中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 12 期: 2099 ∼ 2120
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
综 述

辛双有理几何的若干研究进展

献给中山大学建校百年暨中山大学数学学科建设 100 周年

胡建勋[1*], 李天军[2], 阮勇斌[3], 章唯一[4]

1. 中山大学数学学院, 广州 510275;
2. School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, USA;
3. 浙江大学数学高等研究院, 杭州 310058;
4. Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK
E-mail: stsjxhu@mail.sysu.edu.cn, lixxx248@umn.edu, ruanyb@zju.edu.cn, Weiyi.Zhang@warwick.ac.uk

收稿日期: 2024-04-15; 接受日期: 2024-09-09; 网络出版日期: 2024-10-09; * 通信作者
国家重点研发计划 (批准号: 2023YFA100980001) 资助项目

摘要 20 世纪 80 年代, 日本数学家 Mori 提出了极小模型纲领, 其核心思想之一是把代数簇二分为单直纹簇和非单直纹簇来研究. 对单直纹簇来说, 试图理解以 Fano 簇为纤维的纤维化结构; 而对于非单直纹簇, 则要寻找它的极小模型. 辛双有理几何是研究辛流形的双有理等价分类, 并尝试将 Mori 的分类理论拓展到辛几何领域. 本文综述该领域的最新进展, 内容包括双有理配边等价、辛单直纹和有理连通辛流形、4 维辛流形的 Kodaira 维数及近复流形的双有理几何等.

关键词 双有理配边 单直纹辛流形 有理连通辛流形 Gromov-Witten 不变量 Kodaira 维数 近复流形

MSC (2020) 主题分类 53D45, 14N35, 53D35

1 引言

辛几何具有悠久的历史, 其植根于经典力学与几何光学[5], 并与包括动力系统、低维拓扑、代数几何、复几何、表示论与同调代数在内的诸多现代数学分支及物理学中的经典力学、量子力学、弦理论和镜像对称等分支有着密切联系[105]. 20 世纪 60 年代末, Gromov[44] 证明了开流形上的辛结构可以用同伦论数据来分类, 他称之为 flexibility. 他后来又和 Eliashberg 研究了该 flexibility 的极限, 即刚性会通过某种整体结构的存在而出现. Gromov[47] 发现了基本的软硬二择一: 辛同构群或者在微分同胚群中 C^0- 闭 (硬或刚性), 或者在保体积微分同胚群中 C^0- 稠密 (软). Eliashiberg[25] 在 20 世纪 70 年代末借助于波前分析给出了刚性部分的证明.

英文引用格式: Hu J, Li T-J, Ruan Y, et al. Some research progress on symplectic birational geometry (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 2099–2120, doi: 10.1360/SSM-2024-0116

© 2024 《中国科学》杂志社

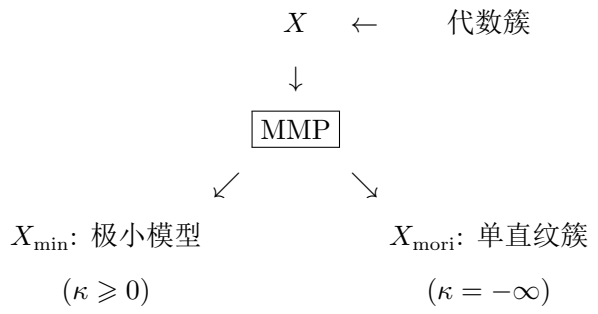

图 1 Mori 极小模型纲领

1985 年, Gromov[45] 将伪全纯曲线技术引入辛几何的研究, 为辛几何的研究开辟了一条全新的道路, 即通过研究辛流形中伪全纯曲线模空间来研究辛流形的几何拓扑. 最具标志性的成果之一为辛不可挤压定理, 即球在辛映射下的像不可无限制地 "变长变细". Floer[33,35] 利用 Gromov 提出的椭圆方法在 Yang-Mills 理论和辛拓扑领域建立起著名的 Floer 同调理论. 在辛拓扑中, Floer 同调被用来证明著名的 Arnold 猜测对许多辛流形成立, 参见文献 [39, 97, 120].

20 世纪 80 年代, 唐纳森 (Simons Donaldson, 英国) 通过 Yang-Mills 理论中的瞬子模空间建立了著名的唐纳森不变量, 为应用物理思想构造拓扑不变量提供了一个全新方法. 20 世纪 90 年代初, 受 Gromov 的伪全纯曲线技术和 Witten 的拓扑西格玛模型理论的启发, 阮勇斌[119] 于 1992 年首先对半正辛流形亏格零情形定义了一个基本 (primary) 不变量, 阮勇斌和田刚[121,122] 于 1993 年在半正辛流形情形定义了任意亏格的混合 (mixed) 型不变量. 该不变量后来被称为 Gromov-Witten 不变量[104], 并被拓展到一般辛流形上.

双有理几何的目标是通过双有理等价来分类代数簇. 20 世纪 80 年代, 日本数学家 Mori 提出了 Mori 纲领或极小模型纲领 (minimal model program, MMP), 使其成为引领双有理几何近几十年发展的重要突破. 其核心思想之一是把代数簇二分为单直纹簇和非单直纹簇来研究. 若用 κ 记 Kodaira 维数, 则分类框架如图 1 所示.

对单直纹簇来说, 我们试图理解以 Fano 簇为纤维的纤维化结构. 而对于非单直纹簇, 我们则要寻找它的极小模型.

阮勇斌[117] 于 1993 年观察到 Gromov-Witten 理论可以用来把 Mori 极小模型纲领的某些关键组成部分 (比如极端射线) 推广到辛几何中来, 参见文献 [73]. 之后, 阮勇斌[120] 和 Kollár[62] 证明一个光滑的单直纹射影流形上存在非零的带一个点上同调类约束的零亏格 Gromov-Witten 不变量, 并由此给出了定义辛单直纹流形的一种新思路.

一些简单的双有理变换, 比如辛吹胀和反向辛吹胀, 自 Gromov 以来便在辛范畴下熟知[101,105]. 在辛几何中, Guillemin 和 Sternberg[49] 引入了双有理配边等价概念: 两个 $2n$ 维的辛流形是双有理等价的, 如果它们是来自一个连通 $2n+2$ 维的辛流形上的半自由 Hamilton S^1- 作用的辛约化. 这样一个辛配边可以分解为一系列基于辛吹胀、反向辛吹胀和辛形变的基本辛配边. 本文前 3 位作者[55] 证明了辛单直纹流形是一个在辛双有理意义下不变的概念. 换言之, 前面提到的 Mori 双有理几何二分法分类框架可以拓展到辛几何范畴, 从而也激发了人们对辛双有理几何的研究兴趣. 在以上 3 个基本辛配边操作中, 辛形变是辛几何中一个基本问题[89], 同时我们总可以对辛子流形做吹胀, 但对何

时能做辛反向吹胀, 除了 4 维外我们只知道在 6 维中的一个判据[88]. 不过, 辛范畴中现在还不知如何引入双有理映射的概念. 本文第 4 作者在近复几何中引入的双有理映射概念或可用来做此推广.

为区分双有理等价类, 我们需要找到非平凡的双有理不变量. 一些经典的双有理不变量, 比如基本群和 Artin-Mumford 的 Tor$H^3(X,\mathbb{Z})$, 也自然是辛双有理不变量. Taubes[127,128] 关于 4 维辛流形 Seiberg-Witten 理论的基本工作在 20 世纪 90 年代末被成功用于对 4 维辛流形定义 Kodaira 维数 (它与复曲面的 Kodaira 维数是兼容的). 它可以看作是对前面提到的二分法的一个加细. 值得一提的是, McDuff[100] 分类了 4 维单直纹流形, 也就是 Kodaira 维数是负无穷的情形. 它们上面的辛结构必是辛形变于 Kähler 的. 对于 Kodaira 维数为零的情形 (有时也被称作辛 Calabi-Yau 4 维流形), 李天军等[84] 证明了它们的极小模型的有理系数同调群与 K3 流形、Enriques 流形或是环面上的环丛的同构. 在辛范畴内对应于 Mori 纲领中核心的极端射线锥定理近来也被推广到了任意 4 维辛流形 (参见文献 [93, 137]). McDuff[102] 还对高维单直纹流形进行了研究. 特别地, McDuff 证明了带有 Hamilton S^1- 作用的流形都是单直纹的.

要将 Mori 的工作拓展到非 Kähler 辛流形, 首先必须找到 Fano 流形在辛几何中的类似. 一个自然的候选是单调辛流形. Fine 和 Panov 对高维辛 Fano 流形和辛 Calabi-Yau 流形做了令人印象深刻的工作. 基于 Reznikov[116] 的工作, Fine 和 Panov[30,31] 构造了许多非 Kähler 的 6 维以上的辛 Calabi-Yau 流形和 12 维以上的辛 Fano 流形.

有理连通是一个和单直纹性质密切相关的代数几何概念. 但是在辛范畴中尚未找到一般的定义. 胡建勋[54]、Voisin[133] 和田志宇[130,131] 对此进行了研究. 特别地, 基于 Voisin 的工作, 田志宇[130] 证明了对于复 3 维射影流形双有理性是在辛形变下不变的 (因此也是辛双有理不变的). 对于一般维数, 这个问题的答案依旧未知.

对于开辛流形, McLean[106] 引入了单直纹 Liouville 区域的概念并以此来研究 log Kodaira 维数在辛同构下的不变性以及和其紧化后流形的辛双有理性质之间的关系.

本文综述辛双有理几何研究进展, 具体结构如下: 第 2 节先回顾双有理配边等价的概念; 第 3 节关注辛单直纹和辛有理连通流形的性质; 第 4 节聚焦于 4 维辛流形的 Kodaira 维数方面的进展; 第 5 节介绍近复流形的双有理几何方面的一些进展及若干公开问题.

2 双有理配边等价

称一个 S^1- 作用为半自由的, 如果其在不动点之外均为自由的. 辛配边的概念在本世纪初就已经在辛几何领域被广泛使用[26,27,48], 但本文选择的配边关系与之有所不同. 本节中将介绍由 Guillemin 和 Sternberg[49] 引进的双有理配边. 在介绍双有理配边之前, 我们先来看看几类基本的双有理配边: 辛吹胀、反向辛吹胀及 $\mathbb{Z}$- 线性形变. 构造辛吹胀一般有两种思路: 一种是 Gromov[46] 通过选择吹胀点邻域上复结构来构造复吹胀上的辛结构; 另一种则是 McDuff[101] 给出的辛拓扑内蕴构造.

