奇可标号图类最优界定函数的相关研究

献给越民义教授 100 华诞

吴蓉, 许宝刚*

南京师范大学数学科学学院, 南京 210023

E-mail: 547215393@qq.com, baogxu@njnu.edu.cn

收稿日期: 2020-02-13; 接受日期: 2020-04-27; 网络出版日期: 2020-09-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11931006) 资助项目

摘要 令 $\mathcal{G}$ 表示一类图. 如果存在一个函数 f 使得对于任意的 $G \in \mathcal{G}$ 都有 $\chi(G) \leq f(\omega(G))$, 那么称 $\mathcal{G}$ 是 χ - 界图类, 且称 f 是 $\mathcal{G}$ 的一个界定 (binding) 函数. 本文研究奇可标号图类最优界定函数相关问题, 证明一类无 4- 洞奇可标号图有线性界定函数.

关键词 偶洞 色数 团数

MSC (2010) 主题分类 05C15, 05C75

1 引言

本文中所研究的图都是有限且无重边和无环的简单图, 未定义的概念与符号参见文献 [1].

设 k 是一个正整数, 令 $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$. 图 G 的一个 k - 染色 f 是从图的顶点集 $V(G)$ 到 $[k]$ 的一个映射, 使得任给 $uv \in E(G)$ 均有 $f(u) \neq f(v)$. 用 $\chi(G)$ 表示图 G 的色数, 是使得 G 有 k - 染色的最小的正整数 k . 图 G 的团数 $\omega(G)$ 是 G 所含的最大完全子图的顶点数. 显然, $\chi(G) \geq \omega(G)$. Erdős^[2] 证明了对于任意给定的两个正整数 k 和 l , 存在一个色数大于 k 且围长大于 l 的图. 关于图色数的研究一直备受关注 (如文献 [3–8]).

强完美图定理^[9] 证明了, 如果 G 不包含长度至少为 5 的奇圈及其补图作为诱导子图, 那么对于 G 的任一子图 H 均有 $\chi(H) = \omega(H)$. Vizing 定理说明对于每一个线图 G , 均有 $\chi(G) \leq \omega(G) + 1$. 这些结果意味着通过禁用某些子图, 图的色数可以被一个关于图团数的函数所界定. 1987 年, Gyárfás^[10] 提出了 χ - 有界图类的概念. 设 $\mathcal{G}$ 是一类图, 如果存在一个函数 f 使得对于任意的 $G \in \mathcal{G}$ 均有 $\chi(G) \leq f(\omega(G))$, 则称 $\mathcal{G}$ 是 χ - 有界图类, 且称 f 是 $\mathcal{G}$ 的一个界定函数. 其中一个重要问题是, 研究什么图类是 χ - 有界的, 同时对 χ - 有界图类找其最优的界定函数. 因为团数是色数的平凡下界, 如果某个 χ - 有界图类存在线性界定函数, 从渐近角度上讲, 线性函数就一定是这一图类的最优界定函数.

英文引用格式: Wu R, Xu B G. A result on the optimal binding function of odd signable graphs (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1337–1360, doi: 10.1360/SSM-2020-0036

下面给出文中常用的一些记号. 给定图 H , 若图 G 不含 H 作为诱导子图, 则称 G 是无 H 图的. 给定一个有限的图集 $\mathcal{F}$, 用无 $\mathcal{F}$ 图表示不包含 $\mathcal{F}$ 中的任何一个图作为诱导子图的图类.

设 x 和 y 是图 G 的两个顶点, 用 xy -路表示 G 中连接 x 和 y 的一条诱导路. 设 P 是一条路, 用 P^* 表示 P 的内点集合. 本文中所说的路都指的是诱导路.

设 $k \geq 4$ 是一个正整数, 称一个图 G 中长度为 k 的诱导圈为该图的一个 k -洞, 称长为偶数的洞为偶洞, 长为奇数的洞为奇洞.

用轮表示由一个洞 H 和一个在 H 上至少有 3 个邻点的顶点 x 组成的图, 称 x 为这个轮的中心. 设 W 是一个以 x 为中心的轮, 如果 x 有偶数个邻点, 则称 W 为偶轮; 如果 W 中有奇数个三角形, 则称 W 为奇轮.

一个图 $\text{theta } 3PC(x, y)(P_1, P_2, P_3)$ 包含两个不相邻的顶点 x 和 y , 以及 3 条 xy -路 P_1, P_2 和 P_3 使得任意两条路形成一个洞. 一个锥 $3PC(u, xyz)(P_1, P_2, P_3)$ 包含一个顶点 u 、一个三角形 xyz 以及 3 条路: ux -路、 uy -路和 uz -路, 其中任意两条路形成一个洞. 给定锥 $3PC(u, xyz)(P_1, P_2, P_3)$, 称三角形 xyz 为锥底, 且称 u 为锥尖. 通常将 theta 和锥分别简记为 $3PC(\cdot, \cdot)$ 和 $3PC(\cdot, \Delta)$.

