个基 Q_1^{ij} 作为从 i 到 j 的箭向集, 并取 $Q_1 = \bigcup_{(i, j) \in Q_0 \times Q_0} Q_1^{ij}$, 我们得到 Γ 的箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$. 这时存在一个 Q 中路的线性组合的集合 ρ , 使得 $\Gamma \simeq kQ/(\rho)$, 路代数 kQ 模去由 ρ 生成的理想 (ρ) 得到的商代数. 集合 ρ 称为这个代数的一个关系集.

本文如果没有特别说明, 代数总是指不可分解代数, 即箭图为连通的代数. 如果箭图中没有有向循环, 我们称之为无循环的. 对于界定箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \rho)$ 中从 i 到 j 的箭向 $\alpha \in Q_1$, 记 $s(\alpha) = i$, $t(\alpha) = j$. 对于从 i 到 j 的路 p , 亦记 $s(p) = i$, $t(p) = j$. 我们可以规范关系中的路, 使得每一个线性组合中路起点相同, 终点也相同. 在 $kQ/(\rho)$ 中的像非零的路称为界定路. 设 $Q = (Q_0, Q_1, \rho)$ 为带有二次关系的界定箭图, 即其关系集 $\rho \subset kQ_2$, 这里 kQ_2 表示由 kQ 中长度为 2 的路张成的子空间, 则商代数 $\Lambda = kQ/(\rho)$ 称为一个二次代数. 对于二次代数 $\Lambda = kQ/(\rho)$, 其二次对偶定义为商代数 $\Lambda^{\perp, \text{op}} = kQ^{\perp}/(\rho^{\perp})$, 其中 $Q^{\perp} = (Q_0, Q_1, \rho^{\perp})$, 箭图 $Q^{\perp}$ 的顶点和箭向视为 kQ 的顶点与箭向的对偶基, 其作用由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m(\beta_1 \cdots \beta_m) = \alpha_1(\beta_1) \cdots \alpha_m(\beta_m)$ 定义, $\rho^{\perp}$ 可取 kQ_2 的子集 ρ 在其对偶空间中的正交子空间的基 (参见文献 [15]).

文献 [8] 引入了 n - 平移代数概念, ρ 为齐次关系的界定箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \rho)$ 称为 n - 平移箭图, 如果存在 Q_0 的子集 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 及称为 n - 平移的双射 $\tau: Q_0 \setminus \mathcal{P} \rightarrow Q_0 \setminus \mathcal{I}$, 满足下列条件:

- (1) 任给极大界定路 p , 则 p 的长度为 $n+1$, 且存在 $Q_0 \setminus \mathcal{P}$ 中的点 i , 使得 $s(p) = \tau i$, $t(p) = i$;
- (2) 任意由 τi 到 i 长度为 $n+1$ 的界定路线性相关;
- (3) 对 $i \in Q_0 \setminus \mathcal{P}$, $j \in Q_0$, 如果有一条长度为 t 从 j 到 i 的界定路或者长度为 $n+1-t$ 从 τi 到 j 的界定路, 则商代数 $\Lambda = kQ/(\rho)$ 的乘法定义一个由 $e_i \Lambda_t e_j \times e_j \Lambda_{n+1-t} e_{\tau i}$ 到 $e_i \Lambda_{n+1} e_{\tau i}$ 的非退化双线性型, 这里 Λ_t 是长度为 t 的路的像张成的子空间.

τ 称为 Q 的 n - 平移. $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 的元素分别称为 Q 的投射点和入射点. 如果 $\mathcal{I} = \mathcal{P} = \emptyset$, 则称 Q 为稳定的. Q 为稳定的当且仅当由界定箭图 Q 给出的代数是自入射代数.

n - 平移箭图作为界定箭图给出的代数 $\Lambda = kQ/(\rho)$ 称为 n - 平移代数, 如果存在 $q \geq 1$ 或 $q = \infty$, 使得 Λ 是一个 $(n+1, q)$ 型的几乎 Koszul 代数 ($(n+1, q)$ -Koszul 代数^[8]).

设 $\overline{Q} = (\overline{Q}_0, \overline{Q}_1, \overline{\rho})$ 是一个稳定 n - 平移箭图, 其 n - 平移为 τ , 并设 $\overline{Q}$ 仅有有限多 τ - 轨道. 设 Q^S 是 $\overline{Q}$ 的一个满子箭图. Q^S 称为 $\overline{Q}$ 的一个完全 τ - 切片, 如果它具有以下性质:

- (1) 对于 $\overline{Q}$ 的每一个顶点 v , v 的 τ - 轨道与 Q^S 的顶点集的交为单点集;
- (2) Q^S 是路完全的, 即对于 $\overline{Q}$ 的每一条路 $p: v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \cdots \rightarrow v_t$, 如果 v_0 和 v_t 属于 Q^S , 则整条路 p 都属于 Q^S .

这样对于 $\overline{Q}$ 的每一对顶点 i 和 j , 如果 x 是 $\overline{\rho}$ 的一个元素, 则 $e_j x e_i$ 是 x 中从 i 到 j 的路的线性组合部分. 通过规范关系, 使得每一个关系中的路都有相同的起点和相同的终点, 则有

$$\rho^S = \left\{ x = \sum_p a_p p \in \overline{\rho} \mid s(p), t(p) \in Q_0^S \right\} \subset \overline{\rho}.$$

称界定箭图 $Q^S = (Q_0^S, Q_1^S, \rho^S)$ 为 $\overline{Q}$ 的完全 τ - 切片.

以某个无有向循环的稳定 n - 平移箭图 $\bar{Q}$ 的一个完全切片为界定箭图的代数称为 τ - 切片代数, 其二次对偶称为对偶 τ - 切片代数. 事实上, 对于任意稳定 n - 平移箭图 $\tilde{Q}$ 及其以它为界定箭图的自入射代数 $\tilde{\Lambda}$. 我们可以关联一个无有向循环的稳定 n - 平移箭图 $\bar{Q} = \mathbb{Z}_{\circ} \tilde{Q}$, 这时, 有 $\tilde{\Lambda}$ 的某个分次使得冲积 $\tilde{\Lambda} \# k\mathbb{Z}^*$ 以它作为界定箭图 [8, 9]. 由 $\bar{Q} = \mathbb{Z}_{\circ} \tilde{Q}$ 定义的 τ - 切片代数也称为 $\tilde{\Lambda}$ 的 τ - 切片代数或 $\tilde{Q}$ 的 τ - 切片代数.

设 Γ 为有限整体维数的有限维代数, 令 $\omega_{\Gamma} = D\Gamma[n]$, 且令 $\omega_{\Gamma}^{-1} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\Gamma}(\omega_{\Gamma}, \Gamma)$. 如果对 $l \gg 0$, $(\omega_{\Gamma}^{-1})^{\otimes l}$ 属于 $\mathrm{mod} \Gamma$ (这时, 称 ω_{Γ}^{-1} 为拟充裕的), 则 Γ 称为拟 n -Fano 代数 (n 维拟 Fano 代数) [5].

拟 n -Fano 代数的预投射代数定义为 $\Pi(\Gamma) = T_{\Gamma} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\Gamma}(D\Gamma[n], \Gamma)$ (参见文献 [6]), 这是文献 [3] 中的 $(n+1)$ - 预投射代数.

3 分次代数的 Loewy 矩阵与分次模的线性性

设 Λ 是由 n - 平移箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \rho)$ 给定的代数. 对顶点 $i \in Q_0$, 用 e_i 表示与之对应的本原幂等元. 记 $S(i)$ 为顶点 i 对应的单模, $P(i) = P(S(i))$ 为其投射覆盖, $I(i) = I(S(i))$ 为其内射包. 于是, $P(i) = \Lambda e_i$, $I(i) = D e_i \Lambda$.

模 M 的 Loewy 长度 $l(M)$ 是使得任意的 $1 \leq t \leq l$, 子商 $M^{(t)}/M^{(t+1)}$ 都是半单模的虑链 $0 = M^{(l+1)} \subset M^{(l)} \subset \cdots \subset M^{(1)} = M$ 的最小长度 l . 文献 [16] 对 Koszul 自入射代数引入了 Loewy 矩阵. 我们将这个概念拓广到分次代数, 用它给出一些代数成为 n - 平移代数的判别法.

设 Λ 是一个有限维分次代数 $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_{n+1}$, 其根为 $J = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_{n+1}$, $\Lambda_{n+1} \neq 0$, 且对 $t > n+1$, 都有 $\Lambda_t = 0$. 设 $|Q_0| = r$. 设箭图 Q 的邻接矩阵为 $A_1 = (a_{i,j}^{(1)})$, 其元素 $a_{i,j}^{(1)} = \dim_k e_j \Lambda_1 e_i$ 恰为从 i 到 j 的箭向条数. 对 $1 \leq t \leq n+1$, Λ 的分层矩阵 $A_t = (a_{i,j}^{(t)})$ 由 $a_{i,j}^{(t)} = \dim_k e_j J^t / J^{t+1} e_i = \dim_k e_j \Lambda_t e_i$ 定义. 注意到 A_t 的第 i 列恰为 $\Lambda_t e_i$ 的维数向量.