辛吹胀及反向辛吹胀可以用辛切割来解释如下. 假定 M 为 $2n$ 维闭辛流形且 $M_0 \subset M$ 为 M 中带 Hamilton S^1- 作用的余维为零的开子流形. 设 $H : M_0 \to \mathbb{R}$ 为 M_0 上的一个 Hamilton 函数且 0 为其正则值. 假设 M_0 中超曲面 $H^{-1}(0)$ 将 M 分成两个分别带边界 $\partial M_0^{\pm} = H^{-1}(0)$ 的连通流形 $M_0^{\pm}$, 这里 $+$ 代表 $H < 0$ 一侧. 进一步假设 S^1 自由作用在 $H^{-1}(0)$ 上, 则辛约化 $Z = H^{-1}(0)/S^1$ 给出一

个比 M 低 2 维具有标准辛结构 ω_Z 的辛流形. 通过粘合 $\partial M^{\pm}=H^{-1}(0)$ 上的 S^1- 作用轨道, 则可得到两个闭辛流形 $\overline{M}^{\pm}$ 分别包含实余 2 维光滑子流形 $Z^{\pm}=Z$ 但具有相反的法丛. $\overline{M}^{\pm}$ 带有辛结构 $\varpi^{\pm}$ 使得其在 Z 之外等于 ω 的限制, 在 Z 上的限制则等于标准辛结构 ω_Z. 辛流形偶对 $(\overline{M}^{\pm},\varpi^{\pm})$ 称为 M 沿 $H^{-1}(0)$ 的辛切割[72].

下面应用辛切割来构造 M 沿子流形 Y 的辛吹胀. 假定 $Y\subset M$ 为 M 的余维 $2k$ 的辛子流形. Y 在 M 中的法丛 N_Y 为一个秩为 $2k$ 的辛向量丛, 即纤维为标准辛空间 $(\mathbb{R}^{2k},\omega_{std})$ 的辛向量丛. 在 N_Y 上选定相容的近复结构使得 N_Y 为 Hermite 丛, 记相应的 $U(k)$ 主丛为 P. 由辛邻域定理知, 可选择足够小的 $\epsilon_0>0$, 使得 Y 在 M 中的管状邻域 $N_{\epsilon_0}(Y)$ 辛同胚于 N_Y 的圆盘丛 $N_Y(\epsilon_0)$, 记 $\phi: N_{\epsilon_0}(Y)\to N_Y(\epsilon_0)$ 为相应的辛同胚. 考虑 $M_0=N_{\epsilon_0}(Y)$ 上由复数乘法给出的 Hamilton S^1- 作用. 取定 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ 并考虑动量函数

$$H(u)=|\phi(u)|^2-\epsilon,\quad u\in N_Y(\epsilon_0),$$

其中 $|\phi(u)|$ 为 Hermite 向量丛 N_Y 中纤维向量的范数. 记 M 中对应于 N_Y 的半径为 ϵ 的球面丛的超曲面为 $P=H^{-1}(0)$. 对 M 沿 P 作辛切割, 则可得到两个闭辛流形 $\overline{M}^{+}$ 和 $\overline{M}^{-}$. 注意到 Y 位于 $+$ 侧且这样的构造不依赖于 ϵ 和 ϕ 的选择. 称 $\overline{M}^{-}$ 为 M 沿辛子流形 Y 的辛吹胀, 记为 $\tilde{M}=\overline{M}^{-}$. 如果 $\tilde{M}$ 为 M 沿 Y 的辛吹胀, 用 $E=\mathbb{P}(N_{Y|M})$ 记相应的例外除子, 那么 $\tilde{M}$ 及 $\overline{M}^{+}$ 沿 E 的法向连通和给出 M. 我们称从 $\tilde{M}$ 到 M 的过程为沿 E 的反向辛吹胀.

定义 2.1 记 $I=[0,1]$. 一个 $\mathbb{Z}$- 线性形变是指一条辛形式道路 $\omega+t\kappa$, $t\in I$, 其中 κ 为代表一个整类的闭 2- 形式. 两个辛形式称为 $\mathbb{Z}$- 线性形变等价的如果它们可以通过有限多个 $\mathbb{Z}$- 线性形变连接.

定义 2.2 称两个辛流形 (M,ω) 和 (M',ω') 为双有理配边的, 如果存在有限多个辛流形 (M_i,ω_i), $0\leqslant i\leqslant k$, 使得 $(M_0,\omega_0)=(M,\omega)$, $(M_k,\omega_k)=(M',\omega')$, 并且对每个 i、(M_i,ω_i) 和 (M_{i+1},ω_{i+1}) 为某个带半自由 Hamilton S^1- 作用的辛流形 W_i (高 2 维) 的辛约化.

根据 Guillemin 和 Sternberg[49] 的结果, 我们有如下基本的分解结果.

定理 2.1 一个双有理配边等价可以分解成若干基本双有理配边等价: 辛吹胀、反向辛吹胀及辛结构的 $\mathbb{Z}$- 线性形变.

从弱分解定理不难得到如下定理.

定理 2.2 两个双有理等价的极化射影流形作为辛流形是双有理配边等价的.

3 单直纹与有理连通辛流形

3.1 Gromov-Witten 不变量

设 (M,ω) 为紧致 $2n$ 维辛流形或射影簇. 给定 $A\in H_2(M,\mathbb{Z})$ 及两个非负整数 g,k. 用 $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ 记带 k 个标记点的亏格为 g 的稳定曲线的 Deligne-Mumford 空间. 给定一个与 ω 相容的近复结构 J, 用 $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(M,A)$ 记 M 中代表类 A 的带 k 个标记点的亏格为 g 的 J- 全纯曲线等价类的模空间的紧致化, 这里是通过带 k 个标记点的亏格 g 的稳定映射来紧致化的, 有时也简称为稳定映射模空间, 其元素记为 $[C,x_1,\ldots,x_k,f]$, 这里 C 表示一个至多带结点奇性的曲线 (或 Riemann 面), 映射 $f:C\to M$

限制在 C 的每个光滑分支上为 J- 全纯映射, 稳定是指其具有有限自同构群. 稳定映射模空间具有复期望维数

$$\mathrm{vdim}_{\mathbb{C}}\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(M,A)=c_1(A)+(n-3)(1-g)+k,$$

其中 $c_1(A)$ 为 M 的第一陈类在 A 上的取值.

稳定映射模空间带有两个自然映射: 一个是由 $ev_i([C,x_1,\ldots,x_k,f])=f(x_i)$ 定义的赋值映射 $ev_i:\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(M,A)\to M$; 另一个则是通过忘记映射 f 后并对曲线进行稳定化来定义的 "忘记映射" $\pi:\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(M,A)\to\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$. 一般而言, 稳定映射模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(M,A)$ 具有奇性, 但仍可以借助于虚拟基本圈技术 (虚拟积分或模空间上的相交理论) 来定义其虚拟基本类 $[\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(M,A)]^{\mathrm{vir}}$. 给定 $\gamma\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k},\mathbb{Q})$, $\alpha_i\in H^*(M,\mathbb{Q})$, $i=1,\ldots,k$, 以及非负整数 $d_1,\ldots,d_k$. 则利用虚拟基本类可以定义 Gromov-Witten 不变量为虚拟积分

$$\langle\gamma;\tau_{d_1}\alpha_1,\ldots,\tau_{d_k}\alpha_k\rangle_{g,A}^M:=\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(M,A)]^{\mathrm{vir}}}\pi^*\gamma\cup\prod_{i=1}^k\psi_i^{d_i}ev_i^*\alpha_i,$$

其中 ψ_i 为与第 i 个标记点相应的模空间上的余切空间线丛的第一陈类.

Gromov-Witten 不变量不依赖于近复结构 J 的选择, 因此也是辛结构的不变量. Gromov-Witten 不变量还满足若干公理 (参见文献 [67, 121]), 如维数公理、除子公理、分裂公理、约化公理及形变公理等. Gromov-Witten 不变量的计算是非常困难的问题, 常用的计算工具包括局部化技巧 (参见文献 [43, 66, 94])、退化公式 (参见文献 [73, 74]) 和 WDVV 方程等.

3.2 代数几何中的单直纹性质

本小节将先回顾代数几何中的单直纹的概念.

定义 3.1 一个光滑复射影簇 M 称为单直纹的, 如果对任意点 $x\in M$, 都存在态射 $f:\mathbb{CP}^1\to M$ 使得 $x\in f(\mathbb{CP}^1)$, 或者说 M 被有理曲线覆盖.

单直纹射影簇上的有理曲线具有非常好的性质 [59, 62]: 对任意一般点 $x\in M$, 如果态射 $g:\mathbb{CP}^1\to M$ 满足 $g_*[\mathbb{CP}^1]=A$ 且 $g(y_0)=x$, 则

$$H^1(\mathbb{CP}^1,g^*TM)=0.$$

单直纹的刻画在分类理论中具有重要意义, 这里我们选择 Kollár [63] 和阮勇斌 [120] 使用 Gromov-Witten 不变量的刻画. 也正是由于有了这个刻画才可以将代数几何中单直纹的概念拓展到辛几何范畴.

定理 3.1 (参见文献 [63, 120]) Kähler 流形 (M,J,ω) 为单直纹的当且仅当存在同调类 $A\in H_2(M;\mathbb{Z})$ 及上同调类 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+1}\in H^*(M;\mathbb{R})$ 使得

$$\langle[pt],\alpha_2,\ldots,\alpha_{p+1}\rangle_{0,A}^M\neq 0,$$

其中 $[pt]$ 表示 M 中点的 Poincaré 对偶.

如果我们选择 α_i 为 Kähler 形式 ω 的次幂, 则由结合律可以将定理 3.1 中的非零不变量分解成带三个上同调类约束的不变量乘积的和. 从而可以有如下推论.

推论 3.1 Kähler 流形 M 为单直纹的当且仅当存在 $A \in H_2(M;\mathbb{Z})$、$p \in \mathbb{Z}_{>0}$ 以及 $\alpha \in H^*(M;\mathbb{R})$ 使得

$$\langle [pt], \omega^p, \alpha \rangle_{0,A}^M \neq 0,$$

其中 ω 为 M 上的 Kähler 形式.

3.3 辛单直纹性质

将单直纹的术语推广到辛几何范畴的最为直观的想法是要求对每一点都有固定同调类的辛球面通过该点. 李天军[77] 发现这个定义不太合理. 实际上, 若沿用该定义方式将会导致所有单连通流形都是单直纹的. 受 Kollár[63] 和阮勇斌[120] 的结果的启发, 我们可以选择用 Gromov-Witten 不变量来定义单直纹辛流形.

定义 3.2 称辛流形 M 为单直纹的, 如果存在同调类 $A \in H_2(M;\mathbb{Z})$ 和上同调类 $\alpha_2, \ldots, \alpha_k \in H^*(M;\mathbb{Z})$ 使得

$$\langle [pt], \alpha_2, \ldots, \alpha_k \rangle_{0,A}^M \neq 0.$$

称满足上述条件的同调类 A 为单直纹同调类. 称辛流形 M 为强单直纹的, 如果存在同调类 $A \in H_2(M;\mathbb{Z})$、$j_2, j_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和上同调类 $\alpha_2, \alpha_3 \in H^*(M;\mathbb{Z})$ 使得

$$\langle [pt], \tau_{j_2}\alpha_2, \tau_{j_3}\alpha_3 \rangle_{0,A}^M \neq 0.$$

由推论 3.1 知, 射影单直纹流形为辛单直纹的, 实际上为强辛单直纹的. 在 4 维的情形, 人们早就知道, 辛单直纹流形本质上也是射影单直纹的[69, 82, 84, 100]. 但在高维情形则存在单直纹辛流形不是射影的[41, 98]. 阮勇斌[118] 进一步证明了在一个给定的光滑流形上可能存在无穷多个不同的单直纹辛结构. McDuff[102] 证明了如下定理.