一个棱柱 $3PC(a_1a_2a_3, b_1b_2b_3)(P_1, P_2, P_3)$ 是由 3 条非零长的路 P_1, P_2 和 P_3 组成, 使得 P_i 恰为 a_ib_i -路 ($1 \leq i \leq 3$), P_1, P_2 和 P_3 互不相交, 而且对 $1 \leq i < j \leq 3$, a_ia_j 和 b_ib_j 是 P_i 和 P_j 间仅有的边.

给定图 G , 如果存在映射 $\phi: E(G) \rightarrow \{0, 1\}$, 使得对任一个洞或三角形 H 都有 $\sum_{e \in E(H)} \phi(e)$ 是奇数, 则称 G 是奇可标号图. 显然, 通过给每条边赋权 1, 易看出每一个无偶洞图都是奇可标号图. Conforti 等^[11] 对奇可标号图给出了一个非常漂亮的刻画.

定理 1.1^[11] 一个图是奇可标号的当且仅当它不含偶轮、 theta 和棱柱中任一个作为诱导子图.

设 u 是图 G 的一个顶点, 如果 u 的邻集恰是两个团的并, 则称 u 是 G 的一个双单纯点. 设 S 是 G 的一个顶点子集. 用 $N_S(u)$ 表示 u 在 S 中邻点的集合, 用 $N(S)$ 表示由 S 本身及它们的邻点组成的顶点集合. 如果 $u \notin S$ 且 $N_S(u) = S$, 则称 u 全联于 S . 如果 $u \notin S$ 且 $N_S(u) = \emptyset$, 则称 u 独立于 S . 如果 $N(S) = V(G)$, 则称 S 是 G 的一个控制集.

对顶点子集 S 和 T , 如果 S 中每一个点都全联于 (独立于) T , 则称 S 全联于 (独立于) T . 设 H 是一个诱导子图, 如果 $V(H)$ 是一个控制集, 也称 H 是控制子图. 在不致引起混淆的情形下, 简记 $V(H)$ 为 H .

如果 S 是 G 的一个割集且 $G[S]$ 是一个星图, 则称 S 是一个星割集. 如果 G 的一个星割集 S 是由一个顶点及其全部邻点组成, 则称 S 是一个满星割.

关于无偶洞图, Addario-Berry 等^[12] 证明了如下定理:

定理 1.2^[12] 设 G 是一个无偶洞图, 则下面两个结论成立:

- (1) 如果 H 是一个非控制洞, 则 $V(G) \setminus N(H)$ 中有 G 的一个双单纯点;
- (2) 如果 K 是一个非控制团且 $|K| \leq 2$, 则 $V(G) \setminus N(K)$ 中有 G 的一个双单纯点.

作为定理 1.2(2) 的推论, 由归纳法易证, 如果 G 不含偶洞, 则其任一导出子图的最小度都不超过 $2(\omega(G) - 1)$. 简单地运用贪心算法, 就可以给出 G 的一个至多用 $2\omega(G) - 1$ 种颜色的正常染色, 即 $\chi(G) \leq 2\omega(G) - 1$. 但 Addario-Berry 等^[12] 对定理 1.2(1) 的证明中有一点瑕疵, 且定理 1.2(2) 的证明是以定理 1.2(1) 为基础. 最近, Chudnovsky 和 Seymour^[13] 重新证明了定理 1.2(2).

定理 1.3^[13] 设 K 是无偶洞图 G 的一个非控制团且 $|K| \leq 2$, 则 $V(G) \setminus N(K)$ 中有 G 的双单纯点.

Chudnovsky 和 Seymour^[13] 相信定理 1.2(1) 应该还是正确的. Addario-Berry 等^[12] 给出了立方体例子说明定理 1.2 在奇可标号图类上是不成立的. 注意到立方体中有很多 4-洞, 我们认为在无 4-洞奇可标号图类上也应该有类似于定理 1.2 的结论.

设 $H = h_1 h_2 \cdots h_k h_1$ 是 G 的一个洞, c_1 和 c_2 是 $G - H$ 中两个相邻顶点且 $N_H(c_1) = N_H(c_2) = \{h_1, h_2\}$. 假设对某个 $i \in \{2, 3, \dots, k-1\}$, 存在长为 2 的 $c_1 h_i$ -路 P_1 和长为 2 的 $c_2 h_{i+1}$ -路 P_2 使得 P_1^* 和 P_2^* 独立于 H 且 $c_1 P_1 h_i h_{i+1} P_2 c_2$ 是一个 6-洞. 把诱导子图 $G[V(H) \cup V(P_1) \cup V(P_2)]$ 记为构形 $\mathcal{A}$.