Λ 的 Loewy 矩阵定义为 $r(n+1) \times r(n+1)$ 矩阵

$$L = L_{\Lambda} = \begin{pmatrix} A_1 & -E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & -E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & -E & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -E \\ A_{n+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

其中 E 为 $r \times r$ 单位矩阵.

设 $M = \bigoplus_t M_t$ 为分次 Λ - 模, 其中 M_t 是 M 的 t 次部分. 模 M 称为由一个次数生成的, 如果存在 t_0 使得对于 $t < t_0$ 有 $M_t = 0$, 而 $M = \Lambda M_{t_0}$. 设 M 是没有投射直和项的有限维分次 Λ - 模, 且设它由 t_0 次生成, 则存在 $n+1 \geq l \geq 0$, 使得 $M = \bigoplus_{t=t_0}^{t_0+l} M_t$. 作为 Λ_0 - 模, 有 $M_{t_0+l} \simeq J^l M / J^{l+1} M$, 而且对 $t > t_0 + n+1$, 有 $M_t = 0$.

设 M 是一个没有投射直和项, 由 t_0 次生成的有限生成分次 Λ - 模, 则称 M 具有分层维数向量 [16],

且 M 的分层维数向量定义为

$$\mathbf{l.dim} M = \begin{pmatrix} \mathbf{dim} M_{t_0} \\ \mathbf{dim} M_{t_0+1} \\ \vdots \\ \mathbf{dim} M_{t_0+n} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{r(n+1)}, \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{dim} M_t$ 是 M_t 的维数向量 ($t_0 \leq t \leq t_0 + n$).

分次 Λ - 模 M 称为 l - 线性的, 如果存在投射 Λ - 模复形

$$P^\bullet(M) : \cdots \longrightarrow P^s \longrightarrow P^{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0,$$

使得每个 P^t 由 t 次生成, M 为其 0 次同调, 而其他非零同调次数 $> l$.

下面的定理利用 Loewy 矩阵和分层维数向量刻画了 Λ 的 l - 线性模^[16].

定理 3.1 设有限生成分次 Λ - 模 M 具有分层维数向量, 则 M 是 l - 线性的充分必要条件是: 对 $0 \leq t \leq l+1$, 有 $\mathbf{l.dim} \Omega^t M = L^t \mathbf{l.dim} M$.

证明 设 M 是有限生成 0- 线性模, 可设 M 是 0 次生成的. 设 $P(M)$ 是 M 的投射覆盖, 则有 0 次映射的正合列

$$0 \longrightarrow \Omega M \longrightarrow P(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

它对每一个 $0 \leq t \leq n$, 诱导出短正合列

$$0 \longrightarrow (\Omega M)_t \longrightarrow P(M)_t \longrightarrow M_t \longrightarrow 0.$$

由 Loewy 矩阵定义, 可得

$$\mathbf{dim} P(M)_t = A_t \mathbf{dim} P_0 = A_t \mathbf{dim} M_0,$$

于是,

$$\mathbf{dim} (\Omega M)_t = \mathbf{dim} P(M)_t - \mathbf{dim} M_t = A_t \mathbf{dim} M_0 - \mathbf{dim} M_t,$$

即 ΩM 具有分层维数向量且 $\mathbf{l.dim} \Omega M = L \mathbf{l.dim} M$.

重复上面的证明, 我们得到: 如果 M 是 l - 线性模, 则 $\Omega^t M$ 具有分层维数向量且对 $1 \leq t \leq l+1$, 有 $\mathbf{l.dim} \Omega^t M = L^t \mathbf{l.dim} M$.

否则, 如果 M 不是 l - 线性模, 可设 l 是使得 M 是 $(l-1)$ - 线性模的最小数. 于是有投射模复形

$$0 \rightarrow P^l \rightarrow P^{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P^0 \rightarrow 0,$$

且对给定的 t_0 及 $0 \leq t \leq l-1$, P^t 为 $t_0 + t$ 次生成, 其非零同调为 0 次的 M 和 l 次的 $\Omega^l M$.

由第一部分证明有 $\mathbf{l.dim} \Omega^{l-1} M = L^{l-1} \mathbf{dim} M$. 但 M 不是 l - 线性的, 从而 P^l 不是 $t_0 + l$ 次生成. 考虑正合列

$$0 \rightarrow \Omega^l M \rightarrow P^l \rightarrow \Omega^{l-1} M \rightarrow 0,$$

我们有半单模 $N = \sum_{t > t_0 + l} N_t$ 使得

$$P^l / JP^l \simeq \Omega^{l-1} M / J\Omega^{l-1} M = (\Omega^{l-1} M)_l + N.$$

于是, $P^l = P((\Omega^{l-1}M)_l) + P(N)$, 且 $P(N)$ 生成元次数 $> t_0 + l$, 设其由 $s_1 < \cdots < s_u$ 次的元素生成, 即 $N = N_{s_1} + \cdots + N_{s_u}$ 且 $s_u \leq t_0 + l + n + 1$.

显然, $P((\Omega^{l-1}M)_l)_{t_0+l+s} = A_s \dim(\Omega^{l-1}M)_l$. 比较在次数 s_1 上导出的正合列

$$0 \rightarrow (\Omega^l M)_{s_1} \rightarrow P_{s_1}^l = P((\Omega^{l-1}M)_l)_{s_1} + P(N)_{s_1} \rightarrow \Omega^{l-1}M_{s_1} \rightarrow 0$$

的维数向量, 由 $P(N)_{s_1} = N_{s_1} \neq 0$, 可得

$$\begin{aligned} \dim(\Omega^l M)_{s_1} &= \dim P(M_l)_{s_1} + \dim P(N)_{s_1} - \dim \Omega^{l-1}M_{s_1} \\ &= A_{s_1} \dim(\Omega^{l-1}M)_l - \dim(\Omega^{l-1}M)_{s_1} + \dim N_{s_1} \\ &\neq A_{s_1} \dim(\Omega^{l-1}M)_l - \dim(\Omega^{l-1}M)_{s_1}. \end{aligned}$$

这就证明了 $\mathbf{l} \dim \Omega^l M \neq L \mathbf{l} \dim \Omega^{l-1} M = L^l \mathbf{l} \dim M$. $\square$

4 Loewy 矩阵和 n - 平移代数

文献 [16] 用 Loewy 矩阵给出了 Koszul 自入射代数具有有限复杂度的判定条件. 本节讨论一个代数成为 n - 平移代数的判定条件. 首先给出一个代数由 n - 平移箭图定义的条件, 然后利用 Loewy 矩阵讨论什么时候 n - 平移箭图定义一个 n - 平移代数, 即这个代数成为几乎 Koszul 代数的判定条件.

设 Λ 是由 n - 平移箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \tau)$ 定义的一个代数. 首先讨论其不可分解投射内射模的性质.

引理 4.1 设 Λ 是由 n - 平移箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \tau)$ 定义的一个代数, $i \in Q_0$.

- (1) 如果 i 不是内射顶点, 则 $P(i) = \Lambda e_i$ 是投射内射模;
- (2) 如果 i 不是投射顶点, 则 $I(i) = D e_i \Lambda$ 是投射内射模.

证明 我们证明第一个断言, 第二个可以对偶地得到.

如果 i 不是 Q 的内射顶点, 则 $\tau^{-1}i$ 是 Q 的一个顶点, 且 Q 有一条长度为 $n+1$ 的从 i 到 $\tau^{-1}i$ 的界定路 p .

由于任意从 i 到 $\tau^{-1}i$ 长度为 $n+1$ 的路与 p 线性相关, 且对 Q 的每一个箭向 α , 有 $\alpha p = 0$, 所以, p 生成了 $P(i)$ 的基座, 它与 $S(\tau^{-1}i)$ 同构. 从而, 存在嵌入 $\phi: P(i) \rightarrow I(\tau^{-1}i)$.

由于以 $\tau^{-1}i$ 为终点的最长的界定路与 p 线性相关且都以 i 为起点, 由此可得 $\text{top } I(\tau^{-1}i) = S(i)$, 且 ϕ 是满同态. 这样, $P(i) \simeq I(\tau^{-1}i)$ 是投射内射模. $\square$

由于 n - 平移箭图界定路的长度不大于 $n+1$, 故其不可分解投射模和不可分解内射模的 Loewy 长度都小于等于 $n+2$, 由引理 4.1 的证明, 我们可以得到下面的命题.

命题 4.2 设 Λ 是由 n - 平移箭图给定的代数. 一个不可分解投射 (内射) Λ - 模 P 的 Loewy 长度等于 $n+2$ 的充要条件是它是内射 (投射) Λ - 模.

我们有下面的关于一个代数由 n - 平移箭图定义的判定定理.

定理 4.3 设 Λ 是一个 Loewy 长度为 $n+2$ 的分次代数, 则下列条件等价:

- (1) Λ 是由 n - 平移箭图给定的代数;
- (2) 每个 Loewy 长度为 $n+2$ 的投射模是内射模且每个 Loewy 长度为 $n+2$ 的内射模是投射模.

证明 设 Λ 由 n - 平移箭图给定. 由引理 4.1, 每一个 Loewy 长度为 $n+2$ 的不可分解投射模是内射模且每一个 Loewy 长度为 $n+2$ 的不可分解内射模是投射模.

