

带电粒子在中性线磁场中运动的解析轨道

徐 荣 栏

(中国科学院空间物理研究所)

摘 要

本文我们计算了带电粒子在中性线磁场中运动的解析轨道。其结果是:

(1) 带电粒子在中性片磁场中的运动是粒子在中性线磁场或在具有北向分量的中性片磁场中的第一级近似形式。

(2) 带电粒子在中性片磁场中的解析轨道的第三级近似形式与电子计算机计算的数值轨道基本相同。它们仅仅在小扰动区与非小扰动区的交界线上出现一些偏差。

(3) 带电粒子在整个中性片磁场的运动可以分成三种形式。粒子一方面在垂直于磁场的平面上作闭合的周期性轨道运动,同时闭合轨道的中心还沿着垂直于磁场平行于中性线方向漂移。另一方面粒子还沿磁力线方向做等速运动。

(4) 在小扰动区中粒子的闭合轨道是一个圆轨道,但在非小扰动区中却是一个“8”字形轨道,其漂移速度与小扰动区漂移方向相反,其大小也比小扰动区漂移大很多。

以上结果本文都给出一个完整的解析形式。

一、引 言

利用带电粒子在中性线磁场中的运动规律,可以解释某些空间物理现象^[1-4],例如极光与磁尾粒子的某些特征以及磁亚暴期间的三度空间电流体系等等。另外根据不同参数的粒子数值轨道,我们还发现一些有意义的现象,例如:粒子的多次反射,投掷角散射以及电场加速等问题。为了进一步了解上述问题的物理过程有必要研究带电粒子在中性线磁场中运动的解析形式,并根据这解析形式进一步利用统计方法去研究中性线磁场中的等离子体的宏观特征。

要求得解析轨道会遇到一些非线性振动方程,它是一个比较复杂的数学问题。我们利用了扰动方法^[5]计算了这些方程,求得带电粒子在中性线磁场中运动的第三级近似解。另外还经常用到文献^[6]中的公式与图,我们分别用 I 表示这些公式与图号。

二、带电粒子在中性线磁场中运动的基本方程

设磁场是一个中性线磁场^[6]加上一个小的北向分量磁场 $\mathbf{h}^{[6]}$, 电场是一个晨昏电场。在 xyz 直角坐标系中,其中 x 轴指向北, y 轴指向地球, z 轴指向晨昏方向。则电磁场

$$\mathbf{H} = \left(\frac{2\varepsilon y}{a^2} + h \right) \mathbf{e}_x + \frac{2x}{a^2} \mathbf{e}_y, \quad (2-1)$$

$$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_z. \quad (2-2)$$

磁场的磁力线是一个双曲线, 其渐近线为

$$x = \pm \sqrt{\varepsilon} y. \quad (2-3)$$

其中 a 是一个与沿 x 方向的磁场梯度有关的常数, ε 是一个与两渐近线的夹角 Φ 有关的参数. 当 $\varepsilon = 1$ 时, $\Phi = 90^\circ$. 在实际磁尾磁场中 Φ 很小, 因此 $\varepsilon \ll 1$. 当 $\Phi = 0, \varepsilon = 0$ 时, 磁场与 y 轴平行. 在 $x = 0$ 平面上磁场为零, 而且在此平面上下磁场的方向相反, 我们称它为中性片磁场.

在上述电磁场中正电粒子的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{2e}{cma^2} x v_z, \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{cma^2} (2\varepsilon y + a^2 h) v_z, \\ v_z = \frac{e}{cma^2} \cdot (x^2 - \varepsilon y^2 - \delta y) - \frac{e}{cma^2} (x_0^2 - \varepsilon y_0^2 - \delta y_0) \\ \quad + \frac{eE}{m} t + v_{z_0}. \end{cases} \quad (2-4)$$

其中常数 $\delta = a^2 h$. (2-5)

v, e 与 m 分别代表粒子的速度、电荷与质量, t 是时间, c 是光速, 带下角注 0 的量代表该量的初始值.

考虑到 ε 与 δ 的值比较小, 在实际磁尾场中, ε 与 δ 可以分别取为 0.04 与 0.1^[6,7], 因此它们的影响可以当作一个扰动量. 下面我们分别考虑 ε 与 δ 的影响.

首先考虑 ε 的影响. 设 $\delta = 0$, 利用小扰动方法^[5], 考虑到 ε 很小, x, y 与 z 可以用 ε 的幂次多项式来表示, 即

$$x = \sum_{n=0} x_{(n)} \varepsilon^n, \quad y = \sum_{n=0} y_{(n)} \varepsilon^n, \quad z = \sum_{n=0} z_{(n)} \varepsilon^n, \quad (2-6)$$

其中 $x_{(n)}, y_{(n)}$ 与 $z_{(n)}$ 分别代表 x, y 与 z 的第 $n+1$ 级近似值. 将 (2-6) 代进 (2-4), 我们可以得到三个 ε 的幂次多项式. 考虑到 ε 的大小是一个可以变化的任意小量, 因此要使这些多项式恒等于零, 必须使这些多项式的每一个系数为零. 经整理, 我们得到 $x_{(n)}, y_{(n)}$ 与 $z_{(n)}$ 所应满足的方程组. 其第一级近似满足