本文研究 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图类 (显然, 这一图类包含无偶洞图), 证明了如下结论.

定理 1.4 设 G 是一个 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图, K 是一个非控制团且 $|K| \leq 2$. 假设 G 不含非控制洞, 则 $V(G) \setminus N(K)$ 中有 G 的双单纯点.

作为其推论, 对任一个 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图 G , 若 G 有 n 个顶点且没有非控制洞, 则 G 的顶点可以排列成 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 使得 v_i 是 $G[\{v_1, v_2, \dots, v_i\}]$ 的双单纯点, 故它在 $G[\{v_1, v_2, \dots, v_i\}]$ 中的度数不超过 $2(\omega(G) - 1)$, 从而有 $\chi(G) \leq 2\omega(G) - 1$. 换句话说讲, 没有非控制洞的 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图类具有线性界定函数, 而从渐近角度上, 线性函数是 χ -有界图类的最优界定函数.

为证明定理 1.4, 还需要以下概念与定理. 设 H 是图 G 的一个洞, v 是 $G - H$ 的一个顶点.

- 如果 $|N_H(v)| = 1$, 则称 v 是在 $N_H(v)$ 的一个叶点;
- 如果 $N_H(v)$ 由两个相邻顶点 n_1 和 n_2 组成, 则称 v 是边 $n_1 n_2$ 的一个冠点;
- 如果 $N_H(v)$ 组成 H 中一条 2 长路 $n_1 n_2 n_3$, 则称 v 是在 n_2 的一个克隆点;
- 如果 $N_H(v)$ 恰有 3 个顶点且其中恰有两个相邻, 则称 v 是一个锥点;
- 如果 $N_H(v)$ 有一 3 个点的独立集, 或 $|H| = 5$ 且 v 全联于 H , 则称 v 是一个大型点.

Addario-Berry 等^[12] 对无偶洞图证明了几个结构性定理, 运用完全同样的方法, 可以证明在 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图上也有同样的结论. 这里只列出结果, 有兴趣的读者可以参见文献 [12] 中相应结论的证明过程.

定理 1.5 定理 1.4 的点数最少的反例 G 有一个 2 阶非控制团 K 使得 $V(G) \setminus N(K)$ 不含 G 的双单纯点.

定理 1.6 设 G 是定理 1.4 的顶点数最少的反例, K 是 G 的一个至多含两个点的非控制团且 $V(G) \setminus N(K)$ 不含 G 的双单纯点, C 是 G 的一个星割集且设 c 是 C 的中心. 如果 $V(G) \setminus C$ 的某一支与 K 无交且独立于 c , 则 $K \subseteq C \setminus \{c\}$.

定理 1.7 定理 1.4 的顶点数最少的反例一定不含满星割.

设 S 是 G 的一个割集. 如果 $G[S]$ 是一个树且恰有两个度数大于 2 的顶点, 则称 S 是一个双星割集.

定理 1.8 设 G 是定理 1.4 的顶点数最少的反例, K 是 G 的一个至多含两个点的非控制团且 $V(G) \setminus N(K)$ 不含 G 的双单纯点, C 是 G 的一个以 uv 为中心边的双星割集, $w \in N(u) \cup N(v)$, 则 K 和 w 一定包含在 $G - C$ 的同一个分支中.

定理 1.9 设 G 是定理 1.4 的顶点数最少的反例, $K = \{x, y\}$ 是 G 的一个非控制团且 $G - N(K)$ 不含 G 的双单纯点. 对 G 的任一个洞 H , 如果 $x \in H$ 但 $y \notin H$, 则 $G - (N(H) \setminus \{y\})$ 是连通的.

设 H 是一个洞, w 是 H 的一个大型点但不全联于 H , 则把 H 中每一段极大的独立于 w 的路称为一个 w -间隔.

定理 1.10 设 G 是一个 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图, H 是 G 中的洞, w 是 H 的一个大型点且 w 不全联于 H , 则 G 有一个以 w 为中心的星割集. 更进一步, 设 C 是以 x 和 y 为端点的一

个 w - 间隔, $A \subseteq N_H(w)$ 是所有点 h 的集合使得 $H - x$ 中的 yh - 路含有 w 的偶数个邻点, 且设 $B = V(H) \setminus (V(C) \cup N(w))$, $N' = N(w) \setminus A$, 则 $V(G) \setminus (N' \cup \{w\})$ 可以划分为两个子集 V_1 和 V_2 , 使得 V_1 独立于 V_2 , $V(C) \subseteq V_1$ 且 $A \cup B \subseteq V_2$.

定理 1.4 的证明将在下面第 2 节中采用反证法完成. 整个证明被分为 42 个小部分, 利用禁用子图性质逐步解析极小反例图的结构, 最终导出矛盾从而证明反例不存在.