设 Λ 由界定箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \rho)$ 给定, 每一个 Loewy 长度为 $n+2$ 的不可分解投射模是内射模且每一个 Loewy 长度为 $n+2$ 的不可分解内射模是投射模. 令

$$\mathcal{I} = \{i \in Q_0 \mid \text{ll}(P(i)) \neq n+2\}, \quad \mathcal{P} = \{i \in Q_0 \mid \text{ll}(I(i)) \neq n+2\}.$$

由于每一个投射模的 Loewy 长度小于等于 $n+2$, 界定路最大长度为 $n+1$. 对每个 $i \in Q_0 \setminus \mathcal{P}$, 如果 $I(i) = P(j)$ 为 Loewy 长度为 $n+2$ 的投射内射模, 定义 $\tau i = j$. 这就定义了一个从 $Q_0 \setminus \mathcal{P}$ 到 $Q_0 \setminus \mathcal{I}$ 的双射, 且存在一条长度为 $n+1$ 从 τi 到 i 的界定路.

由于 $P(\tau i)$ 是不可分解内射模, 其基座为同构于 $S(i)$ 的单模, 因而为 k 上一维空间, 这表明长度为 $n+1$ 从 τi 到 i 的界定路是线性相关的. 对于长度为 $t \leq n+1$ 从 τi 到 $j \in Q_0$ 的界定路 u , Λu 是 $P_\tau = \Lambda e_{\tau i}$ 的一个子模. 于是, $\Lambda u \cap \text{soc } \Lambda e_i \neq 0$, 从而存在 $u' \in \Lambda$ 使得 $u'u$ 是一维空间 $\text{soc } \Lambda e_{\tau i} = e_i \Lambda_{n+1} e_{\tau i}$ 中的非零元. 这样, 商代数 $\Lambda = kQ/(\rho)$ 的乘法定义一个从 $e_i \Lambda_t e_j \times e_j \Lambda_{n+1-t} e_{\tau i}$ 到 $e_i \Lambda_{n+1} e_{\tau i}$ 的非退化双线性型.

对偶地可以证明, 如果有一条长度为 $n+1-t$ 从 j 到 i 的界定路 u , $\Lambda = kQ/(\rho)$ 的乘法定义一个 $e_i \Lambda_t e_j \times e_j \Lambda_{n+1-t} e_{\tau i}$ 到 $e_i \Lambda_{n+1} e_{\tau i}$ 的非退化双线性型.

这样就证明了 Q 是一个 n - 平移箭图, Λ 是由 n - 平移箭图给定的代数. $\square$

注 4.4 定理 4.3 不要求代数维数有限.

要验证一个由 n - 平移箭图给出的代数是 n - 平移代数, 我们需要证明存在 q , 它是一个 $(n+1, q)$ -Koszul 代数. 记 $\epsilon_i = \mathbf{l.dim} S_i$ ($i \in Q_0$) 为分次单模 S_i 的分层维数向量. 作为定理 3.1 的应用, 我们有下面的 n - 平移箭图给出的代数成为 n - 平移代数的判别法.

定理 4.5 设 Λ 是一个由 n - 平移箭图给出的有限维代数, L 是它的 Loewy 矩阵. Λ 是一个 n - 平移代数的充分必要条件是存在 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 使得对每一个顶点 i , 对 $t < m$ 都有 $\mathbf{l.dim} \Omega^t S(i) = L^t \epsilon_i > 0$, 且当 $m < \infty$ 时, 有非负向量 v , 使得

$$\mathbf{l.dim} \Omega^m S(i) = L^m \epsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

显然, 当 $m = \infty$ 时, Λ 是 Koszul 代数; m 有限时, Λ 是 $(n+1, m)$ -Koszul.

证明 根据几乎 Koszul 代数的定义, 直接由定理 3.1 得到. $\square$

5 扭平凡扩张

代数 Λ 与其双模 M 的平凡扩张 $\Lambda \ltimes M$ 是在向量空间直和 $\Lambda + M$ 上, 通过对 $a, b \in \Lambda, x, y \in M$ 定义乘法 $(a, x)(b, y) = (ab, ay + xb)$ 得到的代数. 当 $M = D\Lambda$ 时, 称之为 Λ 的平凡扩张, 记为 $\Delta(\Lambda)$. 如果 $M = D_\sigma \Lambda$ 是通过 Λ 的自同构 σ 扭 $D\Lambda$ 的右乘而得到的双模, 则 $\Delta_\sigma(\Lambda) = \Lambda \ltimes D_\sigma \Lambda$ 称为 Λ 由自同构 σ 给出的扭平凡扩张. 设 Λ 是一个 Loewy 长度为 $n+1$ 的分次代数. 这时, 其扭平凡扩张为

$$\Delta_\sigma(\Lambda) = \tilde{\Lambda}_0 + \tilde{\Lambda}_1 + \cdots + \tilde{\Lambda}_{n+1},$$

其中 $\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0$, $\tilde{\Lambda}_{n+1} = D\Lambda_0$, $\tilde{\Lambda}_t = \Lambda_t + D\Lambda_{n+1-t}$ ($1 \leq t \leq n$).

我们利用 Loewy 矩阵给出 Loewy 长度为 $n+1$ 的分次代数的平凡扩张成为 n - 平移代数的条件.

引理 5.1 假设分次代数 Λ 的箭图中极大界定路长度皆为 n . 设

$$L = L_{\Lambda} = \begin{pmatrix} A_1 & -E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & -E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -E \\ A_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是 Λ 的 Loewy 矩阵, 则扭平凡扩张 $\Delta_{\sigma}(\Lambda)$ 的 Loewy 矩阵与自同构 σ 无关, 为

$$L_{\Delta(\Lambda)} = \begin{pmatrix} A_1 + A_n^T & -E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 + A_{n-1}^T & 0 & -E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_n + A_1^T & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -E \\ E & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这里 A_t^T 表示矩阵 A_t 的转置矩阵.

证明 设

$$L_{\Delta_{\sigma}(\Lambda)} = \begin{pmatrix} B_1 & -E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & -E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -E \\ B_{n+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是 $\Delta_{\sigma}(\Lambda)$ 的 Loewy 矩阵, 记 $B_t = (b_{i,j}^{(t)})$, 显然,

$$B_{n+1} = A_0^T = E.$$

对 $1 \leq t \leq n$, 有

$$\begin{aligned} b_{i,j}^{(t)} &= \dim_k e_j \tilde{\Lambda}_t e_i \\ &= \dim_k e_j \Lambda_t e_i + \dim_k e_j D\Lambda_{n+1-t} e_i \\ &= \dim_k e_j \Lambda_t e_i + \dim_k e_i \Lambda_{n+1-t} e_j \\ &= a_{i,j}^{(t)} + a_{j,i}^{(n+1-t)}. \end{aligned}$$

故当 $t \neq 0$ 时, $B_t = A_t + A_{n+1-t}^T$.

于是, $\Delta_\sigma(\Lambda)$ 的 Loewy 矩阵为

$$L_{\Delta_\sigma(\Lambda)} = L_{\Delta(\Lambda)} = \begin{pmatrix} A_1 + A_n^T & -E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 + A_{n-1}^T & 0 & -E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n+1} + A_1^T & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -E \\ E & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证毕. $\square$

称 $L_{\Delta(\Lambda)}$ 为 Λ 的扩张 Loewy 矩阵. 由定理 4.5, 我们立即有下面的定理.

定理 5.2 设 Λ 为极大界定路长度皆为 n 的分次代数, 设 $L_{\Delta(\Lambda)}$ 是其扩张 Loewy 矩阵, 则 $\Delta_\sigma(\Lambda)$ 是一个 $(n+1)$ - 平移代数当且仅当存在 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 使得对每一个单 $\Delta_\sigma(\Lambda)$ - 模 $\tilde{S}(i)$ 及 $t < m$, 满足

$$\mathbf{l.dim} \Omega^t \tilde{S}_i = L_{\Delta(\Lambda)}^t \epsilon_i > 0,$$

且当 $m < \infty$ 时, 有非负向量 $\mathbf{v}$, 使得

$$L_{\Delta(\Lambda)}^m \epsilon_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

推论 5.3 假设 Γ 为二次代数, 其二次对偶 $\Lambda = \Gamma^{\text{h.op}}$ 的极大界定路长度皆为 n , 设 $L_{\Delta(\Lambda)}$ 是 Λ 的扩张 Loewy 矩阵, 则 Γ 是一个对偶 τ 切片代数当且仅当存在 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 使得对每一个单 $\Delta(\Lambda)$ - 模 $\tilde{S}(i)$, 及 $t < m$, 满足

$$\mathbf{l.dim} \Omega^t \tilde{S}_i = L_{\Delta(\Lambda)}^t \epsilon_i > 0,$$

且当 $m < \infty$ 时, 有非负向量 $\mathbf{v}$, 使得

$$L_{\Delta(\Lambda)}^m \epsilon_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

我们也称 $L_{\Delta(\Lambda)}$ 为对偶 τ 切片代数 Γ 的扩张 Loewy 矩阵.