定理 3.2 (参见文献 [102]) 带有 Hamilton S^1- 作用的闭辛流形都是辛单直纹的.

众所周知, Fano 流形在 Mori 的双有理分类理论中具有重要作用. 双有理辛几何的另一个有趣的问题自然是如何将 Fano 流形的概念推广到辛几何. 对此, Fano 流形在辛几何的一个自然推广是单调辛流形, 即第一陈类 $c_1(M) \in H^2(M;\mathbb{Z})$ 为辛结构 $[\omega] \in H^2(M;\mathbb{R})$ 的整提升的闭辛流形 (M,ω). 关于单调辛流形, McDuff 和 Salamon[105] 提出如下公开问题:

猜想 3.1 (参见文献 [105]) 单调闭辛流形 $(M;\omega)$ 为辛单直纹的.

双有理辛几何的目的是将 Mori 的极小模型分类理论拓展到辛几何领域. 从第 1 节已经知道, 辛流形的双有理等价可以分解成若干辛吹胀和反向辛吹胀等基本双有理变换, 而且辛单直纹是通过 Gromov-Witten 不变量来定义的, 因此, 研究 Gromov-Witten 不变量在辛吹胀下的变化行为就成为研究的核心问题之一. Gromov-Witten 不变量的退化公式在 Gromov-Witten 不变量在辛吹胀下的变化研究中起到十分关键的作用[52, 53]. 而在 Gromov-Witten 不变量退化公式的研究中经常会涉及不连通的 Gromov-Witten 不变量, 若能用不连通的 Gromov-Witten 不变量来刻画辛单直纹性质, 则会给辛双有理几何的研究在技术上带来极大的便利. 对此, 我们有如下定理.

定理 3.3 (参见文献 [55]) 辛流形 M 为单直纹的当且仅当存在同调类 $A \in H_2(M;\mathbb{Z})$, $j_2, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 及上同调类 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in H^*(M;\mathbb{R})$ 使得亏格零的 Gromov-Witten 不变量 (可能不

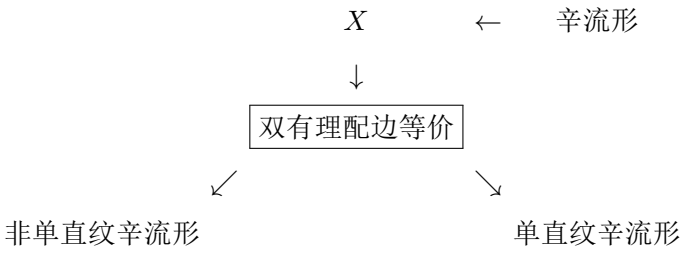

图 2 辛流形双有理二分法分类框架

连通) 中带点类的分量具有非零曲线类且

$$\langle [pt], \tau_{j_2}\alpha_2, \ldots, \tau_{j_k}\alpha_k \rangle_{0,A}^{M} \neq 0.$$

在找到辛单直纹的辛几何定义之后, 辛双有理几何的另一个基本问题是辛单直纹是否在辛双有理配边等价下保持不变. 借助于 Gromov-Witten 不变量的退化公式及局部化技巧, 可以证明辛单直纹性质在辛吹胀和反向吹胀下保持不变. 由于 Gromov-Witten 不变量在辛形变下保持不变, 从而有如下定理.

定理 3.4 (参见文献 [55]) 设 M 为紧致辛流形, $Y \subset M$ 为 M 的辛子流形. 记 M 沿辛子流形 Y 的辛吹胀为 $\tilde{M}$. 则 $\tilde{M}$ 为辛单直纹的当且仅当 M 为辛单直纹的.

综合上述结果, 不难看出辛单直纹性质在双有理配边等价下保持不变. 这也意味着通过双有理配边等价可以将辛流形分成单直纹和非单直纹两类, 即可以将 Mori 的极小模型分类理论中的单直纹和极小模型的二分法分类结果拓展到辛范畴. 从而对辛流形建立起二分法分类框架如图 2.

陈柏辉、杜承勇和胡建勋[14] 进一步将辛单直纹的概念拓展到了辛轨形的情形, 并证明了辛单直纹性质在轨形双有理等价下保持, 从而将上述二分法分类理论拓展到辛轨形的情形. 推广 4 维的辛单直纹流形可以被其中非负相交的辛子球面的存在性推出的描述, 李天军和阮勇斌[87] 给出了一个由其中单直纹正除子的存在性对高维单直纹辛流形的刻画.

3.4 代数几何中的有理连通性质

代数几何中已知, Fano 流形 M 为有理连通的[11,64,65], 即对 M 中任意两点都存在有限连通有理曲线 (全纯球面) 链 (又称为亏格零的稳定映射) 经过这两点. 本小节将回顾代数几何中的有理连通的概念. 本小节的主要参考文献为 [4], 也可参见文献 [11,17,62,64,65].

定义 3.3 设 M 为正维数光滑复射影簇. 称 M 为有理连通如果下列等价条件成立:

(1) M 中任意两点都可以通过一条有理曲线连接 (称为有理连通).

(2) M 中任意两个一般点都可以通过一条有理曲线链来连接 (称为有理链连通).

(3) M 中任意有限多个点都可以通过一条有理曲线连接.

(4) M 中任意两个一般点都可以通过一条非常自由有理曲线连接. 这里称有理曲线 $C \subset M$ 为非常自由曲线, 如果存在满态射 $f : \mathbb{CP}^1 \to C$ 使得

$$f^*TM \cong \bigoplus_{i=1}^{\dim M} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(a_i), \quad a_i \geqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant \dim M.$$

有理连通代数簇具有若干重要性质.

命题 3.1 对有理连通代数簇, 下列性质成立:

(1) 有理连通性在双有理变换下保持不变.

(2) 有理连通性在光滑形变下保持不变.

(3) 若 M 为有理连通的, 则对任意 $m \geqslant 1$ 都有 $H^0(M, (\Omega^1_M)^{\otimes m}) = 0$.

(4) Fano 簇 (即 $-K_M$ 为丰沛的光滑复射影簇) 为有理连通的. 特别地, 对 $d \leqslant n$, $\mathbb{CP}^n$ 中 d 次光滑超曲面为有理连通的.

(5) 有理连通簇在纤维化下有很好的行为, 即设 M 为光滑复射影簇, 若存在满态射 $f : M \to B$ 使得 B 及 f 的一般纤维为有理连通, 则 M 也为有理连通的.

类似于辛单直纹的情形, 人们自然希望能用 Gromov-Witten 不变量来刻画有理连通簇. 对此, 田志宇[130, 131] 证明了如下结果.

命题 3.2 (i) 若有理连通的复 3 维光滑流形 M 为 Fano 或具有 Picard 数 2, 则 M 上存在非零的带两个点上同调类约束的亏格零的 Gromov-Witten 不变量.

(ii) 若 M 为伪指标至少为 2 的复 4 维光滑 Fano 流形, 则 M 上存在非零的带两个点上同调类约束的亏格零的 Gromov-Witten 不变量.

受辛单直纹情形 Kollár 和阮勇斌的定理 3.1 及上述结果的启发, 我们有如下猜测:

猜想 3.2 任意有理连通射影流形上都有非零的带两个点上同调类约束的亏格零的 Gromov-Witten 不变量.

3.5 辛有理连通性

受辛单直纹情形的启发, 我们引入 k- 点有理连通辛流形的概念如下.

定义 3.4 设 $A \in H_2(M; \mathbb{Z})$ 为非零同调类. 称 A 为 k- 点辛有理连通类, 如果存在非零 Gromov-Witten 不变量

$$\langle \tau_{d_1}[pt], \ldots, \tau_{d_k}[pt], \tau_{d_{k+1}}\alpha_{k+1}, \ldots, \tau_{d_l}\alpha_l \rangle^M_{0,A},$$

其中 $\alpha_i \in H^*(M; \mathbb{R})$ 且 $d_1, \ldots, d_l$ 为非负整数. 称 $A \in H_2(M; \mathbb{Z})$ 为 k- 点强辛有理连通类, 如果 $d_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

定义 3.5 设 k 为正整数. 称辛流形 M 为 k- 点 (强) 辛有理连通流形, 如果存在一个 k- 点 (强) 辛有理连通类. 有时也简称 2- 点 (强) 辛有理连通流形为 (强) 有理连通辛流形.

注 3.1 由定义可以看出, 1- 点辛有理连通辛流形即为单直纹辛流形, 而且当 $k > 0$ 时, k- 点 (强) 辛有理连通辛流形必为单直纹辛流形. 另外, 定义 3.3 意味着 k- 点辛有理连通应该等价于 k- 点强辛有理连通, 但目前仍未有证明.

例 3.1 (1) 对任意正整数 k, 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 为 k- 点强辛有理连通的.

(2) Grassmann 流形 $Gr(k, n)$ 为辛有理连通的[8].

(3) Grassmann 流形 $Gr(d, 2d)$ 为 3- 点强辛有理连通的[10].

(4) Hilbert 概型 $\mathrm{Hilb}^2(\mathbb{CP}^2)$ 及 $\mathrm{Hilb}^2(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)$ 均为辛有理连通的[42, 56, 115].

由于 Gromov-Witten 不变量在辛形变下保持不变, 从而 k- 点有理连通性质在辛形变下也保持不变. 尽管我们还不知道有理连通射影流形是否一定是辛有理连通的 (参见猜想 3.2), 而且至今为止

我们还没有证明辛有理连通性质是否在辛双有理等价下保持不变. 从 Gromov-Witten 不变量的吹胀公式[13,52,53,68], 我们有如下结果:

命题 3.3 设 M 为 k- 点 (强) 辛有理连通辛流形, $\tilde{M}$ 为 M 沿有限多个点或具有凸法丛的特殊辛子流形的辛吹胀. 则 $\tilde{M}$ 为 k- 点 (强) 辛有理连通的.

由命题 3.1 知, 代数几何中的有理连通性质是双有理不变性质. 命题 3.3 为下面的猜想提供了一些证据.

猜想 3.3 辛有理连通性质在辛双有理配边等价下保持不变.

定义 3.6 设 M 和 N 为两个复射影流形或紧致 Kähler 流形. 称 M 与 N 为辛等价的, 如果对 M 上 Kähler 形式的形变类中某个辛形式 α 及 N 上 Kähler 形式的形变类中某个辛形式 β, 存在微分同胚

$$\psi : M \cong N$$

使得 $\psi^*\beta = \alpha$.

我们注意到, ψ^* 在 M 和 N 上辛形式的形变类中的辛形式的集合之间给出一个双射. Kollár[63] 曾提出下面猜想:

猜想 3.4 假设 M 为有理连通的, N 为辛等价于 M 的紧致 Kähler 流形. 则 N 也是有理连通的.

关于有理连通流形的辛几何刻画, Voisin[133] 证明了如下定理.

定理 3.5 (参见文献 [133]) 设 M 和 N 为紧致复 3 维 Kähler 流形. 若 M 与 N 辛等价, 则

(i) 若 M 为 Fano 流形, 则 N 为有理连通的.

(ii) 如果 M 为有理连通的且 $b_1(M) \leqslant 2$, 则 N 为有理连通的.