2 定理 1.4 的证明

假设定理 1.4 不成立, 取图 G 为其顶点数最少的反例, 即 G 是一个 (4- 洞, $\mathcal{A}$)- 无奇可标号图且定理 1.4 对所有顶点数小于 G 的这类图都成立. 设 K 是 G 的一个非控制团, $|K| < 3$ 但 $V(G) \setminus N(K)$ 不含 G 的双单纯点. 根据定理 1.5, 不妨设 $K = \{x, y\}$.

设 $C = N(x) \cap N(y)$, 则 $V(G)$ 被划分成为互不相交的 5 个子集: $N(x) \setminus N(y)$ 、 $N(y) \setminus N(x)$ 、 $V(G) \setminus N(K)$ 、 C 和 $\{x, y\}$.

如果 $N(x) \setminus N(y) = \emptyset$, 设 $G' = G - x$, 则 y 是 G' 的非控制团, 从 $|V(G)|$ 的最小性可知存在顶点 $v \in V(G') \setminus N(y)$ 是 G' 的双单纯点. 因为 $N(x) \setminus N(y) = \emptyset$, $vx \notin E(G)$, 所以, $v \in V(G) \setminus N(K)$ 是 G 的双单纯点, 矛盾. 根据对称性, 下式成立:

$$N(x) \setminus N(y) \neq \emptyset \quad \text{且} \quad N(y) \setminus N(x) \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

为方便叙述, 下面的过程被分成 (Ω_1) 到 (Ω_{42}) 多个小部分.

(Ω_1) $V(G) \setminus N(K)$ 是连通的, $N(K) \setminus K$ 中每个点在 $V(G) \setminus N(K)$ 中都有邻点, 且有一个洞 H 经过 xy .

证明 如果 $G - N(K)$ 不连通, 令 X 为 $G - N(K)$ 的一个分支. 如果 $G - N(K)$ 连通且存在顶点 $v \in N(K) \setminus K$ 独立于 $V(G) \setminus N(K)$, 则令 $X = \{v\}$. 在这两种情形下, $V(G) \neq (X \cup N(K))$, 因此, K 是 $G' = G - X$ 的非控制团. 鉴于 $V(G') \setminus N(K) \subseteq V(G) \setminus N(K)$, $|V(G)|$ 的最小性蕴涵 $V(G') \setminus N(K)$ 中有一个顶点, 设为 w , 它是 G' 的双单纯点. 显然, $N_G(w) = N_{G'}(w)$. 从而, w 是 G 的双单纯点. 这一矛盾说明 $G - N(K)$ 连通且 $N(K) \setminus K$ 中每个点在 $V(G) \setminus N(K)$ 中都有邻点. 再由 (2.1) 知, 必有一个洞经过 xy . $\square$

(Ω_2) 设 H 是经过 xy 的一个洞, H 的大型点若在 C 中则一定全联于 H .

证明 设 $w \in C$ 是 H 的一个大型点且不全联于 H . 由定理 1.10 知, 存在 $N' \subseteq N(w)$ 使得 $N' \cup \{w\}$ 是 G 的星割集, $\{x, y\} \not\subseteq N'$, 而且 $G - (N' \cup \{w\})$ 的某个分支与 $\{x, y\}$ 无交且不全联于 w , 与定理 1.6 矛盾. $\square$

(Ω_3) C 的每个点独立于 $N(x) \setminus N(y)$ 或独立于 $N(y) \setminus N(x)$.

证明 设 $A = N(x) \setminus N(y)$, $B = N(y) \setminus N(x)$, $D = V(G) \setminus N(K)$. 假设 $c \in C$ 在 A 和 B 中都有邻点. 令 $A' = N_A(c)$, $A'' = A \setminus A'$, 同样定义 B' 、 B'' 、 D' 和 D'' . 首先证明

$$A'' \neq \emptyset \quad \text{且} \quad B'' \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

否则, 设 $A'' = \emptyset$. 如果 $D'' \neq \emptyset$, $\{y, c\}$ 是 $G' = G - x$ 的非控制团, 故存在点 $v \in V(G') \setminus N(\{y, c\})$ 是 G' 的双单纯点. 因为 $A \cup B \cup C \subseteq N(\{y, c\})$ 而且 x 独立于 D , $v \in D$ 且 $N_G(v) = N_{G'}(v)$, 从而, v 也是 G 的双单纯点, 矛盾. 故而 $D'' = \emptyset$.