我们知道 Koszul 自入射代数的平凡扩张仍是 Koszul 自入射代数^[17]. 但 p 和 q 都有限时, 对于任意 p' 和 q' , (p, q) -Koszul 自入射代数的平凡扩张不一定是 (p', q') -Koszul 自入射代数. 我们下面的例子.

例 5.4 设 Λ 由界定箭图 (Q, ρ) 给出, 其中箭图 Q 为

$$Q: \quad 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xleftarrow{\gamma_1} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_2} \\ \xleftarrow{\gamma_2} \end{array} 3,$$

关系集 ρ 为 $\{\beta_2\beta_1, \gamma_1\gamma_2, \beta_1\gamma_1 - \gamma_2\beta_2\}$, Λ 是一个 Loewy 长度为 3 的 (2,2)-Koszul 的 1- 平移的分次自入射代数, 其 Loewy 矩阵为

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -E \\ 0 & 1 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

我们有

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

其平凡扩张 $\tilde{\Lambda}$ 是由稳定 2- 平移箭图给定的代数:

$$\tilde{Q}: \begin{array}{ccccc} & \overset{\alpha_1}{\curvearrowright} & & \overset{\alpha_2}{\curvearrowright} & & \overset{\alpha_3}{\curvearrowright} \\ & 1 & \xrightarrow{\beta_1} & 2 & \xrightarrow{\beta_2} & 3 \\ & \xleftarrow{\gamma_1} & & \xleftarrow{\gamma_2} & & \end{array},$$

关系集为

$$\tilde{\rho} = \{\alpha_i^2 \mid i = 1, 2, 3\} \cup \{\beta_2\beta_1, \gamma_1\gamma_2\} \cup \{\beta_i\alpha_i - \alpha_{i+1}\beta_i, \gamma_i\alpha_{i+1} - \alpha_i\gamma_i, \beta_1\gamma_1 - \gamma_2\beta_2 \mid i = 1, 2\}.$$

其 Loewy 矩阵为

$$L_{\tilde{\Lambda}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -E & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -E \\ 0 & 1 & 1 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$L_{\tilde{\Lambda}}^4 \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由定理 5.2, $\tilde{\Lambda}$ 不是一个 2- 平移代数, 所以, Λ 不是可扩张的 1- 平移代数.

由文献 [16], 对于 τ - 切片代数, 我们可以用其扩张 Loewy 矩阵进行分类.

定理 5.5 设 Λ 是不可分解 τ - 切片代数, $L_{\Delta(\Lambda)}$ 为其扩张 Loewy 矩阵, 则下列之一成立:

(1) 存在 $m < \infty$ 时, 使得对于每一个 Q 的顶点 i , 有

$$L_{\Delta(\Lambda)}^m \epsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix};$$

(2) $L_{\Delta(\Lambda)}$ 的谱半径等于 1, 这时 $\Delta(\Lambda)$ 复杂度为有限;

(3) $L_{\Delta(\Lambda)}$ 的谱半径大于 1, 这时 $\Delta(\Lambda)$ 复杂度为无限.

6 预投射代数与平凡扩张

从一个以 n - 平移箭图 $\tilde{Q}$ 为界定箭图的自入射代数 $\tilde{\Lambda}$ 出发, 我们可以定义以 $\mathbb{Z}_\circ \tilde{Q}$ 为平移箭图的自入射代数 $\tilde{\Lambda} \# k\mathbb{Z}^*$. 我们可以构造其 τ 切片代数 Λ , 即 $\tilde{\Lambda} \# k\mathbb{Z}^*$ 的一个 τ 切片代数. 如果 $\tilde{\Lambda}$ 是一个 Koszul 代数, 则其以 $\mathbb{Z}_\circ \tilde{Q}[0, n]$ 为箭图的特别 τ - 切片代数 Λ 的二次对偶 (即对偶 τ - 切片代数) $\Gamma = \Lambda^{\perp, \text{op}}$ 是一个拟 $(n-1)$ -Fano 代数 (参见文献 [9, 定理 5.4]).

定理 6.1 设 $\tilde{\Lambda}$ 是 Koszul 稳定 n - 平移代数, Λ 为其 τ - 切片代数, $\Gamma = \Lambda^{\perp, \text{op}}$ 为 Λ 的二次对偶, 即 Γ 是 $\tilde{\Lambda}$ 的一个对偶 τ - 切片代数, 则 Γ 是一个拟 $(n-1)$ -Fano 代数.

证明 设 $\tilde{Q}$ 是 $\tilde{\Lambda}$ 的界定箭图, Q 是 $\mathbb{Z}_\circ \tilde{Q}$ 的一个 τ - 切片, 其对偶 τ - 切片代数是 Γ . 由文献 [18, 引理 6.5], 存在一系列 τ - 形变, 使得它们对 Q 的作用得到一个特殊 τ - 切片 Q' . 于是, 由文献 [9, 定理 5.4], 其对应的对偶 τ - 切片代数 Γ' 是一个拟 $(n-1)$ -Fano 代数. 由文献 [9, 命题 4.4], Γ 可以通过一系列 $(n-1)$ -APR 倾斜从 Γ' 得到, 因而仍为拟 $(n-1)$ -Fano 代数 [19]. $\square$

这个定理的证明事实上用到了 Koszul 自入射代数与 AS (Artin-Schelter)- 正则代数的对偶性. 我们将证明这种对偶性, 也给出特定条件下 τ - 切片代数的平凡扩张构造和对偶 τ - 切片代数的预投射代数构造的对偶性.

设 $\tilde{\Lambda}$ 是由连通的界定箭图 $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \tilde{\rho})$ 给出的 Loewy 长度为 $n+2$ 的自入射代数, 且设它具有平凡的 Nakayama 平移. 由于 $\tilde{Q}$ 中有向循环的长度的最大公因数为 $n+1$, 因此, 其 Berinson 代数 $\nabla(\Delta(\Lambda))$ 的界定箭图为 $\mathbb{Z}_\circ \tilde{Q}[0, n]$, 这个箭图有 $n+1$ 个连通分支, 因而, $\nabla(\Delta(\Lambda))$ 是 $n+1$ 个代数的直和.

如果 $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n \rightarrow i_0$ 是 $\tilde{Q}$ 的一个给定的有向循环, 则箭图 $\mathbb{Z}_\circ \tilde{Q}[0, n]$ 有 $n+1$ 个连通分支 $Q^{[0]}, \dots, Q^{[n]}$, 它们分别包含顶点 $(i_0, 0), \dots, (i_n, 0)$. 对 $t \in \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, 设 $\Lambda^{(t)}$ 为界定箭图 $Q^{[t]}$ 给出的代数, 它们都是 $\mathbb{Z}_\circ \tilde{Q}$ 的一个连通分支的 τ - 切片代数, $e^{(t,s)} = \sum_{(j,s) \in Q_0^{[t]}} e_{(j,s)}$ 为其单位元. 这样的 τ - 切片代数称为齐次 τ - 切片代数. 其二次对偶称为齐次对偶 τ - 切片代数. 这时, $\nabla(\tilde{\Lambda}) = \Lambda^{(0)} \oplus \cdots \oplus \Lambda^{(n)}$ 是这 $n+1$ 个代数的直和, 于是, $\nabla(\tilde{\Lambda})^{\perp, \text{op}} = \Gamma^{(0)} \oplus \cdots \oplus \Gamma^{(n)}$, 其中 $\Gamma^{(t)} = \Lambda^{(t)\perp, \text{op}}$.

令 $Q_0^{(t)} = \{i \in Q_0 \mid (i, t) \in Q_0^{(t)}\}$, $t \in \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, 用 $\tilde{Q}_1^{(t)}$ 表示从 $Q_0^{(t)}$ 中顶点到 $Q_0^{(t+1)}$ 中顶点的箭向的集合, 则有

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 = \bigcup_{t=0}^n Q_0^{(t)} \quad \text{且} \quad \tilde{Q}_1 = \bigcup_{t=0}^n \tilde{Q}_1^{(t)}.$$

设 $e^{(t)} = \sum_{i \in Q_0^{(t)}} e_i$, 则 $\tilde{\Lambda}$ 的单位元 $1 = \sum_{t=0}^n e^{(t)}$.