田志宇[130,131] 研究了有理连通复 3 维和复 4 维光滑流形的辛几何并证明了如下定理.

定理 3.6 (参见文献 [130,131]) 在复 3 维情形, 有理连通性质是辛形变不变量.

4 4 维辛流形的 Kodaira 维数

4.1 闭流形的 Kodaira 维数

McDuff 辛极小性和 Taubes 在 4 维辛流形上 Seiberg-Witten 理论的基本工作在 20 世纪 90 年代末被成功用于对 4 维辛流形定义 Kodaira 维数 (它与复曲面的 Kodaira 维数是兼容的). 它可以看作是对前面提到的二分法的一个加细.

本小节中, M 为光滑定向闭 4 维流形且辛形式 ω 和定向相容, 即 ω^2 给出相同的定向. 最近, 王宏玉等[126] 证明了在一定条件下 4 维近复流形上存在与近复结构相容的辛形式.

定义 4.1 记 $\mathcal{E}_M$ 为 -1 光滑球面的同调类集合. 称 M 是光滑极小, 如果 $\mathcal{E}_M$ 是空集.

关于光滑极小流形, 我们有如下命题.

命题 4.1 M 是光滑极小当且仅当它不是 $\overline{\mathbb{CP}^2}$ 和另一个流形的连通和.

定义 4.2 设辛形式 ω 和定向相容. 称 (M,ω) 为辛极小, 如果 $\mathcal{E}_\omega$ 是空集, 这里

$$\mathcal{E}_\omega = \{E \in \mathcal{E}_M |\ E \text{ 可被嵌入 } \omega\text{- 辛球表示}\}.$$

称辛流形 (N,τ) 是 (M,ω) 的极小模型, 如果 (N,τ) 是极小且 (M,ω) 是 (N,τ) 的辛吹胀.

利用 Seiberg-Witten 理论可以证明如下基本事实: $\mathcal{E}_\omega$ 是空集当且仅当 $\mathcal{E}_M$ 是空集. 换言之, (M,ω) 辛极小当且仅当 M 是光滑极小.

定义 4.3 设 (M^4,ω) 为辛极小的 4 维流形. 记由与辛结构相容的近复结构来定义的辛典则类为 K_ω. 定义 (M^4,ω) 的 Kodaira 维数如下:

$$\kappa^s(M^4,\omega)=\begin{cases}-\infty, & K_\omega\cdot[\omega]<0 \text{ 或 } K_\omega\cdot K_\omega<0,\\ 0, & K_\omega\cdot[\omega]=0 \text{ 且 } K_\omega\cdot K_\omega=0,\\ 1, & K_\omega\cdot[\omega]>0 \text{ 且 } K_\omega\cdot K_\omega=0,\\ 2, & K_\omega\cdot[\omega]>0 \text{ 且 } K_\omega\cdot K_\omega>0.\end{cases}$$

由于不存在极小 (M,ω) 满足

$$K_\omega\cdot[\omega]=0,\quad K_\omega\cdot K_\omega>0,$$

故 κ^s 是适定的.

命题 4.2 κ^s 具有如下性质:

(1) κ^s 不依赖于 ω, 因此它是 M 的定向微分同胚不变量.

(2) 如果 M 兼有辛结构和复结构, 则 $\kappa^s=\kappa^h$ (参见文献 [23]). 譬如对 Kodaira-Thurston 流形. $\kappa^h(M^4,J)$ (甚至多亏格) 是 M 的定向微分同胚不变量 (参见文献 [37]).

(3) $\kappa^s(M)=-\infty$ 当且仅当 M 是 $\mathbb{CP}^2, S^2\times S^2$ 或正亏格曲面上的 S^2- 丛 (参见文献 [96,114]).

定义 4.4 对一般 4 维辛流形 (M,ω), 定义其 Kodaira 维数为其极小模型的 Kodaira 维数.

注 4.1 κ^s 的定义是合理的. 实际上, McDuff 证明了极小模型的存在性. 如果 $(M;\omega)$ 具有非微分同胚的极小模型, 则这些极小模型具有 $\kappa^s=-\infty$, 即极小模型几乎唯一. 又 κ^s 是 M 的定向微分同胚不变量, 故微分同胚的极小模型具有相同的 Kodaira 维数.

4.2 闭流形的 Kodaira 分类和基本问题

这一小节概述 4 维辛流形分类和基本问题.

4.2.1 Kodaira 维数为正的流形的地理分布

Gompf[41] 发现, 任何有限表示群都可以实现为辛流形的基本群且相应辛流形的 Kodaira 维数为正. 所以不可能分类 Kodaira 维数为正的辛流形. 对 Kodaira 维数为 2 的极小流形, 主要问题是 Gompf 提出的辛地理问题: 哪些整数对可实现为 (Euler 数 χ, $K_\omega\cdot K_\omega$). 也可等价地考虑数对 (Euler 数 χ, 指标 σ), 因为 $K_\omega\cdot K_\omega=2\chi(M)+3\sigma(M)$.

所有满足 $K_\omega\cdot K_\omega-2\chi(M)=3\sigma(M)\leqslant 0$ 的格点都已被实现, 参见文献 [1] 及其参考文献. 对正 σ 的范围目前还不是很清楚, 参见文献 [2].

这里的一个基本猜想是:

猜想 4.1 Kodaira 维数为 2 的 4 维辛流形满足 Bogomolov-Miyaoka-Yau 不等式:

$$K_\omega\cdot K_\omega\leqslant 3\chi(M).$$

对一般型 Kähler 曲面, 这是 Miyaoka[110] 和 Yau[135] 的经典定理. Hamenstaedt[51] 验证了曲面上的曲面丛的情形.

关于 $K_\omega \cdot K_\omega$ 的下界则有辛 Noether 型不等式猜想[29,32,99].

另一个地理问题是奇异辛地理问题. 现在已很清楚绝大多数正的数对有至少一个往往是无限个微分同胚型. 备受关注的是小的数对, 即奇异小流形的存在性问题.

对 Kodaira 维数为 1 的极小流形, 相应的辛地理问题是:

猜想 4.2 Kodaira 维数为 1 的流形的 Euler 数是非负的.

4.2.2 Kodaira 维数为零的流形的光滑分类

极小的 Kodaira 维数为零的辛流形的辛典范类是挠整类, 所以有时也被称作 Calabi-Yau 4 维辛流形.

对于 Kodaira 维数为零的情形, 基本问题是光滑分类.

猜想 4.3 (参见文献 [21, 79]) Calabi-Yau 4 维辛流形微分同胚于以下其一:

- K3 曲面;
- Enriques 曲面;
- 环面上的环丛.

这个猜想在同调层次上成立: Calabi-Yau 4 维辛流形的有理系数同调群与 K3 曲面、Enriques 曲面或是环面上的环丛的同构. 关键是证明如下的上界.

定理 4.1 (参见文献 [6, 78]) Kodaira 维数为零的流形满足 $b^+(M) \leqslant 3$.

Calabi-Yau 4 维辛流形同调型和示性数如表 1 所示.

对于拓扑同胚型也有一些进展. 称有限表示的群 G 为辛 Calabi-Yau 群, 如果它是一个 Calabi-Yau 辛流形 M_G 的基本群[36]. 假如 $b_1(G) = 0$ 且 G 为剩余有限群, 则 $G = 1$ 或 $G = \mathbb{Z}_2$, 且相应的 Calabi-Yau 4 维辛流形拓扑同胚于 K3 曲面或 Enriques 曲面[50,112].

假如 $b_1(G) = 0$, 则由定理 4.1 可得

$$2 \leqslant vb_1(G) \leqslant 4, \quad \chi(M_G) = \sigma(M_G) = 0.$$

若 G 是一个外 (infra) 可解流形的基本群, 则相应的 Calabi-Yau 4 维辛流形拓扑同胚型唯一[36].

猜想 4.4 (Donaldson) K3 的辛结构都是 Kähler 的.

表 1 Calabi-Yau 4 维辛流形同调型和示性数

b_1	b_2	b^+	χ	σ	已知流形
0	22	3	24	−16	K3
0	10	1	12	−8	Enriques surface
4	6	3	0	0	4 维环面
3	4	2	0	0	环面上的环丛
2	2	1	0	0	环面上的环丛

4.2.3 Kodaira 维数为负的流形的辛分类, 曲面和辛同胚群

Kodaira 维数为负的流形作为光滑流形是有理的或直纹的, 即微分同胚于有理的或直纹的代数曲面. 辛流形称为辛 Fano, 如果辛典范类和辛类是成负比的. 根据定义, 辛 Fano 4 维流形的 Kodaira 维数显然为负. Kodaira 维数为负的 4 维辛流形还有其他的刻画, 譬如存在非负相交数的光滑球面 (参见文献 [76]).

一个光滑流形上的辛结构的模空间定义为微分同胚的辛结构等价类空间. 这一小节中记 M 为有 Kodaira 维数为负辛结构的光滑流形. 对这类流形辛结构的模空间有简单完全的描述[123]:

1. 所有辛典范类是微分同胚的.

2. 同调的辛结构是微分同胚的.

3. 辛类的空间称为辛锥. 辛锥由 $\mathcal{E}_M$ 完全确定 (参见文献 [84]).

4. 辛结构的模空间可以描述为辛锥在几何自同构群下的商空间. 这里, 几何自同构群是定向微分同胚群在上同调的作用.

对这类流形还是有许多基本的问题, 譬如辛结构和 Kähler 结构的对比、辛曲面的存在性以及辛微分同胚群的计算等.

M 都有 Kähler 结构, 对极小的 M, 所有辛结构是 Kähler 的. 但非极小的直纹曲面存在非 Kähler 的辛结构[12]. 对 $\mathbb{CP}^2\#k\overline{\mathbb{CP}^2}, k \geqslant 10$, 这是未知的[9].

关于辛曲面的存在性有如下的猜想[22].

猜想 4.5 对 Kodaira 维数为负的流形 (M,ω) 的一个 2 维整同调类 A, A 由一个连通 ω- 辛曲面表示当且仅当

1. $[\omega]\cdot A>0$;

2. $g_\omega(A)\geqslant 0$, 这里 $g_\omega(A)$ 由 $2g_\omega(A)-2=K_\omega\cdot A+A\cdot A$ 定义;

3. A 由一个亏格为 $g_\omega(A)$ 的连通光滑曲面表示.

对于可定向的 Lagrange 曲面, 相应的猜想是成立的. 因为 $b^+=1$, 没有正亏格的可定向 Lagrange 曲面. 一个 2 维整同调类 A 由一个连通 Lagrange 球面表示当且仅当[90]

1. $\omega(A)=0$;

2. $A\cdot A=-2$;

3. A 由一个光滑球面表示.

Lagrange 球面的存在性判据可完全推出辛同胚群在同调上的作用: 由沿 Lagrange 球面局部可构造出 Seidel Dehn 环绕辛同胚生成. 同调平凡的辛 Torelli 子群的同伦性质有很多工作. 对于相对于辛第一陈类是正的辛结构可以由 Lagrange 球面类系统决定出辛 Torelli 子群的类群. Lagrange 球面类系统是 A 型时, 类群是平凡的. Lagrange 球面类系统是 D 型时, 类群是一个纯球面辫群[75].