设 $G'' = G - c$, 则 $V(G'') \setminus N(K)$ 有一个点 v 是 G'' 的双单纯点. 因为 $A \cup B \cup C \subseteq N(K)$ 且 $D = D'$, 所以, $v \in D$ 且 $N_G(v) = N_{G''}(v) \cup \{c\}$. 又因为对每个点 $b \in N(v) \cap (B \cup C)$, $ycvby$ 不能是 4-洞, 所以, c 一定全联于 $N_{G''}(v) \cap (B \cup C)$. 同样的方法可以证明 c 一定全联于 $N_{G''}(v) \cap A$. 所以, c 必全联于 $N_{G''}(v)$ (因为 c 全联于 D), 从而 v 是 G 的双单纯点. 这一矛盾说明 $A'' \neq \emptyset$. 由对称性知, (2.2) 成立.

因为对每一对点 $a \in A$ 和 $b \in B$, $axyba$ 不能是 4-洞, 故 A 独立于 B .

选取顶点 $a' \in A'$, $b' \in B'$, $a'' \in A''$, $b'' \in B''$. 根据 (Ω_1) 可知, 存在内点全在 D 中的 $a'b''$ -路 P_1 和 $a''b'$ -路 P_2 . 分别记洞 $xa'P_1b''yx$ 和 $xa''P_2b'yx$ 为 H_1 和 H_2 . 鉴于 c 不可能与 a'' 和 b'' 都相邻, 对 H_1 或 H_2 而言, c 都不是大型点 (据 (Ω_2)). 所以, c 独立于 $P_1^* \cup P_2^*$.

我们可以断定 $V(P_1) \cap V(P_2) = \emptyset$, 且 $P_1 - b''$ 独立于 $P_2 - a''$. 反之, 一定存在 $a'b'$ -路 P 使得 $P^* \subseteq P_1^* \cup P_2^*$, 而且 c 在洞 $xa'Pb'yx$ 上恰有 4 个邻点, 与定理 1.1 矛盾.

取 $d_1 \in N_{P_1}(b'')$, $d_2 \in N_{P_2}(a'')$. 因为 A 独立于 B , 所以, $d_1, d_2 \in D$. 因 G 不含非控制洞, 因此, d_1 在 H_2 有邻点. 用类似于上一段的处理方法可以证明 $d_1a'' \in E(G)$, $d_1d_2 \notin E(G)$, 且 $d_2b'' \in E(G)$. 但这时 $a''d_2b''d_1a''$ 是一个 4-洞 (因为 A 独立于 B), (Ω_3) 得证. $\square$

下面用 m 表示所有过 xy 的最短洞的长度.

(Ω_4) 设 H 是过 xy 的洞, 点 w 是 H 的大型点, 则 w 不会全联于 $\{x, y\}$. 另外, 如果 H 长为 m , 则 H 没有大型点, 且 H 的每一个锥点与 x 和 y 都相邻.

证明 假设 w 是 H 的大型点且 $\{wx, wy\} \subseteq E(G)$, 根据 (Ω_3) 可知, w 不全联于 H , 又与 (Ω_2) 矛盾. 假设 H 长为 m , w 是 H 的大型点或锥点, 由 $|H|$ 的最小性知, $\{wx, wy\} \subseteq E(G)$, 与前述结论矛盾, (Ω_4) 得证. $\square$

记 $W = \bigcup \{V(H) : H \text{ 是过 } xy \text{ 且长为 } m \text{ 的洞}\}$.

对整数 $i \in [m-2]$, 记 A_i 为满足下述性质顶点的集合: $v \in W$, 存在长为 m 的洞包含 xy 和 v , 且 $H - y$ 中的 xv -路长为 i . 令 $A_0 = \{x\}$, $A_{m-1} = \{y\}$. 显然, $W = \bigcup_{i=0}^{m-1} A_i$.

(Ω_5) $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 且对所有 $1 < j - i < m - 1$, A_i 独立于 A_j .

证明 因为当 $i \in [m-2]$ 时, A_i 的每一个顶点在 A_{i-1} 和 A_{i+1} 中各有一个邻点, 所以只需证明后一个结论. 假设存在 $1 \leq i < j \leq m-2$ 且 $j - i > 1$, 使得 $a_i \in A_i$ 与 $a_j \in A_j$ 相邻. 取一条长为 i 且不含 y 的 xa_i -路 P , 一条长为 $m - j - 1$ 且不含 x 的 a_jy -路 Q . 因为 W 中每个点都在过 xy 长为 m 的洞上, $P \cup Q$ 中任一个点都至多与 x 和 y 之一相邻, 从而, $G[P \cup Q]$ 是过 xy 且长度小于 m 的洞. 这一矛盾说明 (Ω_5) 成立. $\square$

设 $i \in [m-2]$, $u \in A_i$, P 是从 u 开始的路. 如果 $P \subseteq \bigcup_{j=0}^i A_j$ 且当 $0 \leq j \leq i$ 时 $|P \cap A_j| = 1$, 则称 P 为 u 的一条 x -路. 如果 $P \subseteq \bigcup_{j=i}^{m-1} A_j$ 且当 $i \leq j \leq m-1$ 时 $|P \cap A_j| = 1$, 则称 P 是 u 的一条 y -路.