由定义

$$\nabla(\tilde{\Lambda}) = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0 & \tilde{\Lambda}_1 & \cdots & \tilde{\Lambda}_{n-1} & \tilde{\Lambda}_n \\ 0 & \tilde{\Lambda}_0 & \cdots & \tilde{\Lambda}_{n-2} & \tilde{\Lambda}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\Lambda}_0 & \tilde{\Lambda}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & & \tilde{\Lambda}_0 \end{pmatrix}$$

和文献 [20, 引理 5] 可知, 作为 $\nabla(\tilde{\Lambda})$ -双模, 存在 $\nabla(\tilde{\Lambda})$ 的自同构 ς , 使得

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tilde{\Lambda}_n & \tilde{\Lambda}_{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\Lambda}_2 & \tilde{\Lambda}_3 & \cdots & \tilde{\Lambda}_{n+1} & 0 \\ \tilde{\Lambda}_1 & \tilde{\Lambda}_2 & \cdots & \tilde{\Lambda}_n & \tilde{\Lambda}_{n+1} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} D\tilde{\Lambda}_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D\tilde{\Lambda}_1 & D\tilde{\Lambda}_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D\tilde{\Lambda}_{n-1} & D\tilde{\Lambda}_{n-2} & \cdots & D\tilde{\Lambda}_0 & 0 \\ D\tilde{\Lambda}_n & D\tilde{\Lambda}_{n-1} & \cdots & D\tilde{\Lambda}_1 & D\tilde{\Lambda}_0 \end{pmatrix} \simeq D\nabla(\tilde{\Lambda})_{\varsigma}.$$

这样,

$$\Delta(\nabla(\tilde{\Lambda})_{\varsigma}) \simeq \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0 & \tilde{\Lambda}_1 & \cdots & \tilde{\Lambda}_{n-1} & \tilde{\Lambda}_n \\ 0 & \tilde{\Lambda}_0 & \cdots & \tilde{\Lambda}_{n-2} & \tilde{\Lambda}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\Lambda}_0 & \tilde{\Lambda}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & & \tilde{\Lambda}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tilde{\Lambda}_n & \tilde{\Lambda}_{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\Lambda}_2 & \tilde{\Lambda}_3 & \cdots & \tilde{\Lambda}_{n+1} & 0 \\ \tilde{\Lambda}_1 & \tilde{\Lambda}_2 & \cdots & \tilde{\Lambda}_n & \tilde{\Lambda}_{n+1} \end{pmatrix} = (\tilde{\Lambda})^{[n+1]}$$

是 $\tilde{\Lambda}$ 的 $n+1$ 拟 Veronese 代数 (参见文献 [6]). 事实上, 我们可以分解这个代数如下:

$$\tilde{\Lambda}^{[n+1]} = \begin{pmatrix} \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_0 e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_1 e^{(t')} & \cdots & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n-1} e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_n e^{(t')} \\ 0 & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_0 e^{(t')} & \cdots & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n-2} e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n-1} e^{(t')} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_0 e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_1 e^{(t')} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_0 e^{(t')} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t')} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_n e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t')} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_2 e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_3 e^{(t')} & \cdots & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t')} & 0 \\ \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_1 e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_2 e^{(t')} & \cdots & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_n e^{(t')} & \sum_{t,t'} e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t')} \end{pmatrix}.$$

由于对于 $t \neq t' + s$ 在 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 中成立时, $e^{(t)}\tilde{\Lambda}_s e^{(t')} = 0$, 于是,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^{[n+1]} = & \begin{pmatrix} \sum_t \tilde{\Lambda}_0 e^{(t)} & \sum_t e^{(t+1)} \tilde{\Lambda}_1 e^{(t)} & \cdots & \sum_t e^{(t+n-1)} \tilde{\Lambda}_{n-1} e^{(t)} & \sum_t e^{(t+n)} \tilde{\Lambda}_n e^{(t)} \\ 0 & \sum_t \tilde{\Lambda}_0 e^{(t)} & \cdots & \sum_t e^{(t+n-2)} \tilde{\Lambda}_{n-2} e^{(t)} & \sum_t e^{(t+n-1)} \tilde{\Lambda}_{n-1} e^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_t e^{(t)} \tilde{\Lambda}_0 e^{(t)} & \sum_t e^{(t+1)} \tilde{\Lambda}_1 e^{(t)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_t \tilde{\Lambda}_0 e^{(t)} \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} \sum_t e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sum_t e^{(t-1)} \tilde{\Lambda}_n e^{(t)} & \sum_t e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_t e^{(t-n+1)} \tilde{\Lambda}_2 e^{(t)} & \sum_t e^{(t-n+2)} \tilde{\Lambda}_3 e^{(t)} & \cdots & \sum_t e^{(t)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t)} & 0 \\ \sum_t e^{(t-n)} \tilde{\Lambda}_1 e^{(t)} & \sum_t e^{(t-n+1)} \tilde{\Lambda}_2 e^{(t)} & \cdots & \sum_t e^{(t-1)} \tilde{\Lambda}_n e^{(t)} & \sum_t e^{(t-n-1)} \tilde{\Lambda}_{n+1} e^{(t)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这样, 注意到 $e^{(r+t+s)}\tilde{\Lambda}_s e^{(r+t)} \simeq De^{(r+t)}\Lambda_{n+1-s}^{(r)} e^{(r+t+s)}$, 而 $e^{(r+t+s)}\tilde{\Lambda}_s e^{(r+t)} \simeq e^{(r,t+s)}\Lambda_s^{(r)} e^{(r,t)}$, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^{[n+1]} \simeq & \sum_{t=0}^n \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda_0^{(t)} e^{(t,n)} & e^{(t,n)} \Lambda_1^{(t)} e^{(t,n-1)} & \cdots & e^{(t,n)} \Lambda_{n-1}^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,n)} \Lambda_n^{(t)} e^{(t,0)} \\ 0 & \Lambda_0^{(t)} e^{(t,n-1)} & \cdots & e^{(t,n-1)} \Lambda_{n-2}^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,n-1)} \Lambda_{n-1}^{(t)} e^{(t,0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_0^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,1)} \Lambda_1^{(t)} e^{(t,0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Lambda_0^{(t)} e^{(t,0)} \end{pmatrix} \right. \\ + & \left. \begin{pmatrix} De^{(t,n)} \Lambda_0^{(t)} e^{(t,n)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ De^{(t,n)} \Lambda_1^{(t)} e^{(t,n-1)} & De^{(t,n-1)} \Lambda_0^{(t)} e^{(t,n-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ De^{(t,n)} \Lambda_{n-1}^{(t)} e^{(t,1)} & De^{(t,n-1)} \Lambda_{n-2}^{(t)} e^{(t,1)} & \cdots & De^{(t,1)} \Lambda_0^{(t)} e^{(t,1)} & 0 \\ De^{(t,n)} \Lambda_n^{(t)} e^{(t,0)} & De^{(t,n-1)} \Lambda_{n-1}^{(t)} e^{(t,0)} & \cdots & De^{(t,1)} \Lambda_1^{(t)} e^{(t,0)} & De^{(t,0)} \Lambda_0^{(t)} e^{(t,0)} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

由于 $\Lambda_l^{(t)} = \sum_{s=0}^{n-l} e^{(t,s+l)} \Lambda_l^{(t)} e^{(t,s)}$, 而 $\Lambda^{(t)} = \Lambda_0^{(t)} + \Lambda_1^{(t)} + \cdots + \Lambda_n^{(t)}$, 我们有

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^{(t)} e^{(t,n)} & e^{(t,n)} \Lambda_1^{(t)} e^{(t,n-1)} & \cdots & e^{(t,n)} \Lambda_{n-1}^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,n)} \Lambda_n^{(t)} e^{(t,0)} \\ 0 & \Lambda_0^{(t)} e^{(t,n-1)} & \cdots & e^{(t,n-1)} \Lambda_{n-2}^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,n-1)} \Lambda_{n-1}^{(t)} e^{(t,0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_0^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,1)} \Lambda_1^{(t)} e^{(t,0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Lambda_0^{(t)} e^{(t,0)} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} De^{(t,n)}\Lambda_0^{(t)}e^{(t,n)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ De^{(t,n)}\Lambda_1^{(t)}e^{(t,n-1)} & De^{(t,n-1)}\Lambda_0^{(t)}e^{(t,n-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ De^{(t,n)}\Lambda_{n-1}^{(t)}e^{(t,1)} & De^{(t,n-1)}\Lambda_{n-2}^{(t)}e^{(t,1)} & \cdots & De^{(t,1)}\Lambda_0^{(t)}e^{(t,1)} & 0 \\ De^{(t,n)}\Lambda_n^{(t)}e^{(t,0)} & De^{(t,n-1)}\Lambda_{n-1}^{(t)}e^{(t,0)} & \cdots & De^{(t,1)}\Lambda_1^{(t)}e^{(t,0)} & De^{(t,0)}\Lambda_0^{(t)}e^{(t,0)} \end{pmatrix} \\ \simeq \Delta_\varsigma(\Lambda^{(t)}),$$

由文献 [18, 定理 6.8] 知, $\Delta_\varsigma(\Lambda^{(t)})$ 互相同构. 于是, 对任意的 $s \in \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, 有

$$(\tilde{\Lambda})^{[n+1]} \simeq \sum_{t=0}^n \Delta_\varsigma(\Lambda^{(t)}) \simeq \Delta_\varsigma(\Lambda^{(s)})^{n+1}.$$

我们有下面关于稳定 n - 平移代数 $\tilde{\Lambda}$ 及其二次对偶 $\tilde{\Gamma}$ 的 $n+1$ 拟 Veronese 代数的对偶命题.