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{(0)}}{dt^2} = -\frac{2e}{cma^2} x_{(0)} v_{z(0)}, \\ \frac{d^2 y_{(0)}}{dt^2} = 0, \\ v_{z(0)} = \frac{e}{cma^2} (x_{(0)}^2 - x_0^2) + \frac{eE}{m} t + v_{z_0}. \end{cases} \quad (2-7)$$

第二级近似满足

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{(1)}}{dt^2} = -\frac{2e}{cma^2} (x_{(1)}v_{z(0)} + x_{(0)}v_{z(1)}), \\ \frac{d^2 y_{(1)}}{dt^2} = \frac{2e}{cma^2} y_{(0)}v_{z(0)}, \\ v_{z(1)} = \frac{e}{cma^2} (2x_{(0)}x_{(1)} - y_{(0)}^2 + y_0^2). \end{cases} \quad (2-8)$$

第三级近似满足

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{(2)}}{dt^2} = -\frac{2e}{cma^2} (x_{(2)}v_{z(0)} + x_{(1)}v_{z(1)} + x_{(0)}v_{z(2)}), \\ \frac{d^2 y_{(2)}}{dt^2} = \frac{2e}{cma^2} (y_{(1)}v_{z(0)} + y_{(0)}v_{z(1)}), \\ v_{z(2)} = \frac{e}{cma^2} (2x_{(0)}x_{(2)} + x_{(1)}^2 - 2y_{(0)}y_{(1)}), \end{cases} \quad (2-9)$$

其他更高级近似方程组可以类推。将 (2-7) 的解 $x_{(0)}$ 、 $y_{(0)}$ 与 $z_{(0)}$ 代进 (2-8)，则 (2-8) 的变量只剩 $x_{(1)}$ 、 $y_{(1)}$ 与 $z_{(1)}$ ，因而可以解 $x_{(1)}$ 、 $y_{(1)}$ 与 $z_{(1)}$ 。同理将 $x_{(0)}$ 、 $y_{(0)}$ 、 $z_{(0)}$ 、 $x_{(1)}$ 、 $y_{(1)}$ 与 $z_{(1)}$ 的值代进 (2-9)，就可以解出 $x_{(2)}$ 、 $y_{(2)}$ 与 $z_{(2)}$ 。另外 (2-7) 和 (2-8) 中粒子初速度的各个分量

$$\begin{cases} v_{x_0} = v_0 \sin \phi_0 \sin \gamma_0, \\ v_{y_0} = v_0 \cos \phi_0, \\ v_{z_0} = v_0 \sin \phi_0 \cos \gamma_0. \end{cases} \quad (2-10)$$

其中 ϕ 代表 $\mathbf{v}$ 与 y 轴的夹角。在中性片磁场中它代表粒子的投掷角。 γ 代表 $\mathbf{v}$ 在 xz 平面上的投影与 z 轴的夹角。它相当于平面轨道中的 α 角^[3]。

不难看出，运动方程的第一级近似方程组 (2-7) 与带电粒子在中性片磁场的运动方程组 (I-4-4) — (I-4-6) 完全相同。

根据卫星的观测结果，磁尾区始终存在一个不太大的北向分量磁场^[6]。下面考虑这种磁场对粒子运动的影响。设 $\varepsilon = 0$ ，利用小扰动方法^[5]， x 、 y 与 z 可以用 δ 的幂次多项式来表示，即

$$x = \sum_{n=0} x_{(n)} \delta^n, \quad y = \sum_{n=0} y_{(n)} \delta^n, \quad z = \sum_{n=0} z_{(n)} \delta^n. \quad (2-11)$$

与上面相类似，我们可以求得运动方程组所应满足的各级近似形式，即

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{(0)}}{dt^2} = -\frac{2e}{cma^2} x_{(0)}v_{z(0)}, \\ \frac{d^2 y_{(0)}}{dt^2} = 0, \\ v_{z(0)} = \frac{e}{cma^2} (x_{(0)}^2 - x_0^2) + \frac{eE}{m} t + v_{z_0}; \end{cases} \quad (2-12)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{(1)}}{dt^2} = -\frac{2e}{cma^2} (x_{(0)}v_{z(1)} + x_{(1)}v_{z(0)}), \\ \frac{d^2 y_{(1)}}{dt^2} = \frac{e}{cma^2} v_{z(0)}, \\ v_{z(1)} = \frac{e}{cma^2} (2x_{(0)}x_{(1)} - y_{(0)} - y_0); \end{cases} \quad (2-13)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{(2)}}{dt^2} = -\frac{2e}{cma^2} (x_{(1)}v_{z(2)} + x_{(1)}v_{z(1)} + x_{(2)}v_{z(0)}), \\ \frac{d^2 y_{(2)}}{dt^2} = \frac{e}{cma^2} v_{z(1)}, \\ v_{z(2)} = \frac{e}{cma^2} (x_{(1)}^2 + 2x_{(0)}x_{(2)} - y_{(1)}); \end{cases} \quad (2-14)$$

.....