4.3 推广

4.3.1 辛偶对的相对 Kodaira 维数

闭流形的 Kodaira 维数可以推广到带一个辛曲面 $F\subset(M,\omega)$ 的流形对情形[93]. F 可以是不连通但没有球面分支.

引入 F 的相伴类 $K_\omega+[F]$. 称 F 为极大的, 如果 $K_\omega+[F]$ 满足对于任意 $E\in\mathcal{E}_\omega$ 都有

$$(K_\omega+[F])\cdot E\geqslant 0.$$

这显然等价于对于任意 $E\in\mathcal{E}_\omega$ 都有 $[F]\cdot E>0$. 换言之, F 的余流形是极小的. 所以我们称流形偶对为极小, 如果 F 是极大的. 如同闭流形的情形, 流形偶对仍可以反向辛吹胀到极小对, 并且极小偶对是唯一的.

没有球面分支并极大的 F 的相伴类 $K_\omega+[F]$ 满足下列正性:

引理 4.1 假设 F 没有球面分支且极大. 如果 $\kappa^s(M,\omega)\geqslant 0$, 则

$$(K_\omega+[F])\cdot[\omega]>0,\quad (K_\omega+[F])^2\geqslant 0.$$

如果 $\kappa^s(M,\omega)=-\infty$ 且 $(K_\omega+[F])^2>0$, 则 $(K_\omega+[F])\cdot[\omega]>0$.

特别地, 没有球面分支且极大的 F 满足

$$(K_\omega+[F])\cdot\omega=0\quad 和\quad (K_\omega+[F])^2>0.$$

因此, 对于没有球面分支的 F, 我们可以引入相对 Kodaira 维数.

定义 4.5 (1) 假如 F 是空集, 定义 $\kappa^s(M,\omega,F)$ 为 $\kappa^s(M,\omega)$.

(2) 假如 F 非空且极大, 则

$$\kappa^s(M,\omega,F)=\begin{cases}-\infty, & (K_\omega+[F])\cdot\omega<0 \text{ 或 } (K_\omega+[F])^2<0,\\ 0, & (K_\omega+[F])\cdot\omega=0 \text{ 且 } (K_\omega+[F])^2=0,\\ 1, & (K_\omega+[F])\cdot\omega>0 \text{ 且 } (K_\omega+[F])^2=0,\\ 2, & (K_\omega+[F])\cdot\omega>0 \text{ 且 } (K_\omega+[F])^2>0.\end{cases}$$

(3) 对一般的非空 F, 定义相对 Kodaira 维数为唯一的极小偶对的相对 Kodaira 维数.

若 $F\subset(M;\omega)$ 是不含球面分支的非空极大辛曲面, 则 $\kappa^s(M,\omega,F)$ 的定义是合理的. 从引理 4.1 可知, $\kappa^s(M,\omega,F)$ 具有如下基本性质:

命题 4.3 假设 $F\subset(M;\omega)$ 为不含球面分支的非空极大辛曲面. 那么

(1) 若 $F_1\subset(M,\omega)$ 为不含球面分支的极大辛曲面且 $[F_1]=[F]$, 则 $\kappa^s(M,\omega,F_1)=\kappa^s(M,\omega,F)$.

(2) $\kappa^s(M,\omega,F)\geqslant\kappa^s(M,\omega)$.

(3) $\kappa^s(M,\omega,F)=-\infty$ 当且仅当 M 为亏格 $h\geqslant 1$ 的 S^2- 丛且 F 为一截面.

(4) $\kappa^s(M,\omega,F)=0$ 当且仅当 $\kappa^s(M)=-\infty$ 且 $[F]=-K_\omega$.

尽管引理 4.1 对球面不成立, 但 $\kappa^s(M,\omega,F)$ 依然可以如下拓展到任意嵌入辛曲面 $F\subset(M,\omega)$: 用 F^+ 记从 F 中去掉球面分支后得到的曲面, 并定义 $\kappa^s(M,\omega,F)$ 为 $\kappa^s(M,\omega,F^+)$. 所有结果只需做小修改后在更一般框架下仍成立. 我们注意到上述定义与 Thurston 定义 3- 流形的 Thurston 范数的思想 (2 维球面需要舍弃) 相吻合. 这样处理的一个理由是 2- 球面具有 $\kappa=-\infty$, 从而其行为类似于空集.

从性质 (1) 出发, 也有望进一步将 $\kappa^s(M,\omega,F)$ 拓展到带伪全纯奇点的辛曲面或加权辛曲面的情形. 代数几何中, Iitaka[58] 还对非完备簇引进了 log Kodaira 维数的概念. 循环仿射曲面的 log

Kodaira 维数已经被广泛研究, 因而我们可以借鉴相关结果来开展研究. 实际上, McLean[106] 的结果揭示了仿射曲面的 log Kodaira 维数的辛几何本质. 一个自然的问题是

问题 4.1 对射影偶对, 相对 Kodaira 维数是否等于 Iitaka 的 log Kodaira 维数?

4.3.2 3 维切触 Kodaira 维数

对于带切触边界的辛流形是否可以定义 Kodaira 维数还未可知. 至少对带凹切触边界的辛 4 维流形 $(M;\omega)$, 在文献 [85] 中分成 3 类. 称 $(M;\omega)$ 为单直纹帽, 如果对任何切触 1- 形式 α 都有 $[c_1(M)]\cdot[\omega,\alpha)]>0$. 称 $(M;\omega)$ 为 Calabi-Yau 帽, 如果 $c_1(M)$ 是挠类. 这两类对应于负无穷和零的情形. 余下的对应于正的情形.

因为任何 3 维切触流形可配边一个带凹切触边界的辛 4 维流形, 所以可相应定义 3 维切触 Kodaira 维数. 取值负无穷、零和正. 这个不变量反映了所有辛填充集合的有界性. 维数为负时, 辛填充的 Betti 数是有界的. 维数是零时, 恰当 (exact) 辛填充的 Betti 数是有界的.

4.4 高维辛流形的 Kodaira 维数

李天军和阮勇斌在文献 [86] 中尝试过对高维辛流形定义 Kodaira 维数, 但至今这仍然是一个困难的问题. 本小节简略讨论一些高维辛流形 Kodaira 维数相关的结果. 无论如何定义, 任意维辛 Fano 流形的 Kodaira 维数应为负而辛 Calabi-Yau 流形的 Kodaira 维数应为零. 我们前面提到过 4 维辛 Fano 流形都具有 Kähler 结构. 丘成桐解决的 Calabi 猜想的一个著名推论是第一陈类为挠的 Kähler 流形有 Ricci 平坦的 Kähler 度量, 所以第一 Betti 数以实维数为上界[135]. 注意这个上界对 4 维辛 Calabi-Yau 流形也成立.

Fine 和 Panov 等人对高维辛 Fano 流形和辛 Calabi-Yau 流形做了令人印象深刻的工作. 基于 Reznikov[116] 的工作, Fine 和 Panov[31] 构造了许多 6 维以上的辛 Calabi-Yau 流形其第一 Betti 数大于实维数, 所以它们不可能有 Kähler 结构. 相关的构造给出了 12 维以上的非 Kähler 的辛 Fano 流形. 另一方面, Panov 猜测带 S^1- 作用的 6 维辛 Fano 流形是 Kähler 的并取得了进展[95].

对代数流形的辛双有理性质, 除了前面提到的有理连通方向的工作, McLean 解决了阮勇斌关于 Calabi-Yau 流形的量子上同调同构的猜想[108]. 仿射流形的经典辛结构是 Liouville 区域. 对于 Liouville 区域, McLean[106] 引入了单直纹的概念并以此来研究对数 Kodaira 维数在辛同构下的不变性以及和其紧化后流形的辛双有理性质之间的联系.

5 近复双有理几何

另一个研究辛双有理几何的重要方法是应用在近复几何中的相应结果. 此类方法自然植根于 Gromov[45] 的用伪全纯曲线研究辛几何的开创性工作. 下面我们介绍其中一些方向, 以及它们在辛双有理几何中的应用.

5.1 辛 4 维流形的曲线锥定理

对于代数几何来说, 研究各类锥, 诸如曲线锥、丰沛锥、Kähler 锥及其之间的关系一直是一个

重要的课题. 对于双有理几何来说, Mori 的锥定理是一个非常核心的结果. 并且除去代数曲面, 至今我们还不知道一个不通过特征 p 的证明. 其他关于锥的重要的结果包括 Nakai[113]、Moishezon[111] 和 Kleiman[60] 关于丰沛线丛的刻画, 以及 Demailly 和 Paun[18] 用子簇对于 Kähler 锥的描述.

在文献 [137] 中, 作者之一对于近复 4 维流形的曲线锥和相应的对偶结果进行了研究. 对于一般近复流形 (M,J), 我们定义曲线锥 $A_J(M)=\{\sum a_i[C_i]|a_i>0\}$, 此处 C_i 是不可约的 J- 伪全纯曲线. 当 J 是驯化的, 存在二阶上同调类 $[\omega]\in H^2(M)$ 使得对于任意 $C\in A_J(M)$ 都有 $[\omega]\cdot C>0$. 因此, $A_J(M)$ 不包含从原点穿过的一整条直线. 如果把 $A_J^{K_J\geqslant 0}(M)=\{C\in A_J(M)|K_J\cdot C\geqslant 0\}$ 记为曲线锥的 "正向" 部分, 我们有如下对任意驯化的近复 4 维流形都成立的曲线锥定理.

定理 5.1 (参见文献 [137]) 设 (M,J) 为驯化的近复 4 维流形. 那么有

$$\overline{A}_J(M)=\overline{A}_J^{K_J\geqslant 0}(M)+\sum\mathbb{R}^+[L_i],$$

其中 $L_i\subset M$ 是可数条光滑不可约有理曲线使得 $-3\leqslant K_J\cdot[L_i]<0$ 并张成 $\overline{A}_J(M)$ 的极端射线 $\mathbb{R}^+[L_i]$.

对任意的 J- 殆 Kähler 形式 ω 以及任意给定的 $\epsilon>0$, 只有有限多条极端射线使得 $(K_J+\epsilon[\omega])\cdot[L_i]\leqslant 0$.

一条不可约的曲线 C 是极端有理曲线当且仅当以下其一成立:

1. C 是一条 -1 有理曲线;

2. M 是一个极小直纹曲面或者 $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$, 而 C 是其一个纤维;

3. $M=\mathbb{C}P^2$ 而 C 是其中一条射影直线.

这个结果在伪全纯叶状结构、(等变) 近复双有理几何、Wahl 奇点等诸多方面均有本质的应用.

另一种形式的锥定理是关于曲线锥和殆 Kähler 锥之间的联系. 我们定义殆 Kähler 锥

$$\mathcal{K}_J^c=\{[\omega]\in H^2(M;\mathbb{R})\mid\omega\text{ 和 }J\text{ 相容}\}.$$

李天军和章唯一[92] 证明了当 $b^+(M)=1$ 且 $\mathcal{K}_J^c$ 非空时, $\mathcal{K}_J^c$ 和驯化锥 $\mathcal{K}_J^t=\{[\omega]\in H^2(M;\mathbb{R})\mid\omega\text{ 驯化 }J\}$ 是相等的. 我们引入 $A_J(M)$ 和 $\overline{A}_J(M)$ 在 $H_J^+(M)$ (定义参见文献 [24, 92]) 中的正对偶 $A_J^{\vee,>0}(M)$ 和 $\overline{A}_J^{\vee,>0}(M)$, 以及 $\mathcal{P}_J=A_J^{\vee,>0}(M)\cap\mathcal{P}$. 这里 $\mathcal{P}=\{e\in H^2(M;\mathbb{R})\mid e\cdot e>0\}$.