命题 6.2 设 $\tilde{\Lambda}$ 是一个稳定 n - 平移代数且其 n - 平移是平凡的, 并设 $\tilde{\Gamma}$ 是 $\tilde{\Lambda}$ 的二次对偶, 则它们的 $n+1$ 拟 Veronese 代数分别是 $n+1$ 个互相同构的代数的直和, 且存在 $\nabla(\tilde{\Lambda})$ 的自同构 ς 使得

$$(\tilde{\Lambda}^{!,\text{op}})^{[n+1]} \simeq ((\tilde{\Lambda})^{[n+1]})^{!,\text{op}} \simeq (\Delta_\varsigma(\nabla(\tilde{\Lambda})))^{!,\text{op}}.$$

证明 如果 $\tilde{\Gamma}$ 是 $\tilde{\Lambda}$ 的二次对偶, 设 $\Gamma^{(t)} = \Lambda^{(t),\text{op}}$ 是 $\Lambda^{(t)}$ 的二次对偶, 并设 $\tilde{\Gamma}^{(t)}$ 是 $\Delta(\Lambda^{(t)})$ 的二次对偶. 考虑 $\tilde{\Gamma}$ 的 $n+1$ 拟 Veronese 代数, 利用与 $(\tilde{\Lambda})^{[n+1]}$ 类似的分解, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{[n+1]} &\simeq \sum_t \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_0^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_1^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{n-1}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_n^{(t)}e^{(t+0)} \\ 0 & \tilde{\Gamma}_0^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{n-2}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{n-1}^{(t)}e^{(t+0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\Gamma}_0^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_1^{(t)}e^{(t+0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\Gamma}_0^{(t)}e^{(t+0)} \end{pmatrix} \right. \\ &+ \begin{pmatrix} e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{n+2}^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{2n}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{2n+1}^{(t)}e^{(t+0)} \\ e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_n^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{2n-1}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{2n}^{(t)}e^{(t+0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_2^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_3^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_{n+2}^{(t)}e^{(t+0)} \\ e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_1^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_2^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_n^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)}e^{(t+0)} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{2n+2}^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{2n+3}^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{3n+1}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{3n+2}^{(t)}e^{(t+0)} \\ e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{2n+1}^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{2n+2}^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{3n}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+n-1)}\tilde{\Gamma}_{3n+1}^{(t)}e^{(t+0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_{n+3}^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_{n+4}^{(t)}e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_{2n+2}^{(t)}e^{(t+1)} & e^{(t+1)}\tilde{\Gamma}_{2n+3}^{(t)}e^{(t+0)} \\ e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_{n+2}^{(t)}e^{(t+n)} & e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_{n+3}^{(t)}e^{(t+0)} & \cdots & e^{(t+n)}\tilde{\Gamma}_{2n+1}^{(t)}e^{(t+0)} & e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_{2n+2}^{(t)}e^{(t+0)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{c} + \cdots \end{array} \right\}$$

$$\simeq \sum_t \tilde{\Gamma}^{(t)} \simeq (\tilde{\Gamma}^{(t)})^{n+1} = (\tilde{\Lambda}^{(t)})^{n+1, \text{op}} \simeq ((\Delta(\Lambda))^{(n+1)})^{\text{!}, \text{op}} \simeq (\Delta_{\varsigma}(\nabla(\tilde{\Lambda})))^{\text{!}, \text{op}}.$$

这样, 我们证明了

$$(\tilde{\Lambda}^{\text{!}, \text{op}})^{[n+1]} \simeq ((\tilde{\Lambda})^{[n+1]})^{\text{!}, \text{op}} \simeq (\Delta_{\varsigma}(\nabla(\tilde{\Lambda})))^{\text{!}, \text{op}}.$$

特别地, 如果 $\tilde{\Gamma}$ 是切片代数 Λ 的平凡扩张 $\tilde{\Lambda} = \Delta(\Lambda)$ 的二次对偶, 则 $\tilde{\Gamma}$ 的 $n+1$ 拟 Veronese 代数是 $\Delta(\Lambda)$ 的 $n+1$ 拟 Veronese 代数的二次对偶, 即

$$(\Delta(\Lambda))^{\text{!}, \text{op}})^{[n+1]} \simeq ((\Delta(\Lambda))^{[n+1]})^{\text{!}, \text{op}}.$$

注意在 $\tilde{\Gamma}^{[n+1]}$ 的第 t 个分量中,

$$\tilde{\Gamma}_0^{(t)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_0^{(t)} e^{(t+n)} & e^{(t+n)} \tilde{\Gamma}_1^{(t)} e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n)} \tilde{\Gamma}_{n-1}^{(t)} e^{(t+1)} & e^{(t+n)} \tilde{\Gamma}_n^{(t)} e^{(t+0)} \\ 0 & \tilde{\Gamma}_0^{(t)} e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n-1)} \tilde{\Gamma}_{n-2}^{(t)} e^{(t+1)} & e^{(t+n-1)} \tilde{\Gamma}_{n-1}^{(t)} e^{(t+0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\Gamma}_0^{(t)} e^{(t+1)} & e^{(t+1)} \tilde{\Gamma}_1^{(t)} e^{(t+0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\Gamma}_0^{(t)} e^{(t+0)} \end{pmatrix},$$

而

$$\Gamma^{(t)} = \begin{pmatrix} \Gamma_0^{(t)} e^{(t,n)} & e^{(t,n)} \Gamma_1^{(t)} e^{(t,n-1)} & \cdots & e^{(t,n)} \Gamma_{n-1}^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,n)} \Gamma_n^{(t)} e^{(t,0)} \\ 0 & \Gamma_0^{(t)} e^{(t,n-1)} & \cdots & e^{(t,n-1)} \Gamma_{n-2}^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,n-1)} \Gamma_{n-1}^{(t)} e^{(t,0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma_0^{(t)} e^{(t,1)} & e^{(t,1)} \Gamma_1^{(t)} e^{(t,0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Gamma_0^{(t)} e^{(t,0)} \end{pmatrix},$$

我们有 $\Gamma^{(t)} \simeq \tilde{\Gamma}_0^{(t)}$. 而

$$M^{(t)} = \begin{pmatrix} e^{(t+n)} \tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)} e^{(t+n)} & e^{(t+n)} \tilde{\Gamma}_{n+2}^{(t)} e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n)} \tilde{\Gamma}_{2n}^{(t)} e^{(t+1)} & e^{(t+n)} \tilde{\Gamma}_{2n+1}^{(t)} e^{(t+0)} \\ e^{(t+n-1)} \tilde{\Gamma}_n^{(t)} e^{(t+n)} & e^{(t+n-1)} \tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)} e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+n-1)} \tilde{\Gamma}_{2n-1}^{(t)} e^{(t+1)} & e^{(t+n-1)} \tilde{\Gamma}_{2n}^{(t)} e^{(t+0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{(t+1)} \tilde{\Gamma}_2^{(t)} e^{(t+n)} & e^{(t+1)} \tilde{\Gamma}_3^{(t)} e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+1)} \tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)} e^{(t+1)} & e^{(t+1)} \tilde{\Gamma}_{n+2}^{(t)} e^{(t+0)} \\ e^{(t+0)} \tilde{\Gamma}_1^{(t)} e^{(t+n)} & e^{(t+0)} \tilde{\Gamma}_2^{(t)} e^{(t+n-1)} & \cdots & e^{(t+0)} \tilde{\Gamma}_n^{(t)} e^{(t+1)} & e^{(t+0)} \tilde{\Gamma}_{n+1}^{(t)} e^{(t+0)} \end{pmatrix}$$

构成一个由子空间

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 \\ e^{(t+0)}\tilde{\Gamma}_1^{(t)}e^{(t+n)} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

生成的 $\Gamma^{(t)}$ - 双模.

我们有 $\tilde{\Gamma}^{(t)} \simeq T_{\Gamma^{(t)}}(M^{(t)})$ 是一个 Γ - 连通的 $\mathbb{N}$ - 分次代数. $\square$

下面考虑扭 $n+1$ 拟 Veronese 代数结构. 设 κ 是 $\tilde{\Gamma}$ 的一个 $\mathbb{N}$ - 分次自同构, 并设 κ 在 $\tilde{\Gamma}_0$ 的限制诱导出顶点集的恒等映射, 则它限制成 Γ 及每一个 $\tilde{\Gamma}^{(t)}$ 的自同构. 我们有下面的命题:

命题 6.3 设 $\tilde{\Lambda}$ 是一个稳定 n - 平移代数且其 n - 平移是平凡的, 设 $\tilde{\Gamma}$ 是 $\tilde{\Lambda}$ 的二次对偶, Λ 是 $\tilde{\Lambda}$ 的一个连通 τ - 切片代数, 则存在 Λ 的自同构 ζ , 使得

$$\kappa\tilde{\Gamma}^{[n+1]} \simeq ((\Delta_{\zeta}(\Lambda))^{[n+1]})^{\text{!}, \text{op}}.$$

证明 记 σ 为 κ 在 Γ 的限制, $\kappa^{(t)}$ 是 $\kappa^{[n+1]}$ 在 $\tilde{\Gamma}^{(t)}$ 的限制, $\sigma^{(t)}$ 是 $\kappa^{(t)}$ 在 $\Gamma^{(t)}$ 的限制. 由文献 [6, 定理 2.11], 有

$$T_{\Gamma^{(t)}}(\sigma^{(t)} M^{(t)}) = \kappa^{(t)} T_{\Gamma^{(t)}}(M^{(t)}) = \bigoplus_t \kappa^{(t)} \tilde{\Gamma}^{(t)}.$$