运动方程组的第一级近似所满足的方程组(2-12)与带电粒子在中性片磁场的运动方程组(I-4-4)—(I-4-6)完全相同。这就是说,带电粒子在中性片磁场中的运动是粒子在中性线磁场或在具有北向分量场的中性片磁场的第一级近似形式。 ε 与 h 的存在只影响粒子运动的第二级和更高级近似形式。

将方程组(2-7)或(2-12)的第三方程代进第一方程,并设 $E=0$,我们就得到带电粒子沿 x 方向运动所满足的方程,即

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{4v^2 \sin \phi_0}{L_\phi^2} \left(\cos \gamma_0 - \frac{2x_0^2}{L_\phi^2} \right) x + \frac{8v^2 \sin^2 \phi_0}{L_\phi^4} x^3 = 0, \quad (2-15)$$

其中

$$L_\phi = \sqrt{\frac{2cma^2 v \sin \phi_0}{e}}. \quad (2-16)$$

为初始投掷角为 ϕ_0 的粒子的 L 单位长度。在(2-15)和以后的方程中我们略去表示一级近似值的变量角注(0)。

方程(2-15)是一个非线性振动方程,一般解是非常困难的。根据粒子的数值轨道特征^[4],我们分别计算方程(2-15)在非小扰动区与小扰动区的解,并根据它计算粒子在这两种区域内的解析轨道。

三、带电粒子在中性片磁场非小扰动区中的运动

根据数值计算法计算出来的粒子在中性片磁场中的运动轨道(图I-1),粒子沿 x 方向的运动是一个振动运动。在非小扰动区中粒子是在 $x=0$ 处上下来回振动,在小扰动区中粒子的振动中心向两边位移。为了计算粒子在非小扰动区中沿 x 方向的运动,我们将方程(2-15)中的几个变量做如下变换

$$\tau = (2\sqrt{2}v \sin \phi_0)t, \quad (3-1)$$

$$x = x_a X, \quad (3-2)$$

$$\mu = x_a^2, \quad (3-3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\cos \gamma_0 - 2x_0^2}{2}. \quad (3-4)$$

经过这种变换,并令 $L_\phi=1$, (2-15)就变成

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \omega_0^2 X + \mu X^3 = 0. \quad (3-5)$$

设其初始条件满足

$$X|_{\tau=0} = 1, \quad \left. \frac{dX}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (3-6)$$

它相当于 $x|_{t=0} = x_a$ 与 $r_0 = 0$ 的初始值。利用小扰动方法^[5](见附录 A), 可以求出粒子沿 x 方向的运动轨迹, 它满足

$$x = x_a(1 - \beta - \beta^2) \cos \Omega t + x_a \beta \cos 2\Omega t + x_a \beta^2 \cos 5\Omega t + \cdots, \quad (3-7)$$

其中

$$\beta = \frac{x_a^2}{32\omega^2}, \quad (3-8)$$

$$\omega^2 = \frac{2 - x_a^2 + \sqrt{4 - 4x_a^2 - x_a^4/2}}{8}, \quad (3-9)$$

$$\Omega = (2\sqrt{2} \nu \sin \phi_0) \omega, \quad (3-10)$$

Ω 代表粒子的频率。(3-9) 仅代表 ω 的第三级近似值。根据运动方程组(2-7)或(2-12)的第二方程, 粒子沿 y 方向是一个等速运动, 因此

$$y = (\nu \cos \phi_0)t + y_0.$$

当粒子的初始条件满足

$$y|_{t=0} = y_0 = 0$$

时, 根据(3-7)——(3-11), 则有

$$\begin{aligned} x = & x_a(1 - \beta - \beta^2) \cos \frac{2\pi}{\lambda_y} y + x_a \beta \cos \frac{6\pi}{\lambda_y} y \\ & + x_a \beta^2 \cos \frac{10\pi}{\lambda_y} y + \cdots, \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中

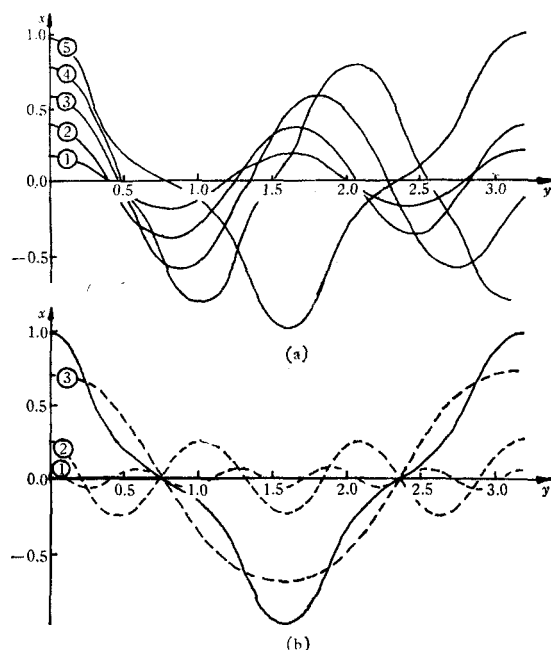
$$\lambda_y = 2\pi \cot \phi_0 [2 - x_a^2 + \sqrt{4 - 4x_a^2 - x_a^4/2}]^{1/2}. \quad (3-13)$$