易见 $\mathcal{K}_J^c\subset\mathcal{P}_J$. 类似于 Nakai 和 Moishezon 以及 Kleiman 关于丰沛线丛的刻画, 我们想知道当 $b^+=1$ 时是否有 $\mathcal{K}_J^c=\mathcal{K}_J^t=\mathcal{P}_J=\overline{A}_J^{\vee,>0}(M)$, 而当 $b^+>1$ 时是否 $\mathcal{K}_J^c$ 是 $\mathcal{P}_J$ 的一个连通分支 (参见文献 [137] 中的问题 1.4).

定理 5.2 (参见文献 [139]) 如果 J 是 $M=S^2\times S^2$ 或 $\mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ $(k\leqslant 9)$ 上的一个殆 Kähler 结构, 那么

$$\mathcal{K}_J^c=\mathcal{K}_J^t=\mathcal{P}_J=\overline{A}_J^{\vee,>0}(M).$$

这个结果在前文提及的关于辛同胚群等方面的研究中有本质的应用.

本节中关于曲线锥定理和 Nakai 和 Moishezon 以及 Kleiman 类型的对偶定理应该并不只限于 4 维. 但显然对于高维情形我们要采用不一样的技术.

5.2 近复流形的相交理论

对于一个辛子流形 $N \subset (M,\omega)$, 我们总可以选取一个 M 上和 ω 相容的近复结构, 使得 N 是一个近复子流形. 而由于近复流形所拥有的正相交性质, 研究近复流形的相交理论会对辛双有理几何带来帮助.

在微分拓扑和代数几何中都有成熟的相交理论. 它们之间的区别主要在两方面. 第一, 在光滑范畴中, 好的相交性要假设子流形处在一般位置. 最常见的叙述是假设 Thom 的横截相交性. 而对于复子流形或子簇来说, 相交理论总是存在. 第二, 复范畴中的相交理论总是有正性. 也就是说, 两个复子簇交于另一个复子簇, 而它们都从复结构中继承了正定向. 但在光滑范畴中, 即使交出了光滑子流形, 它的定向也可以是负的. 就像全纯函数的零点都有正的重数, 而光滑函数的离散零点的重数可以是任何整数.

从以上两点来看, 近复流形的相交理论与复流形更为类似, 虽然这在近复范畴中是极为不平凡的结果. 对于 4 维近复流形中的伪全纯曲线来说, 以上两点是经典的结果. 基于 Gromov[45] 最早的观察, Micallef 和 White[109] 证明了两条不同的且不可约的全纯曲线交于离散的点, 并且每个这样的点都贡献正的相交数. 对一般维数来说, Gromov[45] 更早时候证明了以上叙述对于一条伪全纯曲线和一个紧的余 2 维光滑近复子流形的相交总是成立.

自然地, 我们想知道对于一般维数的近复子流形来说, 以上类似的叙述是否还成立. 首先我们引入一般的 J- 全纯子簇的概念. 定义一个不可约的 J- 全纯子簇为一个从一个紧的连通光滑近复流形射入的某处浸入的伪全纯映射的映像. 而一个 J- 全纯子簇是有限个带正整数重数的不可约 J- 伪全纯子簇的集合. 然后我们和 Gromov 一样假设其中一个参与相交的对象是余 2 维的光滑近复子流形. 这个假设是为了避免在代数几何中就存在的 "盈余相交" 现象. 于是我们有如下结果:

定理 5.3 (参见文献 [138]) 假设 (M^{2n},J) 是一个近复 $2n$ 维流形, Z_2 是其中一个余 2 维的紧连通近复子流形. 设 (M_1,J_1) 是一个紧连通近复 4 维流形, 而 $u: M_1 \to M$ 是一个使得 $u(M_1) \nsubseteq Z_2$ 的伪全纯映射. 那么 $u^{-1}(Z_2)$ 是有限个某处单射的伪全纯曲线的映像的并集.

特别地, 如果 Z_1 和 Z_2 是 (M^{2n},J) 的 4 维和余 2 维的紧连通近复子流形, 那么 $Z_1 \cap Z_2$ 要么是其中一个 Z_i, 要么是某处单射的伪全纯曲线的映像.

以上结果证明的一个重要组成部分是 Taubes 在文献 [128] 中的一个关于伪全纯曲线映像的几何测度论刻画. 如果我们能把其推广到高维, 我们就能得到如下问题的肯定的解答.

问题 5.1 假设 (M^{2n},J) 是一个近复 $2n$ 维流形, Z_1 是其中一个不可约伪全纯子簇, Z_2 是其中一个余 2 维的紧连通近复子流形. 如果 $Z_1 \cap Z_2$ 不是 Z_i 其中之一, 那么它是一个维数是 $\dim_{\mathbb{R}} Z_1 - 2$ 的伪全纯子簇吗?

最后, 我们注意到, 如果我们引入更一般的伪全纯子簇的概念, 定理 5.3 里关于 M_1 和 Z_2 的紧性假设其实并不需要. 同样的结果也可推广到轨形上. 相关的讨论参见文献 [139].

5.3 近复流形间的映射

研究辛双有理态射是辛双有理几何一个重要组成部分. 从 (M,ω_M) 到 (N,ω_N) 的辛双有理态射一个自然的定义是从 (M,J_M) 到 (N,J_N) 的映射度为一的伪全纯映射, 这里 J_M 和 J_N 分别被 ω_M 和

ω_N 驯化. 因此, 研究映射度为 1 的以及一般的伪全纯映射是理解辛双有理态射的重要一步. 由于我们的主要工具是定理 5.3, 如下的讨论将主要集中在 4 维近复流形间的映射.

对研究流形间的光滑映射来说, 奇点集是非常重要的课题. 对流形间的光滑映射 $u : X \to M$, 奇点集 $\mathcal{S}_u$ 是所有使得 $du_p : T_pX \to T_{u(p)}M$ 不满秩的 X 上点 p 的集合. 在光滑范畴中, Sard 定理和 Thom-Boardman 定理是其中两个经典的结果. Sard 定理说奇点集的映像 $u(\mathcal{S}_u)$ 是 M 上的零测集. Thom 和 Boardman 的结果说对于一般的光滑映射来说, 给定退化信息的奇点集是 X 的子流形.

当我们研究伪全纯映射的奇点集时, 我们并不需要做一般性的假设来得到 Thom-Boardman 定理的相应结果, 同时, Sard 定理中的零测集也会有更精确地描述. 比如对于最简单的情形, 也就是当 $X = \Sigma$ 是一个 Riemann 曲面的时候, 我们知道对非平凡的伪全纯曲线 $u : \Sigma \to (M, J)$, $\mathcal{S}_u$ 是孤立点的集合. 应用定理 5.3, 我们在文献 [138] 中得到如下关于闭近复 4 维流形间伪全纯映射的描述. 其中第一个部分对应于 Thom-Boardman 定理, 而第二个部分是 Sard 定理在此情形中更精确的叙述.

定理 5.4 (参见文献 [138]) 设 $u : (X, J) \to (M, J_M)$ 是一个在闭连通近复 4 维流形间某处浸入的伪全纯映射. 那么

• u 的奇点集 $\mathcal{S}_u$ 是某处单射的伪全纯曲线的映像;

• 除了 M 中有限个点外, 其余点的原像都是有限多个点. 而对于这有限个点, 每个点的原像都是伪全纯曲线的映像.

当我们再进一步用定理 5.4 研究在两个闭连通近复 4 维流形间映射度为一的伪全纯映射时, 我们发现这其实是在伪全纯范畴下的双有理态射. 这也进而给出了一个在本节开始时的一个辛双有理态射的定义.

定理 5.5 (参见文献 [138]) 设 $u : (X, J) \to (M, J_M)$ 是一个在两个闭连通近复 4 维流形间映射度为一的伪全纯映射, 同时, J 是殆 Kähler 的. 则存在 M 中的有限点集 M_0 使得如下陈述成立:

1. $u|_{X\setminus u^{-1}(M_0)}$ 是一个微分同胚.

2. 每个 M_0 中点的原像是一个第一类例外曲线.

3. X 微分同胚于 $M\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$. 这里 k 是所有以上例外曲线 $u^{-1}(M_0)$ 的不可约分支的数目.

这里, 一个第一类例外曲线 Θ 指的是一个伪全纯曲线的映像, 它可以嵌入到一个复邻域 (N, J_N), 同时有一个 $\mathbb{C}^2$ 中原点的邻域 N', 以及一个全纯双有理态射 $\pi : (N, J_N) \to (N', J_0)$, 使得 $\pi^{-1}(0) = \Theta$.

上述结果也可以推广到非紧情形和轨形上 (参见文献 [139]). 这个推广对于研究辛双有理态射来说是很重要的. 如若我们能解决问题 5.1, 则定理 5.4 和 5.5 便能推广到更高维.

5.4 近复 4 维流形上的球面类

从 Gromov 的开创性工作开始, 研究被驯化的近复结构的几何一直是研究辛几何的一个重要手段. 在很多辛几何的应用中, 我们需要结果和陈述是对所有 (被驯化的) 近复结构都成立的, 而不仅仅是对一般的近复结构. 在 4 维情形中, 一个球面类指一个上同调类 $e \in H^2(M, \mathbb{Z})$ 使得 $g_J(e) := \frac{1}{2}(e \cdot e + K_J \cdot e) + 1 = 0$ 并且它可以被一个光滑的球面表出. 一个球面类是 Gromov-Witten 意义下稳定的, 如果 $e^2 = -2 - K_J \cdot e \geqslant -1$.

很多关于 4 维近复流形中球面类的结果都可以对所有近复结构陈述, 并且这些结果被本质地用于 4 维和 6 维单直纹流形的研究.

稳定球面类能达到的最小自相交数是 -1. 在这个情形, $e^2 = -K_J \cdot e = -1$, 它们被称为例外曲线类. 自然地, 例外曲线类都能被伪全纯曲线的映像表出. 更进一步地, 综合文献 [140] 和 [15] 的结果, 对一个不微分同胚于 $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 的辛流形, $k \geqslant 1$, 每个例外曲线类都有唯一的伪全纯曲线表示, 并且每个不可约分支都是自相交数为负的光滑有理曲线. 实际上, 这是上一小节提及的一个第一类例外曲线.

若一个球面类有非负的自相交数, 则流形必须是有理的或者直纹的. 在非有理的直纹曲面上仅有的有非负自相交数的球面类是正的纤维类. 我们同样知道过任何一点有唯一的在正纤维类中的子簇, 并且任何一个不可约有理曲线都是正纤维类的一个不可约分支. 该结果被 Lindsay 和 Panov[95] 应用到 6 维的辛双有理几何. 他们证明了有 Hamilton 圆作用的辛 Fano 六维流形是单连通的.