对任意给定的 $u \in W$, 本文分别用 P_u 和 Q_u 表示 u 的一条 x -路和 y -路.

根据 W 定义, $W \setminus K$ 的每个点都有 x -路和 y -路. 由 (Ω_5) 可知, 对每个点 $u \in W \setminus K$, 如果 P 和 Q 分别为 u 的 x -路和 y -路, 则 $P \cap Q = \{u\}$, $P - \{u, x\}$ 独立于 $Q - \{u, y\}$, 且 $P \cup Q$ 导出长为 m 的洞.

设 u 和 v 为 A_i 中一对不相邻顶点. 如果 $N_{A_{i-1}}(u) \cap N_{A_{i-1}}(v) \neq \emptyset$, 则称 $\{u, v\}$ 为一个 x -对. 如果 $N_{A_{i+1}}(u) \cap N_{A_{i+1}}(v) \neq \emptyset$, 则称 $\{u, v\}$ 为一个 y -对.

(Ω_6) 设 $i \in [m-2]$, $u, v \in A_i$ 且 $uv \notin E(G)$, 则 $\{u, v\}$ 必为 x -对或 y -对, 但只能居其一. 若 $\{u, v\}$ 是 x -对, 则 $N_{A_{i-1}}(u) = N_{A_{i-1}}(v)$ 且 $N_{A_{i+1}}(u)$ 全联于 $N_{A_{i+1}}(v)$; 若 $\{u, v\}$ 是 y -对, 则 $N_{A_{i+1}}(u) = N_{A_{i+1}}(v)$ 且 $N_{A_{i-1}}(u)$ 全联于 $N_{A_{i-1}}(v)$.

证明 取 u 的 x -路 P_u 和 y -路 Q_u , v 的 x -路 P_v 和 y -路 Q_v . 因为 $xP_uuQ_u yx$ 是一个洞, 根据 (Ω_2) 和 (Ω_5), v 在 $(P_u \cup Q_u) \cap (A_{i-1} \cup A_i \cup A_{i+1})$ 中有邻点. 由对称性和 $vu \notin E(G)$ 知, 可以假设 v 与 u 在 P_u 上有一个公共邻点, 记为 p , 这时 $\{u, v\}$ 是一个 x -对. 因为 A_{i-1} 独立于 A_{i+1} (根据 (Ω_5)), 且 G 不含 4-洞, 故 $N_{A_{i+1}}(u) \cap N_{A_{i+1}}(v) = \emptyset$, 即 $\{u, v\}$ 不能是 y -对.

假设有 $a \in N_{A_{i+1}}(u)$ 与 $a' \in N_{A_{i+1}}(v)$ 且 $aa' \notin E(G)$. 显然, $i < m-2$. 鉴于 $N_{A_{i+1}}(u)$ 每个点都在 u 的某个 y -路上, 不妨设 $a \in Q_u$. 由 (Ω_2) 知, a' 在 $P_u \cup Q_u$ 上有邻点. 由 (Ω_5) 且因为 a' 独立于 $\{u, a\}$, a' 只能与 $q = Q_u \cap A_{i+2}$ 相邻, 出现一个 $\theta 3PC(p, q)(puaq, pva'q, pP_pxyQ_qq)$ (根据 (Ω_5)), 这一矛盾说明 $N_{A_{i+1}}(u)$ 一定全联于 $N_{A_{i+1}}(v)$.

现假设 $N(u) \cap A_{i-1} \neq N(v) \cap A_{i-1}$, 根据对称性, 不妨取 $p' \in N_{A_{i-1}}(v) \setminus N_{A_{i-1}}(u)$. 因 $N_{A_{i-1}}(v)$ 每个点都在 v 的某 x -路上, 故设 $p' \in P_v$. 鉴于 $xP_vvQ_v yx$ 是一个洞, 根据 (Ω_2) 和 (Ω_5) 知, u 在 $(P_v \cup Q_v) \cap (A_{i-1} \cup A_i \cup A_{i+1})$ 有邻点. 但这与 u 独立于 $\{p', v\}$ 且 $N_{A_{i+1}}(u) \cap N_{A_{i+1}}(v) = \emptyset$ 矛盾. 由对称性知, (Ω_6) 成立. $\square$

(Ω_7) 设 $i \in [m-2]$, $\{u, v\} \subseteq A_i$ 是一个 x -对, 则 A_i 全联于 $N_{A_{i-1}}(u)$, A_i 不含 y -对.