方程(3-12)代表粒子在中性片磁场非小扰动区中的三度空间运动在 xy 平面上的投影轨道, λ_y 代表沿 y 方向的波长。

根据(3-12), (3-8), (3-9)与(3-13), 当 x_a 很小时, β 很小甚至于可以忽略不计。在这种情况下, 轨道在 $x-y$ 平面上的投影可以近似看成是一个理想的余弦曲线, 其波长也比较小。如图 1-a 曲线①和②。随着 x_a 的增大, 波长 λ 也增大, β 同时也增大, 出现高次谐波。粒子轨道逐渐偏离理想的余弦曲线。如图 1-a 中的曲线③, ④与⑤。曲线①, ②, ③, ④与⑤对应的 x_a 值分别为 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 与 0.966。图 1-b 中的实线代表 $a_s = 0.966$ 时的轨道, 虚曲线①, ②与③分别代表轨道的基波, 二次谐波与三次谐波。二、三次谐波与基波的振幅比分别为 0.297 与 0.065。这说明多项式(A-1)收敛得比较快。另外, 这些轨道与电子计算机的数值轨道基本相同。这就是说利用其第三级近似解足够描述粒子轨道的基本特征。但第三级近似解只能计算 $|x_a| \leq 0.966$ 的轨道, 超过这个范围在计算过程中要出现虚数, 要解决这个问题必须求 x 的更高级近似形式, 使 x_a 的极限逐渐接近于 1。

将(3-7)代进运动方程组(2-7)或(2-12)的第三方程, 则粒子沿 z 方向的速度

$$\begin{aligned} v_z = & V_z + \nu \sin \phi_0 x_a^2 [(1 - 3\beta^2) \cos 2\Omega t + 2\beta \cos 4\Omega t \\ & + 3\beta^2 \cos 6\Omega t + \cdots], \end{aligned} \quad (3-14)$$

图1 在非小扰动区内不同 x_a 值的粒子轨道在 xy 平面上的投影及其高次谐波

其中

$$V_x = v \sin \phi_0 [1 - x_a^2 (1 + 2\beta)]$$

代表粒子沿 z 方向的漂移速度。它随 x_a 的变化形式与文献 [1] 中提到的近似平均速度 (I-2-7) 相似。计算结果表明: 在非小扰动区中大部分粒子是沿 z 方向漂移, 漂移速度的大小接近于粒子速度在 xz 平面上的分量 $v \sin \phi_0$ 。只有 x_a 在非小扰动区边界附近的区域才出现一个反向运动, 其方向与小扰动区的漂移方向一致。

将 (3-14) 对时间 t 进行积分, 并考虑到 z 的初始值为零, 则

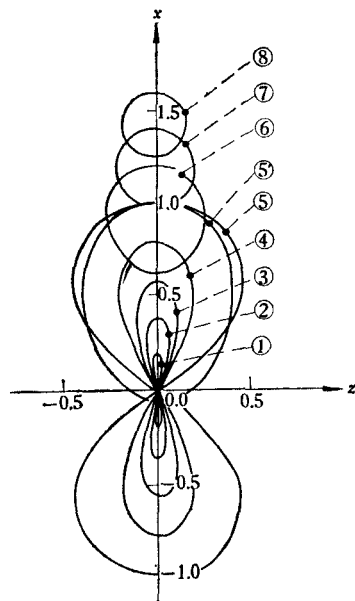
$$z = z' + V_x t, \quad (3-16)$$

$$z' = Z(1 - 3\beta^2) \sin 2\Omega t + Z\beta \sin 4\Omega t + Z\beta^2 \sin 6\Omega t + \dots, \quad (3-17)$$

其中

$$Z = \frac{x_a^2}{4\sqrt{2}\omega}. \quad (3-18)$$

方程 (3-7) 与 (3-17) 构成粒子在 xz 平面上一个周期性的闭合轨道。不同 x_a 值的粒子在 xz 平面上的周期性闭合轨道如图 2 所示。轨道 ①, ②, ③, ④ 与 ⑤ 对应于非小扰动区中 $x_a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 与 0.966 的周期性闭合轨道。轨道形式是一个“8”字形轨道。根据 (3-7) 与 (3-16), 这个闭合轨道的中心将以 V_x 的速度沿 z 方向运动, 构

图2 不同 x_a 值的粒子在 xz 平面上的周期性闭合轨道

成一个如图 I-1 的复杂轨道^[3]。

四、带电粒子在中性片磁场小扰动区中的运动

带电粒子在中性片磁场小扰动区中沿 x 方向的运动也是一个振动运动，但其振动中心不在中性线上而是向两边移动。解非线性振动方程 (2-15) 的方法与上一节相类似，不过由于其中心位置向两边移动，因此某些变量的变换可取以下的形式，即

$$x = x_{c_0} + \lambda X, \quad (4-1)$$

$$\lambda = x_a - x_b, \quad (4-2)$$

$$x_{c_0}^2 = -\omega_0^2, \quad (4-3)$$

$$\theta_0^2 = \omega_0^2 + 3x_c^2 = 2x_{c_0}^2. \quad (4-4)$$

其中 x_{c_0} 代表粒子振动中心的第一级近似值，时间变量的变换仍然用 (3-1)， x_a 与 x_b 分别代表运动区的上边界与下边界，其大小由 (I-2-5) 确定。以上变换关系与 (3-1) — (3-4) 没有什么本质上的区别。在非小扰动区中， x_b 与 x_{c_0} 为虚数，它们是不存在的，可设为零，因此以上变换关系就变成 (3-2)。经过这种变换，并令 $L_\phi = 1$ ，(2-15) 就变成