实际上, 当 M 是一个基亏格为 $h \geqslant 1$ 的非有理直纹曲面时, 我们还知道正纤维类的模空间同胚于亏格为 h 的 Riemann 面, 并且在正纤维类中只有有限多个非光滑子簇. 这可以理解为在近复情形中球面类的线性系统的描述. 对于有正自相交数的球面类, 我们也有类似的对其线性系统的描述: 对于有理曲面及其上一个驯化的近复结构, 如果 e 是一个可以被光滑伪全纯球面表出的不可约类, 那么其模空间同胚于 $\mathbb{C}P^l$, 其中 $l = \max\{0, e \cdot e + 1\}$.

5.5 公开问题

第一个问题可以看成是理解辛双有理配边理论的弱分解. 首先我们称一个流形 M 上的两个辛形式 ω_1 和 ω_2 是辛形变等价的如果存在一个辛形式 ω 使得 ω_1 和 ω 被一个辛形式的形变连接, 而与此同时存在一个保定向的微分同胚 f 使得 $f^*\omega = \omega_2$.

问题 5.2 是否存在两个 (单直纹) 辛流形, 它们是辛双有理等价且微分同胚的, 但不是辛形变等价的?

我们也有以下稍弱的版本. 称 ω_1 和 ω_2 是双有理辛等价的, 如果它们之间可以被一系列的辛形变、辛吹胀、辛反向吹胀和保定向微分同胚连接.

问题 5.3 是否存在一个流形上的两个辛形式, 它们是双有理辛等价的, 但不是辛形变等价的?

辛双有理几何中一个重要问题是利用辛几何的灵活性来解释和构造翻越 (flip and flop). 一个有意思的问题是, 我们是否可以在辛范畴中作解析翻越.

问题 5.4 如果一个 (非 Kähler 的) Moishezon 3 维复流形能够沿着一个光滑曲线被吹胀成一个光滑射影簇, 那么我们是否可以辛反向吹胀这个例外除子?

致谢 在本文的写作过程中, 加拿大魁北克大学的 Steven Lu 教授、加拿大多伦多大学的孙锐然博士和审稿人提出了许多宝贵建议, 我们在此表示衷心感谢.

参考文献

1 Akhmedov A, Baldridge S, Baykur I, et al. Simply connected minimal symplectic 4-manifolds with signature less than -1. J Eur Math Soc, 2010, 12: 133–161

2 Akhmedov A, Hughes M, Park D. Geography of simply connected nonspin symplectic 4-manifolds with positive signature. Pacific J Math, 2013, 261: 257–282

3 Akhmedov A, Park D. Exotic smooth structures on small 4-manifolds with odd signatures. Invent Math, 2010, 181: 577–603

4 Araujo A. Rationally connected varieties. In: Snowbird Lectures in Algebraic Geometry. Contemp Math, vol. 388. Providence: Amer Math Soc, 2005, 1–16
5 Arnold V I. Mathematical Methods in Classical Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1987
6 Bauer S. Almost complex 4-manifolds with vanishing first Chern class. J Differential Geom, 2008, 79: 25–32
7 Baykur I, Hayano K. Multisections of Lefschetz fibrations and topology of symplectic 4-manifolds. Geom Topol, 2016, 20: 2335–2395
8 Bertram A, Ciocan-Fontanine I, Fulton W. Quantum multiplication of Schur polynomials. J Algebra, 1999, 219: 728–746
9 Biran P. From symplectic packings to algebraic geometry and back. In: European Congress of Mathematics, vol. II. Progress in Mathematics, vol. 202. Basel: Birkhäuser, 2001, 507–524
10 Bush A S, Kresch A, Tamvakis H. Gromov-Witten invariants on Grassmanians. J Amer Math Soc, 2003, 16: 901–915
11 Campana F. Connexité tationanelle des variétés de Fano. Ann Sci École Norm Sup, 1991, 25: 539–545
12 Cascini P, Panov D. Symplectic generic complex structures on four-manifolds with $b^+ = 1$. J Symplectic Geom, 2012, 10: 493–502
13 Chen B, Du C. On weighted-blowup formulae of genus zero orbifold Gromov-Witten invariants. Compos Math, 2023, 159: 1833–1871
14 Chen B, Du C, Hu J. Weighted-blowup correspondence of orbifold Gromov-Witten invariants and applications. Math Ann, 2019, 374: 1459–1523
15 Chen H, Zhang W. Kodaira dimensions of almost complex manifolds II. arXiv:2004.12825, 2020
16 Chen W, Li T-J, Wu W. Symplectic Cremona map. In preparation, 2024
17 Debarre O. Higher-dimensional Algebraic Geometry. Universitext. New York: Springer-Verlag, 2001
18 Demailly J, Paun M. Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold. Ann of Math (2), 2004, 159: 1247–1274
19 Donaldson S. Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. J Differential Geom, 1996, 44: 666–705
20 Donaldson S. Lefschetz pencils on symplectic manifolds. J Differential Geom, 1999, 53: 205–236
21 Donaldson S. Some problems in differential geometry and topology. Nonlinearity, 2008, 21: 157–164
22 Dorfmeister J G, Li T-J, Wu W. Stability and existence of surfaces in symplectic 4-manifolds with $b^+ = 1$. J Reine Angew Math, 2018, 742: 115–155
23 Dorfmeister J G, Zhang W. The Kodaira dimension of Lefschetz fibrations. Asian J Math, 2009, 13: 341–357
24 Draghici T, Li T-J, Zhang W. Symplectic forms and cohomology decomposition of almost complex 4-manifolds. Int Math Res Not IMRN, 2010, 2010: 1–17
25 Eliashberg Y. A theorem on the structure of wave fronts and its applications in symplectic topology. Funkt Anal Prilozhen, 1987, 21: 65–72
26 Eliashberg Y, Givental A, Hofer H. Introduction to symplectic field theory. Geom Funct Anal, 2000, 560–673
27 Etnyre J, Honda K. On symplectic cobordisms. Math Ann, 2002, 323: 31–39
28 Evans J. Symplectic mapping class groups of some Stein and rational surfaces. J Symplectic Geom, 2011, 9: 45–82
29 Feehan P, Leness T. The SO(3) monopole cobordism and superconformal simple type. Adv Math, 2019, 356: 106817
30 Fine J, Panov D. Symplectic Calabi-Yau manifolds, minimal surfaces and the hyperbolic geometry of the conifold. J Differential Geom, 2009, 82: 155–205
31 Fine J, Panov D. The diversity of symplectic Calabi-Yau 6-manifolds. J Topol, 2013, 6: 644–658
32 Fintushel R, Stern R. The canonical class of a symplectic 4-manifold. Turkish J Math, 2001, 25: 137–145
33 Floer A. An instanton invariant for 3-manifolds. Comm Math Phys, 1988, 118: 215–240
34 Floer A. The unregularized gradient flow of the symplectic action. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 775–813
35 Floer A. Symplectic fixed points and holomorphic spheres. Comm Math Phys, 1989, 120: 575–611
36 Friedl S, Vidussi S. On the topology of symplectic Calabi-Yau 4-manifolds. J Topol, 2013, 6: 945–954
37 Friedman R, Morgan J. Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants. J Algebraic Geom, 1997, 6: 445–479
38 Friedman R, Qin Z. The smooth invariance of the Kodaira dimension of a complex surface. Math Res Lett, 1994, 1: 369–376
39 Fukaya K, Ono K. Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants. Topology, 1999, 38: 933–1048
40 Furuta M. Monopole equation and the 11/8 conjecture. Math Res Lett, 2001, 8: 279–291
41 Gompf R. A new construction of symplectic manifolds. Ann of Math (2), 1995, 142: 527–595
42 Graber T. Enumerative geometry of hyperelliptic plane curves. J Algebraic Geom, 2001, 10: 725–755
43 Graber T, Pandharipande R. Localization of virtual classes. Invent Math, 1999, 135: 487 – -518
44 Gromov M. Stable mappings of foliations into manifolds. Math USSR-I, 1969, 33: 671–694
45 Gromov M. Psudo holomorphic curves in symplectic manifolds. Invent Math, 1985, 82: 307–347
46 Gromov M. Partial Differential Relations. Berlin: Springer-Verlag, 1986
47 Gromov M. Soft and hard symplectic geometry. In: Proceedings of the ICM at Berkey 1986, vol. 1. Providence: Amer Math Soc, 1987, 81–98

48 Guillemin V, Ginzburg V, Karshon Y. Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions. Providence: Amer Math Soc, 2002
49 Guillemin V, Sternberg S. Birational equivalence in the symplectic category. Invent Math, 1989, 97: 485- – 522
50 Hambleton I, Kreck M. Cancellation, elliptic surfaces and the topology of certain four-manifolds. J Reine Angew Math, 1993, 444: 79–100
51 Hamenstadt U. Signature of surface bundles and bounded cohomology. arXiv:2011.05792, 2020
52 Hu J. Gromov-Witten invariants of blow-ups along points and curves. Math Z, 2000, 233: 709–739
53 Hu J. Gromov-Witten invariants of blow-ups along surfaces. Compos Math, 2001, 125: 345–352
54 Hu J. Gromov-Witten invariants and rationally connectedness. In: Proceedings of the Centre For Mathematics and its Applications, vol. 48. Canberra: Australian National University, 2019, 74–96
55 Hu J, Li T-J, Ruan Y. Birational cobordism invariance of uniruled symplectic manifolds. Invent Math, 2008, 172: 231–275
56 Hu J, Qin Z. On the numerical rational connectedness of the Hilbert schemes of 2-points on rational surfaces. Manuscripta Math, 2020, 162: 191–212
57 Iitaka S. On D-dimensions of algebraic varieties. J Math Soc Japan, 1971, 23: 356–373
58 Iitaka S. Algebraic Geometry. An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties. Graduate Texts in Mathematics, vol. 76. North-Holland Mathematical Library, vol. 24. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1982
59 Kawamata Y, Matsuda K, Matsuki K. Introduction to the minimal model program. In: Algebraic Geometry. Adv Stud Pure Math, vol. 10. Amsterdam: Kinokuniya/North-Holland, 1987, 283–360
60 Kleiman S. Toward a numerical theory of ampleness. Ann of Math (2), 1966, 84: 293–344
61 Kodaira K. Kunihiko Kodaira: Collected Works, vol. III. Tokyo-Princeton: Princeton Univ Press, 1975
62 Kollár J. Rational Curves on Algebraic Varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996
63 Kollár J. Low degree polynomial equations: Arithmetic geometry, topology. In: Proceedings of the Eurpoean Congress of Mathematics, vol. I. Progress in Mathematics, vol. 168. Basel: Birkhäuser, 1998, 255–288
64 Kollár J, Miyaoka Y, Mori S. Rationally connected varieties. J Algebraic Geom, 1992, 1: 429–448
65 Kollár J, Miyaoka Y, Mori S. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. J Differential Geom, 1992, 36: 765–779
66 Kontsevich M. Enumeration of rational curves via torus actions. In: Dijkgraaf R, Faber C, van der Geer G, eds. The Moduli Space of Curves. Progress in Mathematics, vol. 129. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1995, 335–368
67 Kontsevich M, Manin Yu. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. Commun Math Phys, 1994, 164: 525–562
68 Lai H. Gromov-Witten invariants of blowups along submanifolds with convex normal bundles. Geom Topol, 2009, 13: 1–48
69 Lalonde F, McDuff D. The classification of ruled symplectic 4-manifolds. Math Res Lett, 1996, 3: 769–778
70 Lalonde F, McDuff D. J-curves and the classification of rational and ruled symplectic 4-manifolds. In: Contact and Symplectic Geometry. Publ Newton Inst, vol. 8. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1996, 3–42
71 LeBrun C. On the Notion of general type. Rend Mat Appl, 1997, 17: 513–522
72 Lerman E. Symplectic cuts. Math Res Lett, 1995, 2: 247–258
73 Li A-M, Ruan Y. Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds. Invent Math, 2001, 145: 151–218
74 Li J. Relative Gromov-Witten invariants and a degeneration formula of Gromov-Witten invariants. J Differential Geom, 2002, 60: 199–293
75 Li J, Li T-J, Wu W. Symplectic Torelli groups of rational surfaces. arXiv:2212.01873, 2022
76 Li T-J. Smoothly embedded spheres in symplectic 4-manifolds. Proc Amer Math Soc, 1999, 127: 609–613
77 Li T-J. Existence of embedded symplectic surfaces. In: Geometry and Topology of Manifolds. Fields Inst Commun, vol. 47. Providence: Amer Math Soc, 2005, 203–217
78 Li T-J. Quaternionic bundles and Betti numbers of symplectic 4-manifolds with Kodaira dimension zero. Int Math Res Not IMRN, 2006, 2006: 37385
79 Li T-J. Symplectic 4-manifolds with Kodaira dimension zero. J Differential Geom, 2006, 74: 321–352
80 Li T-J. The Kodaira dimension of symplectic 4-manifolds. In: Floer Homology, Gauge Theory, and Low-Dimensional Topology. Clay Mathematical Proceedings, vol. 5. Providence: Amer Math Soc, 2006, 249–261
81 Li T-J. The space of symplectic structures on closed 4-manifolds. In: Proceedings of the Third International Congress of Chinese Mathematicians. Parts 1 and 2. AMS/IP Stud Adv Math, vol. 42. Providence: Amer Math Soc, 2008, 259–277
82 Li T-J, Liu A. Symplectic structures on ruled surfaces and a generalized adjunction inequality. Math Res Lett, 1995, 2: 453–471
83 Li T-J, Liu A. General wall crossing formula. Math Res Lett, 1995, 2: 797–810
84 Li T-J, Liu A. Uniqueness of symplectic canonical class, surface cone and symplectic cone of 4-manifolds with