$\tilde{\Gamma}^{(t)}$ 是二次代数, 由其 0 次部分 $S = \sum_{i=0}^n \tilde{\Gamma}_0 e^{(t,i)} = \sum_{i=0}^n \Gamma_0 e^{(i)} = \sum_{i=0}^n \Lambda_0 e^{(i)} = \sum_{i=0}^n \tilde{\Lambda}_0 e^{(t,i)}$ 和 1 次部分 $\sum_{i=0}^{n-1} e^{(t,i+1)} \tilde{\Gamma}_1 e^{(t,i)} + e^{(t,0)} \tilde{\Gamma}_1 e^{(t,n)}$ 生成. 作为 S - 双模, 令

$$\begin{aligned} V_1^{(t)} &= \sum_{i=0}^{n-1} e^{(t,i+1)} \tilde{\Gamma}_1 e^{(t,i)} \simeq \sum_{i=0}^{n-1} e^{(t,i+1)} \tilde{\Lambda}_1 e^{(t,i)}, \\ V_2^{(t)} &= e^{(t,0)} \tilde{\Gamma}_0 e^{(t,n)} \simeq e^{(t,0)} \tilde{\Lambda}_0 e^{(t,n)} \simeq D e^{(t,n)} \Lambda_{n+1} e^{(t,0)}, \end{aligned}$$

则 $\kappa^{(t)}$ 由其在 S 和在 $V^{(t)} = V_1^{(t)} + V_2^{(t)}$ 上的作用 $\kappa_0^{(t)}$ 和 $\kappa_1^{(t)}$ 唯一确定. 设 $\tilde{\Lambda}^{(t)}$ 的关系为二次关系 $\tilde{\rho}^{(t)}$, 它张成二次空间 $V^{(t)} \otimes_S V^{(t)}$ 的子空间 $R^{(t)}$. 它在空间 $V^{(t)} \otimes_S V^{(t)}$ 的正交子空间 $R^{(t)\perp}$ 的基可以视为 $\tilde{\Gamma}$ 的关系. 这时, $e^{(t,i+2)} \tilde{\Lambda}_2 e^{(t,i)} \simeq e^{(t,i+2)} V^{(t)} \otimes_S V^{(t)} / R^{(t)} e^{(t,i)}$, 而 $e^{(t,i+2)} \tilde{\Gamma}_2 e^{(t,i)} \simeq e^{(t,i+2)} V^{(t)} \otimes_S V^{(t)} / R^{(t)\perp} e^{(t,i)}$. 注意到 $\tilde{\rho}^{(t)}$ 和 $\tilde{\rho}^{(t)\perp}$ 的元素是二次的, 即具有 $\sum_h a_h \alpha_h \otimes \beta_h$ 的形式. 其像 $\sum_h a_h \alpha_h \circ_{\kappa} \beta_h$ 在 $\kappa \tilde{\Lambda}^{(t)}$ ($\kappa \tilde{\Gamma}^{(t)}$) 中为 0 当且仅当 $\sum_h a_h \kappa^{d(\beta_h)}(\alpha_h) \beta_h$ 在 $\tilde{\Lambda}^{(t)}$ ($\tilde{\Gamma}^{(t)}$) 中为 0, 这里 $d(\beta_h)$ 是 β_h 在 $\Lambda^{(t)}$ ($\Gamma^{(t)}$) 连通代数 $\tilde{\Lambda}^{(t)}$ ($\tilde{\Gamma}^{(t)}$) 中的次数 (即以 S 和 $V_1^{(t)}$ 中元素为 0 次元, 以 $V_2^{(t)}$ 中元素为 1 次元定义的另一个分次的次数). 这样, 我们有

$$\begin{aligned} \kappa \tilde{\rho}^{(t)} &= \left\{ \sum_{\beta_h \in Q_1 \setminus Q_1^{(t+n)}} a_h \alpha_h \beta_h + \sum_{\beta_{h'} \in Q_1^{(t+n)}} a_{h'} \sigma(\alpha_{h'}) \beta_{h'} \mid \sum_{\beta_h \in Q_1 \setminus Q_1^{(t+n)}} a_h \alpha_h \beta_h \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta_{h'} \in Q_1^{(t+n)}} a_{h'} \alpha_{h'} \beta_{h'} \in \tilde{\rho}^{(t)} \right\}, \\ \kappa \tilde{\rho}^{(t)\perp} &= \left\{ \sum_{\beta_h \in Q_1 \setminus Q_1^{(t+n)}} a_h \alpha_h \beta_h + \sum_{\beta_{h'} \in Q_1^{(t+n)}} a_{h'} \sigma(\alpha_{h'}) \beta_{h'} \mid \sum_{\beta_h \in Q_1 \setminus Q_1^{(t+n)}} a_h \alpha_h \beta_h \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta_{h'} \in Q_1^{(t+n)}} a_{h'} \alpha_{h'} \beta_{h'} \in (\tilde{\rho}^{(t)})^{\perp} \right\}. \end{aligned}$$

对于上面的新分次, 我们可定义冲积 $\tilde{\Lambda}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 、 $\kappa \tilde{\Lambda}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 、 $\tilde{\Gamma}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 和 $\kappa \tilde{\Gamma}^{(t)} \# \mathbb{Z}$. 且 κ 诱导出 $\tilde{\Lambda}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 与 $\kappa \tilde{\Lambda}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 的同构以及 $\tilde{\Gamma}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 与 $\kappa \tilde{\Gamma}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 的同构. 类似文献 [8, 第 5 节] 的讨论, 这时代数的关系与其冲积的关系互相确定, 当其中之一为 Koszul 代数时, 这些代数都是 Koszul 代数. $\tilde{\Lambda}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 与 $\tilde{\Gamma}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 互为二次对偶, 即 $\kappa \tilde{\Lambda}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 与 $\kappa \tilde{\Gamma}^{(t)} \# \mathbb{Z}$ 互为二次对偶, 于是, $\kappa \tilde{\Lambda}^{(t)}$ 与 $\kappa \tilde{\Gamma}^{(t)}$ 互为二次对偶.

注意到我们有 Λ 的自同构 ς 使得 $\tilde{\Lambda} \simeq \Delta_{\varsigma} \Lambda$, 于是,

$$\kappa \tilde{\Lambda} \simeq \kappa(\Delta_{\varsigma} \Lambda) \simeq \kappa(\Lambda \ltimes D\Lambda_{\varsigma}) = \Lambda \ltimes_{\kappa} (D\Lambda_{\varsigma}) = \Lambda \ltimes D\Lambda_{\sigma_{\varsigma}}.$$

取 $\zeta = \sigma_{\varsigma}$, 可得

$$\kappa \tilde{\Gamma}^{[n+1]} \simeq (\kappa \tilde{\Lambda}^{[n+1]})^{\perp, \text{op}} \simeq ((\Delta_{\zeta}(\Lambda))^{[n+1]})^{\perp, \text{op}}.$$

这就证明了命题. □

现在可以证明本文主要定理:

定理 6.4 设 Λ 是 Koszul 稳定 n - 平移代数的一个连通的齐次 τ - 切片代数, $\Gamma = \Lambda^{\perp, \text{op}}$ 为 Λ 的二次对偶, 则存在 Λ 的分次自同构 ζ , 使得

$$\Pi(\Lambda^{\perp, \text{op}}) = \Delta_{\zeta}(\Lambda)^{\perp, \text{op}}.$$

证明 因为 Λ 是 Koszul 代数, 所以, $\Delta(\Lambda)$ 是 Koszul 代数. 对于 Λ 的所有分次自同构 σ , 扭平凡扩张 $\Delta_{\sigma}(\Lambda)$ 也是 Koszul 代数. 于是, 其二次对偶 $\tilde{\Gamma} = (\Delta(\Lambda))^{\perp, \text{op}}$ 是 AS- 正则代数. 由定理 6.1 知, $\Gamma = \Lambda^{\perp, \text{op}}$ 是拟 $(n-1)$ -Fano 代数. 设 $\Lambda' = \nabla(\Delta(\Lambda))$ 为 $\Delta(\Lambda)$ 的 Berlinson 代数, 由文献 [18] 知, $\Delta(\Lambda') \simeq (\Delta(\Lambda))^{n+1}$ 同构于 $n+1$ 个 $\Delta(\Lambda)$ 的直和. 其二次对偶 $\Lambda'^{\perp, \text{op}} \simeq \nabla((\Delta(\Lambda))^{\perp, \text{op}})$ 是 AS- 正则代数 $(\Delta(\Lambda))^{\perp, \text{op}}$ 的 Berlinson 代数, 且 Λ 同构于它的一个直和项. 由文献 [6, 定理 4.12], 存在 $\tilde{\Gamma}$ 的自同构 κ , 使得

$$\kappa^{[n+1]}((\Delta(\Lambda))^{\perp, \text{op}})^{[n+1]} \simeq \Pi(\nabla(\tilde{\Gamma})) \simeq \Pi(\Lambda'^{\perp, \text{op}}) \simeq \Pi(\Lambda^{\perp, \text{op}})^{n+1} = \Pi(\Gamma)^{n+1}$$

是 $n+1$ 个 $\Pi(\Gamma)$ 的直和. 由命题 6.3, 有 Λ 的自同构 ζ , 使得 $\kappa^{[n+1]}((\Delta(\Lambda))^{\perp, \text{op}})^{[n+1]}$ 是 $n+1$ 个 $(\Delta_{\zeta}(\Lambda))^{\perp, \text{op}}$ 的直和. 于是, $\Pi(\Lambda^{\perp, \text{op}}) \simeq (\Delta_{\zeta}(\Lambda))^{\perp, \text{op}}$. □

例 6.5 Martínez-Villa [12] 证明了遗传代数的预投射代数的二次对偶是根三次方为 0 的自入射代数. 事实上, 如果 Γ 是一个以无循环箭图 Q 定义的遗传代数, 则其二次对偶 Λ 为以 Q 为箭图的根平方为 0 的代数. Λ 的扭平凡扩张是一个根三次方为 0 的自入射代数, 因而是一个 1- 平移代数, 即 Λ 是稳定 1- 平移代数的 τ - 切片代数. 根据文献 [20], Martínez-Villa 的定理指出, 这时有 Λ 的分次自同构 σ , 使得 $\Pi(\Gamma) \simeq \Delta_{\sigma}(\Lambda)$. 当 Γ 为无限表示型的根平方为 0 的遗传代数时, Γ 为拟 0-Fano 代数, 这是定理 6.4 在 $n=1$ 的情形.