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \theta_0^2 X + 3x_{c_0} \lambda X^2 + \lambda^2 X^3 = 0, \quad (4-5)$$

其初始条件满足

$$X|_{\tau=0} = x_\rho = \frac{\rho}{\lambda} \quad \left. \frac{dX}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (4-6)$$

其中

$$\rho = x_a - x_{c_0} \quad (4-7)$$

代表粒子的迴旋半径的第一级近似值。这种初始条件与 $x|_{t=0} = x_a$ 与 $\gamma_0 = 0$ 相当。利用小扰动方法^[5]可以求出粒子沿 x 方向的运动所满足的方程（见附录 B），在计算过程中我们忽略了 ρ^3 以上的高次项。计算结果为

$$x = x_c + x_1 \cos \Omega' t + x_2 \cos 2\Omega' t + x_3 \cos 3\Omega' t + \dots, \quad (4-8)$$

其中

$$x_c = x_{c_0} - 3\alpha\rho^2 - 12\alpha^2\rho^3, \quad (4-9)$$

$$x_1 = \rho + 2\alpha\rho^2 + \left(\frac{29\alpha}{4} - \frac{1}{16x_{c_0}}\right)\alpha\rho^3, \quad (4-10)$$

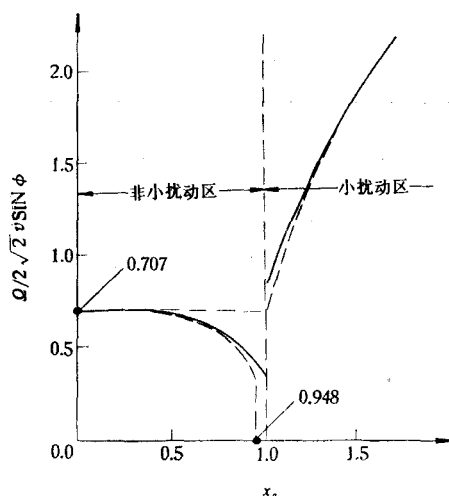
$$x_2 = \alpha\rho^2 + 4\alpha^2\rho^3, \quad (4-11)$$

$$x_3 = \frac{\alpha}{16x_{c_0}}\rho^3 + \frac{3\alpha^2}{4}\rho^3, \quad (4-12)$$

$$\theta^2 = 2x_{c_0}^2 - 3\rho^2 \quad (4-13)$$

$$\alpha = \frac{x_{c_0}}{2\theta^2} = \frac{1}{4x_{c_0}} \left(1 + \frac{3\rho^2}{2x_{c_0}^2}\right) \quad (4-14)$$

$\Omega' = 2\sqrt{2}\theta\nu \sin \phi_0$ 代表粒子的迴旋频率。在非小扰动区内粒子频率是由 (3-10) 决定的，根据 (3-9) 与 (3-13)，粒子频率 Ω 与 $2\sqrt{2}\nu \sin \phi_0$ 之比随 x_a 的变化如图 3 虚线所示。

图3 频率随 x_a 的变化

图中实线是电子计算机的计算结果。由图可知,在两个运动区交界的地方 ($x_a = 1$), 粒子在小扰动区的频率是非小扰动区的两倍。这与粒子轨道相符。

与在非小扰动区的情况一样,粒子沿 y 方向的运动满足(3-11)。根据(3-11)与(4-8), 粒子在小扰动区的运动在 xy 平面上的投影轨道满足

$$x = x_c + x_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda'_y} y + x_2 \cos \frac{4\pi}{\lambda'_y} y + x_3 \cos \frac{6\pi}{\lambda'_y} y + \cdots \quad (4-15)$$

其中

$$\lambda' = \frac{\pi}{\sqrt{2\theta}} \cot \phi_0 \quad (4-16)$$

代表沿 y 方向的波长。

图4给出 $x_a = 1.00, 1.20, 1.40$ 与 1.60 时,带电粒子轨道在 xy 平面上的投影。它是由一个基波和二、三次谐波组成的。当 x_a 较大时(如 $|x_a| \geq 1.60$),粒子轨道可以看成是一个理想余弦曲线,谐波相对于基波可以忽略不计。当 x_a 逐渐减少时,二、三次谐波开始分别逐渐出现,使轨道逐渐偏离理想的余弦曲线,如图 $x_a = 1.40, 1.20$ 与 1.00 。轨道相对于振动中心显出不对称性,即上面小下面大。图中实线代表轨道曲线,虚线代表对应轨道的基波,二次谐波与三次谐波。在 $x_a = 1.0$ 时,二、三次谐波与基波的振幅比分别为 0.196 与 0.018 。这说明多项式(B-1)收敛得比较快,这些轨道与电子计算机计算的数值轨道基本相同,这说明利用其第三级近似解足够描述粒子轨道的基本特征。

将(4-8)代进运动方程组(2-7)或(2-12)的第二方程,并利用(4-14),则粒子沿 z 方向的速度

$$v_z = V_z + V_1 \cos \theta \tau + V_2 \cos 2\theta \tau + V_3 \cos 3\theta \tau + \cdots \quad (4-17)$$