$b^+ = 1$. J Differential Geom, 2001, 58: 331–370
85 Li T-J, Mak C Y. Uniruled caps and Calabi-Yau caps. arXiv:1412.3208, 2014
86 Li T-J, Ruan Y. Symplectic birational geometry. In: CRM Proc Lecture Notes, vol. 49. Providence: Amer Math Soc, 2009, 307–326
87 Li T-J, Ruan Y. Uniruled symplectic divisors. Commun Math Stat, 2013, 1: 163–212
88 Li T-Y, Ruan Y, Zhang W. Symplectic blowing down in dimension six. Acta Math Sin (Engl Ser), 2022, 38: 1831–1855
89 Li T-J, Usher M. Symplecitc forms and surfaces of negative square. J Symplectic Geom, 2006, 4: 71–91
90 Li T-J, Wu W. Lagrangian spheres, symplectic surfaces and the symplectic mapping class group. Geom Topol, 2012, 16: 1121–1169
91 Li T-J, Yau S T. Embedded surfaces and Kodaira dimension. In: ICCM2007 Proceedings, vol. 2. Adv Lect Math (ALM), vol. 14. Somerville: Int Press, 2006, 398–407
92 Li T-J, Zhang W. Comparing tamed and compatible symplectic cones and cohomological properties of almost complex manifolds. Comm Anal Geom, 2009, 17: 651–683
93 Li T-J, Zhang W. Additivity and relative Kodaira dimensions. In: Geometry and Analysis, no. 2. Adv Lect Math (ALM), vol. 18. Somerville: Int Press, 2011, 103–135
94 Lian B, Liu K, Yau S T. Mirror principle I. Asian J Math, 1997, 1: 729–763
95 Lindsay N, Panov D. S^1-invariant symplectic hypersurfaces in dimension 6 and the Fano condition. J Topol, 2019, 12: 221–285
96 Liu A. Some new applications of the general wall crossing formula. Math Res Lett, 1996, 3: 569–585
97 Liu G, Tian G. Floer homology and Arnold conjecture. J Differential Geom, 1998, 49: 1–74
98 Lu G. Symplectic capacities of toric manifolds and related results. Nagoya Math J, 2006, 156: 1–63
99 Marino M, Moore G, Peradze G. Four-manifold geography and superconformal symmetry. Math Res Lett, 1999, 6: 429–437
100 McDuff D. The structure of rational and ruled symplectic 4-manifold. J Amer Math Soc, 1990, 1: 679–710
101 McDuff D. Blowing up and symplectic embeddings in dimension 4. Topology, 1991, 30: 409–421
102 McDuff D. Hamiltonian S^1-manifolds are uniruled. Duke Math J, 2009, 146: 449–507
103 McDuff D, Salamon D. A survey of symplectic 4-manifolds with $b_+ = 1$. Turkish J Math, 1996, 20: 47–60
104 McDuff D, Salamon D. J-holomorphic Curves and Symplectic Topology, 2nd ed. Colloquium Publications, vol. 52. Providence: Amer Math Soc, 2012
105 McDuff D, Salamon D. Introduction to Symplectic Topology, 3rd ed. Oxford: Oxford Univ Press, 2017
106 McLean M. Symplectic invariance of uniruled affine varieties and log Kodaira dimension. Duke Math J, 2014, 163: 1929–1964
107 McLean M. Private communication, 2014
108 McLean M. Birational Calabi-Yau manifolds have the same small quantum products. Ann of Math (2), 2020, 191: 439–579
109 Micallef M, White B. The structure of branch points in minimal surfaces and in pseudoholomorphic curves. Ann of Math (2), 1995, 141: 35–85
110 Miyaoka Y. On the Chern numbers of surfaces of general type. Invent Math, 1977, 42: 225–237
111 Moishezon B. A projectivity criterion of complete algebraic abstract varieties (in Russian). Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1964, 28: 179–224
112 Morgan J, Szabo Z, Homotopy K3 surfaces and Mod 2 Seiberg-Witten invariants. Math Res Lett, 1997, 4: 17–21
113 Nakai Y. A criterion of an ample sheaf on a projective scheme. Amer J Math, 1963, 85: 14–26
114 Ohta H, Ono K. Notes on symplectic 4-manifolds with $b_2^+ = 1$, II. Internat J Math, 1996, 7: 755–770
115 Pontoni D. Quantum cohomology of $\mathrm{Hilb}^2(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)$ and enumerative applications. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 5419–5448
116 Reznikov A G. Symplectic twistor spaces. Ann Global Anal Geom, 1993, 11: 109–118
117 Ruan Y. Symplectic topology and extremal rays. Geom Funct Anal, 1993, 3: 395–430
118 Ruan Y. Symplectic topology on algebraic 3-folds. J Differential Geom, 1994, 39: 215–227
119 Ruan Y. Topological sigma model and Donaldson type invariants in Gromov theory. Duke Math J, 1996, 83: 461–500
120 Ruan Y. Virtual neighborhoods and pseudoholomorphic curves. Turkish J Math, 1999, 23: 161–231
121 Ruan Y, Tian G. A mathematical theory of quantum cohomology. J Differential Geom, 1995, 42: 259–367
122 Ruan Y, Tian G. Higher genus symplectic invariants and sigma model coupled with gravity. Invent Math, 1997, 130: 455–516
123 Salamon D. Uniqueness of symplectic structures. Acta Math Viet, 2013, 38: 123–144
124 Seidel P. Lectures on four-dimensional Dehn twists. In: Catanese F, Tian G, eds. Symplectic 4-Manifolds and Algebraic Surfaces. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1938. Berlin: Springer, 2008, 231–267
125 Stipsicz A. Simply connected 4-manifolds near the Bogomolov-Miyaoka-Yau line. Math Res Lett, 1998, 5: 723–730

126 Tan Q, Wang H, Zhou J, et al. On tamed almost complex four manifolds. Peking Math J, 2022, 5: 37–152
127 Taubes C H. The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms. Math Res Lett, 1994, 1: 809–822
128 Taubes C H. SW ⇒ Gr: From the Seiberg-Witten equations to pseudoholomorphic curves. J Amer Math Soc, 1996 9: 845–918
129 Taubes C H. Counting pseudoholomorphic submanifolds in dimension 4. J Differential Geom, 1996, 44: 818–893
130 Tian Z. Symplectic geometry and rationally connected threefolds. Duke Math J, 2012, 161: 803–843
131 Tian Z. Symplectic geometry and rationally connected 4-folds. J Reine Angew Math, 2015, 698: 221–244
132 Ueno K. Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Notes Written in Collaboration with P. Cherenack. Lecture Notes in Mathematics, vol. 439. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1975
133 Voisin C. Rationally connected 3-folds and symplectic geometry. Astérique, 2008, 322: 1–21
134 Witten E. Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space. Surv Differ Geom, 1991, 1: 243–310
135 Yau S T. Calabi conjecture and some new results in algebraic geometry. Proc Nat Acad Sci USA, 1977, 74: 1789–1799
136 Zhang W. Geometric structures, Gromov norm and Kodaira dimensions. Adv Math, 2017, 308: 1–35
137 Zhang W. The curve cone of almost complex 4-manifolds. Proc Lond Math Soc (3), 2017, 115: 1227–1275
138 Zhang W. Intersection of almost complex submanifolds. Camb J Math, 2018, 6: 451–496
139 Zhang W. From smooth to almost complex. Proceeding of 8th International Congress of Chinese Mathematicians, 2019. arXiv:2010.03858, 2020
140 Zhang W. Moduli space of J-holomorphic subvarieties. Selecta Math (NS), 2021, 27: 29

Some research progress on symplectic birational geometry

Jianxun Hu, Tian-Jun Li, Yongbin Ruan & Weiyi Zhang

Abstract In the 1980s, the Japanese mathematician Mori established his minimal model program. The point of the program is to classify algebraic varieties into two classes: uniruled and non-uniruled varieties. For the uniruled varieties, one tries to understand the structure of fibrations with Fano fibers, and for the non-uniruled varieties, one hopes to find their minimal models. Symplectic birational geometry is a field to study the classification of symplectic manifolds under symplectic birational equivalence, and to extend Mori's minimal model program to symplectic category. In this paper, we survey some recent progress on symplectic birational geometry, including birational cobordism, uniruled and rationally connected symplectic manifolds, Kodaira dimension of symplectic 4-manifolds, and birational geometry of almost complex manifolds.

Keywords **birational cobordism, uniruled symplectic manifold, rationally connected manifold, Gromov-Witten invariant, Kodaira dimension, almost complex manifold**

MSC(2020) 53D45, 14N35, 53D35

doi: 10.1360/SSM-2024-0116