证明 假设结论不成立, 取不相邻点对 $z \in N_{A_{i-1}}(u)$ 和 $w \in A_i$. 因为 $\{u, v\}$ 是 x -对, 所以, $uz \in E(G)$, 且存在 $a, b \in A_{i+1}$ 使得 $ua \in E(G)$, $ub \notin E(G)$, $vb \in E(G)$, $va \notin E(G)$ 且 $ab \in E(G)$ (根据 (Ω_6)). 由于 $zuwvz$ 不是 4-洞, 根据对称性可以假设 $wv \notin E(G)$. 因为 z 在 v 的 x -路上, b 在 v 的 y -路上, 由 (Ω_2) 和 (Ω_5) 可知 $wb \in E(G)$. 根据 (Ω_6) 可知, $\{v, w\}$ 是一个 y -对, 存在 $z' \in A_{i-1}$ 使得 $zz' \in E(G)$, $z'w \in E(G)$, $z'v \notin E(G)$. 因为 $\{u, v\}$ 是 x -对, 所以 $uz' \notin E(G)$. 因为 z' 在 w 的 x -路上, b 在 w 的 y -路上, 由 (Ω_2) 和 (Ω_5) 可知 $uw \in E(G)$. 但这时有一个 4-洞 $zuwz'z$. 所以, (Ω_7) 成立. $\square$

(Ω_8) 若点 $u \in N(K)$ 或者 K 不是 $G-u$ 的控制集, 则存在 $v \in N(u)$ 独立于 K 且是 $G-u$ 的双单纯点.

证明 当 $u \in N(K)$ 时, 由于 K 不是 G 的控制集, 因此存在点 $v \neq u$ 独立于 K , 即 K 也不是 $G-u$ 的控制集. 所以总假设 K 不是 $G-u$ 的控制集. 由 $|V(G)|$ 的最小性知, 存在 $v \in V(G) \setminus (N(K) \cup \{u\})$ 是 $G-u$ 的双单纯点. 因为 v 不是 G 的双单纯点, 所以 $uv \in E(G)$, (Ω_8) 得证. $\square$

(Ω_9) 对任一 $v \in C$, 存在 $i \in [m-2] \setminus \{2, m-3\}$ 使得 $N_W(v) \subseteq K \cup A_i$.

证明 任取 $v \in C$, 令 $j > 0$ 和 $k < m-1$ 分别是最小和最大的数满足 $a'_j \in A_j$ 和 $a_k \in A_k$ 都是 v 的邻点. 对任意给定的 $u \in W$, P_u 和 Q_u 分别为 u 的 x -路和 y -路. 对整数 $i \in [m-2]$, 令 $a_i \in A_i$ 为 P_{a_k} 或 Q_{a_k} 上的点, $a'_i \in A_i$ 为 $P_{a'_j}$ 或 $Q_{a'_j}$ 上的点. 先来证明

$$k = j. \quad (2.3)$$

假定 $k-j=1$. 因为 $(xP_{a'_j}a'_ja_kQ_{a_k}yx, v)$ 不是偶轮, 所以, $a'_ja_k \notin E(G)$. 同理, $va_j, va'_k \notin E(G)$. 又因为 $va'_ja'_ka_kv$ 不是 4-洞, 所以, $a_ka'_k \notin E(G)$, 从而, $\{a'_k, a_k\}$ 是一个 y -对. 但根据 (Ω_6) 可知, $a'_ja_j \in E(G)$ 蕴涵 $va'_ja_ja_kv$ 是一个 4-洞, 矛盾. 所以 $k-j > 1$. 下面根据 j 的取值分两种情形讨论.

先设 $j=1$. 由 (Ω_3) 知 $k+1 \neq m-1$. 如果 $a'_ja_j \notin E(G)$, 则 $\{a'_j, a_j\}$ 是 x -对, $a'_{j+1}a_{j+1} \in E(G)$ (根据 (Ω_6)), 从而 $a_k \in Q_{a_{j+2}}$. 若 $a'_{j+1}a_{j+2} \in E(G)$, 则令 $H' = xa'_ja'_{j+1}a_{j+2}Q_{a_{j+2}}yx$. 否则, 令 $H' = xa'_ja'_{j+1}a_{j+1}Q_{a_{j+1}}a_kQ_{a_k}yx$. 易见 (H', v) 是一偶轮, 所以 $a'_ja_j \in E(G)$.

因 $(xa'_ja_{j+1}Q_{a_{j+1}}a_kQ_{a_k}yx, v)$ 不是偶轮, 故 $a'_ja_{j+1} \notin E(G)$. 若 $a'_{j+1}a_{j+1} \notin E(G)$, 则 $\{a'_{j+1}, a_{j+1}\}$ 是 y -对, 由 (Ω_6) 知 $a'_{j+1}a_{j+2} \in E(G)$, 出现偶轮 $(xa'_ja'_{j+1}a_{j+2}Q_{a_{j+2}}yx, v)$. 所以, $a'_{j+1}a_{j+1} \in E(G)$, 从而, $a'_ja_j \in E(G)$, $a'_ja_{j+1} \notin E(G)$ 且 $a'_{j+1}a_{j+1} \in E(G)$. 因为 G 不含 4-洞, 所以 $a'_{j+1}a_j \in E(G)$. 若 $a'_{j+1}a_{j+2} \in E(G)$, 则导致偶轮 $(xa'_ja'_{j+1}a_{j+2}Q_{a_{j+2}}yx, v)$; 若 $a'_{j+1}a_{j+2} \notin E(G)$, 则导致偶轮 $(xa'_ja'_{j+1}a_{j+1}Q_{a_{j+1}}a_kQ_{a_k}yx, v)$, 都产生矛盾.