其中

$$V_z = u \left(1 + \frac{\rho}{x_c} + \cdots \right), \quad (4-18)$$

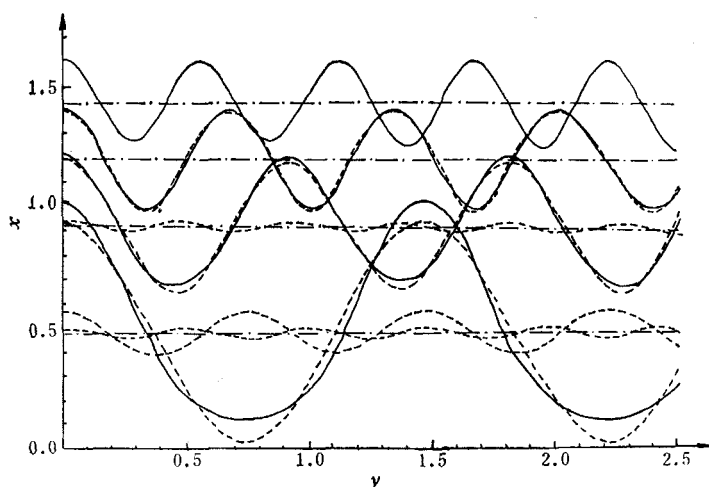


图4 在小扰动区内不同的 x_a 值的粒子轨道在 xy 平面上的投影及其高次谐波

$$V_1 = 4x_{c0}v \sin \phi_0 \left(\rho + \frac{\rho^2}{2x_{c0}} - \frac{3\rho^3}{16x_{c0}^2} + \dots \right), \quad (4-19)$$

$$V_2 = 4v \sin \phi_0 \left(\rho^2 + \frac{\rho^3}{x_{c0}} \right), \quad (4-20)$$

$$V_3 = \frac{3v \sin \phi_0}{4} \frac{\rho^3}{x_{c0}}. \quad (4-21)$$

根据迴旋半径公式 $\rho = \frac{cmv \sin \phi_0}{H}$, 磁矩公式 $\mu = \frac{1}{2} \frac{mv^2 \sin^2 \phi_0}{H}$, 磁场公式 $H = \frac{2x_c}{a^2}$ 以及(2-15)与(I-3-5), 不难证明 $u = -2v\rho^2 \sin \phi_0$ 为磁场梯度引起的迴旋中心的漂移速度。

将(4-17)对时间 t 进行积分, 并考虑到 z 的初始值为零与关系式(4-13), 我们有

$$\begin{aligned} z &= z' + V_z t \\ z' &= Z_1 \sin Q't + Z_2 \sin 2Q't + Z_3 \sin 3Q't + \dots, \end{aligned} \quad (4-23)$$

其中

$$\begin{aligned} Z_1 &= \rho \left(1 + \frac{\rho}{3x_{c0}} + \frac{9\rho^2}{16x_{c0}^2} + \dots \right), \\ Z_2 &= \frac{\rho}{2x_{c0}} \left(1 + \frac{\rho}{x_{c0}} + \dots \right), \\ Z_3 &= \frac{\rho^3}{16x_{c0}^2} + \dots. \end{aligned}$$

方程(4-8)与(4-23)构成粒子 x, z 在平面上一个周期性的闭合轨道, 轨道中心将以(4-18)所决定的速度 V_z 漂移。不同 x_a 的闭合轨道如图2中曲线⑤, ⑥, ⑦与⑧。它们对应于小扰动区中 $x_a = 1.00, 1.20, 1.40$ 与 1.60 的周期性闭合轨道。其轨道图形近似于圆轨道。当 x_a 很大时(如图曲线⑧), 根据(4-8)与(4-23) ρ 的高次项可以忽略并只保留 ρ 项,

闭合轨道可以用半径为 ρ 的圆轨道来描述, 即

$$(x - x_{c_0})^2 + z'^2 = \rho^2, \quad (4-27)$$

其迴旋中心在 $x = x_{c_0}$ 处. 根据 (4-18), 迴旋中心的漂移速度就等于磁场梯度引起的漂移速度. 当 x_a 逐渐减少时, 其谐波成分相对于基波不能忽略, 闭合轨道将偏离理想的圆轨道, 其漂移速度也将偏离磁场梯度的漂移速度. 图中的曲线⑤与⑥出现一些偏差, 其原因在于我们仅仅计算其第三级近似的过程中出现的偏差. 随着提高 x 与 z' 的近似程度, 其偏差将逐渐消失.

附 录 A

在非线性振动方程 (3-5) 中, 由于 μ 在非小扰动区中小于 1, 甚至比 1 小很多, 因此方程 (3-5) 中的第三项的影响可以看成是一个线性振动方程的扰动, 可以用小扰动方法^[5]将 X 与 ω_0^2 用 μ 的幂次多项式来表示, 即

$$X = X_0 + \mu X_1 + \mu^2 X_2 + \cdots \mu^n X_n + \cdots, \quad (A-1)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \mu h_1 - \mu^2 h_2 - \cdots - \mu^n h_n - \cdots, \quad (A-2)$$

X_n 为 X 的第 $n+1$ 级近似值. 将 (A-1) 与 (A-2) 代进 (3-5), 就得到一个 μ 的幂次多项式. 考虑到 μ 是可以任意变化的小量, 因此要使这个多项式恒等于 0, 必须使每一个系数为 0. 经过整理, 有

$$\frac{d^2 X_0}{d\tau^2} + \omega^2 X_0 = 0, \quad (A-3)$$

$$\frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \omega^2 X_1 = h_1 X_0 - X_0^3, \quad (A-4)$$

$$\frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + \omega^2 X_2 = h_1 X_1 + h_2 X_0 - 3X_1 X_0^2, \quad (A-5)$$

.....