Γ 是一个 Koszul 稳定 n - 平移代数的对偶 τ - 切片代数, 取 $(\Delta(\Gamma^{\perp, \text{op}}))^{\perp, \text{op}}$ 的 Berlinson 代数的直和项 Γ' , 则 Γ' 是一个齐次的对偶 τ - 切片代数. 称之为 Γ 的一个齐次代数. 我们得到下面的推论.

推论 6.6 设 Γ 是一个 Koszul 稳定 n - 平移代数的对偶 τ - 切片代数, 则存在它的一个齐次代数 Γ' 及 Γ 的自同构 σ , 使得 $\Pi(\Gamma') \simeq (\Delta_{\sigma}(\Gamma^{\perp, \text{op}}))^{\perp, \text{op}}$.

由文献 [18, 引理 6.5] 和 [9, 命题 4.6], Γ 可以由 Γ' 通过一系列 n -APR 得到. 于是, Γ 与 Γ' 具有相同的导出范畴. 对于分次代数 $\tilde{\Gamma}$, 用 $\text{Mod } \tilde{\Gamma}$ 表示 $\tilde{\Gamma}$ 模范畴, $\text{Grmod } \tilde{\Gamma}$ 表示 $\tilde{\Gamma}$ 分次模范畴. 用 $\text{mod } \tilde{\Gamma}$ 表示有限生成 $\tilde{\Gamma}$ 模范畴, $\text{grmod } \tilde{\Gamma}$ 表示有限生成 $\tilde{\Gamma}$ 分次模范畴. 用 $\text{tor } \tilde{\Gamma}$ 表示有限维 $\tilde{\Gamma}$ 模范畴, $\text{Tors}(\tilde{\Gamma})$ 表示 $\text{Grmod } \tilde{\Gamma}$ 中由 $\text{tor } \tilde{\Gamma}$ 的模的正向极限构成的满子范畴. 商范畴 $\text{Tails } \Pi(\Gamma') = \text{Grmod } (\Gamma') / \text{Tors}(\Gamma')$

称为 $\Pi(\Gamma')$ 的非交换投射概型. $\text{tails } \Pi(\Gamma')$ 表示 $\Pi(\Gamma')$ 的凝聚非交换投射概型, 它是凝聚层范畴的一个非交换版本. 应用文献 [6, 定理 4.12], 我们可以得到下面的推论:

推论 6.7 设 Γ 是一个 Koszul 稳定 n - 平移代数的对偶 τ - 切片代数, 则存在对偶 τ - 切片代数 Γ' , 使得 Γ' 是 Γ 的迭代 n - 丛倾斜代数. 我们有下面的导出范畴之间的三角等价:

$$\mathcal{D}(\text{Mod } \Gamma') \simeq \mathcal{D}(\text{Tails } \Pi(\Gamma')).$$

应用文献 [6, 定理 4.14]、[15, 定理 2.12.6] 和 [18, 推论 6.11], 我们可以直接得到下面的推论:

推论 6.8 设 Γ' 是一个 Koszul 稳定 n - 平移代数的齐次对偶 τ - 切片代数, 如果 $\Pi(\Gamma')$ 是 Noether 的, 则存在自入射代数 $\Lambda = \Gamma'^{\text{!}, \text{op}}$, 使得其有限生成分次模范畴的稳定范畴 $\underline{\text{grmod}} \Lambda$ 三角等价于预投射代数的凝聚非交换投射概型的导出范畴:

$$\underline{\text{grmod}} \Lambda \simeq \mathcal{D}^b(\Gamma) \simeq \mathcal{D}^b(\text{tails } \Pi(\Gamma')).$$

这可以看作是 BGG 对应^[21] 的一个非交换版本. 利用 Γ 的扩张 Loewy 矩阵和文献 [16, 定理 3.1], 我们可以得到 $\Pi(\Gamma')$ 是 Noether 代数的一个必要条件.

命题 6.9 如果存在 Γ 的一个齐次代数 Γ' 使得 $\Pi(\Gamma')$ 是 Noether 代数, 则 Γ 的扩张 Loewy 矩阵的谱半径等于 1.

参考文献

- 1 Iyama O. Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. *Adv Math*, 2007, 210: 22–50
- 2 Iyama O. Cluster tilting for higher Auslander algebras. *Adv Math*, 2011, 226: 1–61
- 3 Herschend M, Iyama O, Oppermann S. n -representation infinite algebras. *Adv Math*, 2014, 252: 292–342
- 4 Iyama O, Oppermann S. n -representation-finite algebras and n -APR tilting. *Trans Amer Math Soc*, 2011, 363: 6575–6614
- 5 Minamoto H. Ampleness of two-sided tilting complexes. *Int Math Res Not IMRN*, 2012, 1: 67–101
- 6 Minamoto H, Mori I. The structure of AS-Gorenstein algebras. *Adv Math*, 2011, 226: 4061–4095
- 7 Herschend M, Iyama O, Oppermann S, et al. Representation theory of Geigle-Lenzing complete intersections. *ArXiv*: 1409.0668, 2017
- 8 Guo J Y. On n -translation algebras. *J Algebra*, 2016, 453: 400–428
- 9 Guo J Y. τ -slice algebras of n -translation algebras and quasi n -Fano algebras. *ArXiv*:1707.01393, 2017
- 10 Gel'fand I M, Ponomarev V A. Model algebras and representations of graphs. *Funct Anal Appl*, 1979, 13: 157–166
- 11 Dlab V, Ringel C M. The preprojective algebra of a modulated graph. In: *Representation Theory, II. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 832. Berlin: Springer-Verlag, 1980, 216–231
- 12 Martínez-Villa R. Graded, selfinjective, and Koszul algebras. *J Algebra*, 1999, 215: 34–72
- 13 Guo J Y, Martínez-Villa R, Takane M. Koszul generalized Auslander regular algebras. In: *Algebras and Modules, II*. Ottawa: Canadian Math Soc, 1998, 263–283
- 14 刘绍学, 郭晋云, 朱彬, 等. 环与代数, 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2009
- 15 Beilinson A, Ginzburg V, Soergel W. Koszul duality patterns in representation theory. *J Amer Math Soc*, 1996, 9: 473–527
- 16 Guo J Y, Wu Q. Loewy matrix, Koszul cone and applications. *Comm Algebra*, 2000, 28: 925–940
- 17 Guo J Y, Yin Y, Zhu C. Returning arrows for self-injective algebras and Artin-Schelter regular algebras. *J Algebra*, 2014, 397: 365–378
- 18 Guo J Y. Coverings and truncations of graded self-injective algebras. *J Algebra*, 2012, 355: 9–34
- 19 Minamoto H. Tilting bundles on (Anti-)Fano algebra (talk at USTC). <http://rec.ustc.edu.cn/s/h2iw51>, 2006
- 20 Chen X. Graded self-injective algebras “are” trivial extensions. *J Algebra*, 2009, 322: 2601–2606

- 21 Bernshtein I N, Gel'fand I M, Gel'fand S I. Algebraic bundles over P^n and problems of linear algebra. *Funct Anal Appl*, 1978, 12: 212–214

n -Translation algebras, trivial extensions and preprojective algebras

Jinyun Guo & Qianhong Wan

Abstract Dual τ -slice algebra of a stable n -translation algebra is a class of quasi $(n - 1)$ -Fano algebras. In this paper, we give a criteria of when a graded algebra becomes a dual τ -slice algebra of a stable n -translation algebra, using Loewy matrices. We prove that the preprojective algebra of homogeneous dual τ -slice algebra is the quadratic dual of a twisted trivial extension of its quadratic dual, we also obtain the equivalences between the derived category of the module category of the dual τ -slice algebra and the derived category of the category of the noncommutative projective schemes of the preprojective algebra as a consequence.

Keywords n -translation algebra, quasi n -Fano algebra, preprojective algebra, dual τ -slice algebra

MSC(2010) 16G70, 16L60, 16S37

doi: 10.1360/N012017-00258