另外初始条件 (3-6) 可以写成

$$X_0|_{\tau=0} = 1, \quad \left. \frac{dX_0}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (A-6)$$

$$X_m|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{dX_m}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (A-7)$$

$m = 1, 2, \cdots$. 方程 (A-3) — (A-7) 代表 $X_0, X_1, X_2, \cdots$ 所满足的方程及其初始条件.

根据 (A-3) 与 (A-6), X 的一级近似值 X_0 为

$$X_0 = \cos \omega \tau. \quad (A-8)$$

将 (A-8) 代进 (A-4), 并用一般三角函数关系进行整理, 我们可以求得 X_1 应满足

$$\frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \omega^2 X_1 = -\frac{1}{4} \cos 3\omega \tau. \quad (A-9)$$

其中令

$$h_1 = 3/4. \quad (A-10)$$

非齐次振动方程 (A-9) 的通解应等于其特解与齐次方程

$$\frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \omega^2 X_1 = 0$$

的通解的和。利用初始条件 (A-7), 可以计算 (A-9) 的通解为

$$X_1 = \frac{1}{32\omega^2} (\cos 3\omega\tau - \cos \omega\tau). \quad (\text{A-11})$$

将 (A-8), (A-10) 与 (A-11) 代进 (A-5), 并用三角函数关系进行整理, 我们可求得 X_2 应满足

$$\frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + \omega^2 X_2 = -\frac{3}{128\omega^2} \cos 5\omega\tau, \quad (\text{A-12})$$

其中令

$$h_2 = -\frac{3}{128\omega^2}.$$

利用上述同样的方法与初始条件 (A-7) 可以计算 (A-13) 的通解为

$$X_2 = \left(\frac{1}{32\omega^2}\right)^2 (\cos 5\omega\tau - \cos \omega\tau).$$

X_m 的更高级近似值可以用上述类似方法进一步进行计算。其计算过程非常复杂。将 (A-8), (A-11), (A-14), (A-10) 与 (A-13) 代进 (A-1) 与 (A-2), 并利用 (3-3) 与 (3-8), 就有

$$X = (1 - \beta - \beta^2) \cos \omega\tau + \beta \cos 3\omega\tau + \beta^2 \cos 5\omega\tau + \cdots, \quad (\text{A-15})$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mu - \frac{3}{128\omega^2} \mu^2 + \cdots. \quad (\text{A-16})$$

再利用 (3-2), 我们就得 (3-7)。方程 (A-16) 是 ω^2 的级数展开式, 方程左右侧都含 ω^2 , 当我们不再考虑其更高级近似值时, 利用二次代数方程求解公式便可以得到 (3-9)。

附 录 B

在非线性振动方程 (4-5) 中, 由于 λ 在小扰动区中小于 1, 甚至比 1 小很多。因此方程 (4-5) 中的第三, 四项的影响可以看成是一个线性振动的小扰动, 可以用小扰动方法将 X 与 θ_0^2 用 λ 的幂次多项式来表示, 即

$$X = X_0 + \lambda X_1 + \lambda^2 X_2 + \cdots + \lambda^n X_n + \cdots, \quad (\text{B-1})$$

$$\theta_0^2 = \theta^2 - \lambda g_1 - \lambda^2 g_2 - \cdots. \quad (\text{B-2})$$

利用与附录 A 相类似的方法可以得 X_n 及其相对应的初始条件分别为

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_0}{d\tau^2} + \theta^2 X_0 = 0, \end{cases} \quad (\text{B-3})$$

$$\begin{cases} X_0|_{\tau=0} = x_p, \quad \frac{dX_0}{d\tau}|_{\tau=0} = 0; \end{cases} \quad (\text{B-4})$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \theta^2 X_1 = g_1 X_0 - 3X_0^2 x_c, \end{cases} \quad (\text{B-5})$$

$$\begin{cases} X_1|_{\tau=0} = \frac{dX_1}{d\tau}|_{\tau=0} = 0; \end{cases} \quad (\text{B-6})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + \theta^2 X_2 &= g_1 X_1 + g_2 X_0 - X_0^3 - 6X_0 X_1 x_c, \\ X_2|_{\tau=0} = \frac{dX_2}{d\tau}|_{\tau=0} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{B-7})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + \theta^2 X_2 &= g_1 X_1 + g_2 X_0 - X_0^3 - 6X_0 X_1 x_c, \\ X_2|_{\tau=0} = \frac{dX_2}{d\tau}|_{\tau=0} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{B-8})$$

利用附录 A 相类似的方法可以根据 (B-3)—(B-8) 计算出

$$X_0 = x_\rho \cos \theta \tau, \quad (\text{B-9})$$

$$X_1 = -3ax_\rho^2 - 2ax_\rho^2 \cos \theta \tau + ax_\rho^2 \cos 2\theta \tau, \quad (\text{B-10})$$

$$\begin{aligned} X_2 = & -12a^2 x_\rho^3 + \left(\frac{29}{4} a^2 x_\rho^3 - \frac{x_\rho^3}{32\theta^2} \right) \cos \theta \tau + 4a^2 x_\rho^3 \cos 2\theta \tau \\ & + x_\rho^2 \left(\frac{1}{32\theta^2} + \frac{3a^2}{4} \right) \cos 3\theta \tau, \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

$$g_1 = 0, \quad (\text{B-12})$$

$$g_2 = \frac{3x_\rho^2}{4} - 15ax_\rho x_c^2. \quad (\text{B-13})$$

将 (B-9)—(B-13) 代进 (B-1) 与 (B-2), 就得 (4-8) 与

$$\theta^2 = 2x_c^2 + \frac{3\rho^2}{4} - \frac{15x_c^2 \rho^2}{2\theta^2} + \dots \quad (\text{B-14})$$

方程 (B-14) 左右式都含 θ^2 , 当我们不再考虑其更高级近似值时, 利用二次代数方程求解公式, 并保留 ρ^3 项以下, 即得 (4-14)。

参 考 文 献

- [1] 徐荣兰、宛振福、马福胜, 带电粒子在中性线磁场中的运动. 地球物理学报, **23**, 233, 1980.
- [2] Sonnerup, B. U., Adiabatic particle orbits in a magnetic null sheet. *J. Geophys. Res.*, **76**, 8211, 1971.
- [3] Xu Rong-lan, The motion of charged particles in a neutral magnetic field of magnetotail and the acceleration mechanism of auroral particles, *Advance in Space Research, Physics of Planetary Magnetospheres*, (ed. by Knott, K.) Pergamon Press LTD, Oxford, **1** (1), 197, 1981.
- [4] Xu Rong-lan, Three-dimensional magnetospheric current system during substorms, *Advance in Space Research, Physics of Planetary Magnetosphere*, (ed. by Knott, K.) Pergamon Press LTD, Oxford, **1**(1), 283, 1981.
- [5] Bellman, R., *Perturbation Techniques in Mathematics Physics and Engineering*, Holt, Rinehart and Winston. Inc., 1964.
- [6] Lui, A. T. Y., Meng, C.-I. and Akasofu, S.-I., Search for the magnetic neutral line in the near-earth plasma sheet. *J. Geophys. Res.*, **82**, 1547, 1977.
- [7] Fairfield, D. H., On the average configuration of geomagnetic tail. *J. Geophys. Res.*, **84**, (A5), 1950, 1979.

THE ANALYTICAL TRAJECTORY OF THE CHARGED PARTICLE MOVING IN A NEUTRAL MAGNETIC FIELD

Xu Rong-lan

(Institute of Space Physics, Academia Sinica)

Abstract

Neutral magnetic field was found wide important applications in space physics

and sathrophysics⁽¹⁻⁴⁾. In a rectangular coordinate system x y and z , the neutral magnetic field is given by Eq. (2—1), where h is a small northward magnetic field⁽⁵⁾, a and ε are the parameters of the field. When $\varepsilon = 0$ the field is a neutral sheet. An analytical trajectory of the charged particle moving in this field has been calculated. The results are:

(1) By means of a perturbation method⁽⁵⁾, we found that the motion of the charged particle in a neutral sheet field can be defined by the first approximation of motions either in a neutral magnetic field or in a neutral sheet field with a small northward component. The first, second and third approximation of the motion in a neutral magnetic field satisfy respectively the Eqs. (2—7); (2—8) and (2—9), and in neutral sheet with northward component they satisfy Eqs. (2—12), (2—13) and (2—14).

(2) In the neutral sheet field, the whole region can be divided into a perturbation region ($|x| \geq L = \sqrt{\frac{2cma^2v}{e}}$) and non-perturbation region ($|x| \leq L$). In

non-perturbation region, the Alfven's perturbation method can not be used, the analytical solution of the motion equation (2—7) is given by Eqs. (3—7) and (3—16), where z' and the drift velocity V_z are given by Eqs. (3—17) and (3—15). In the perturbation region, the analytical solution of Eq. (2—7) is given by Eqs. (4—8) and (4—22), where z' and V_z are given by (4—23) and (4—18). The third approximation of the analytical trajectory and the trajectory evaluation by computer agree quite well, except for a slight deviation around the boundary of the perturbation region and the non-perturbation region.

(3) The trajectory of the particle moving in a neutral sheet field can be divided into two motions, one is along a closed oscillation trajectory in the plane perpendicular with the magnetic field while its center drifts in a direction parallel to the neutral line, and the other along the magnetic line with an uniform velocity. In the non-perturbation region, the closed oscillation trajectory of particles with different initial conditions are shown in Fig. 2 by lines ①, ②, ③, ④ and ⑤. They are derived from Eqs. (3—7) and (3—17), and take a "8" shape motion. Lines ⑥, ⑦ and ⑧ are derived from Eq. (4—8) and (4—23) in the perturbation region, and take a circular motion. There is a slight deviation between ⑤ and ⑥. The drift velocity in non-perturbation region determined by Eq. (3—15) has an opposite direction and a much higher value than that in the perturbation region. The projection of the trajectories on x - y plane corresponds to the particles with different initial conditions are shown in Figs. 1 and 3 by full lines, and the dashed lines denote the fundamental and higher harmonic of the corresponding trajectories.

A complete analytical form has been obtained from the above results.