再假设 $j \neq 1$. 若 $a'_ja_j \in E(G)$, 当 $a'_ja_{j+1} \in E(G)$ 时令 $H' = xP_{a'_ja'_ja_{j+1}}Q_{a_{j+1}}yx$, 否则令 $H' = xP_{a'_ja'_ja_j}Q_{a_j}yx$, 则 (H', v) 是一个偶轮. 所以, $a'_ja_j \notin E(G)$. 如果 $\{a'_j, a_j\}$ 是 y -对, 则 $a_{j+1}a'_j \in E(G)$ 导致偶轮 $(xP_{a'_ja'_ja_{j+1}}Q_{a_{j+1}}yx, v)$. 否则由 (Ω_6) 知, $\{a'_j, a_j\}$ 是 x -对且 $a_{j+1}a'_{j+1} \in E(G)$, 当 $a'_{j+1}a_{j+2} \in E(G)$ 时, 令 $H'' = xP_{a'_ja'_ja'_{j+1}a_{j+2}}Q_{a_{j+2}}yx$; 当 $a'_{j+1}a_{j+2} \notin E(G)$ 时, 令 $H'' = xP_{a'_ja'_ja'_{j+1}a_{j+1}}Q_{a_{j+1}}yx$, 从而, (H'', v) 是偶轮. 这一矛盾证明 (2.3) 成立. 因为 G 无 4-洞, $j \notin \{2, m-3\}$, 所以 (Ω_9) 成立. $\square$

(Ω_{10}) 设 $v \in V(G) \setminus W$, 且记 $N = N_W(v)$, 则下述结论之一成立:

- (i) 存在 $i \in [m-2]$ 使得 $N = A_i$;
- (ii) 存在 $i \in [m-3]$ 使得 $N \subseteq A_i \cup A_{i+1}$, $N \cap A_i$ 全联于 $N \cap A_{i+1}$, 且 $A_i \setminus N$ 独立于 $A_{i+1} \setminus N$;
- (iii) 存在 $i \in [m-2] \setminus \{2, m-3\}$ 使得 $K \subseteq N \subseteq A_i \cup K$, 且 $N \cap A_i \neq \emptyset$;
- (iv) $N = K$;
- (v) $x \in N \subseteq A_1 \cup \{x\}$, 且 $N \cap A_1 \neq \emptyset$;
- (vi) $y \in N \subseteq A_{m-2} \cup \{y\}$, 且 $N \cap A_{m-2} \neq \emptyset$.

证明 假设 (i)–(vi) 都不成立. 根据 (Ω_9) 可知, $K \subseteq N$ 蕴涵 (iii) 或 (iv) 成立. 不妨设 $K \not\subseteq N$, 并根据对称性假设 $y \notin N$. 下面证明

$$N \cap K = \emptyset. \quad (2.4)$$

假设 $x \in N$. 因为 $v \notin W$, 显然, v 独立于 A_2 . 由 m 的最小性可知, 对所有的 $i > 2$, v 必独立于 A_i . 若 $N_{A_1}(v) \neq \emptyset$, 则 (v) 成立. 所以, 进一步假设 $N_{A_1}(v) = \emptyset$.

由 (Ω_8) 知, v 在 $V(G) \setminus (N(K) \cup W)$ 中有一个邻点, 设为 u . 根据 (Ω_2) 可知, u 在 W 中有邻点, 且 u 独立于 A_1 (否则存在 $a_1 \in A_1$ 导致 4-洞 $xvua_1x$). 取 $j > 1$ 为最大的整数使得 $N_{A_j}(u) \neq \emptyset$, 且取 $a_j \in N_{A_j}(u)$. 由于 $xvuyx$ 不是 4-洞, 因此, $j < m-1$. 若 $j = 2$, 则有 $\text{theta } 3PC(x, a_2)(xvua_2, xa_1a_2, xyQ_{a_2})$. 若 $j > 3$, 则有长度小于 m 的洞 $xvua_jQ_{a_j}yx$. 所以, $j = 3$, 从而 $v \in A_1$, 与 $v \in V(G) \setminus W$ 矛盾, (2.4) 得证.

根据 (Ω_2) 可知, $N \neq \emptyset$. 取 $j, k \in [m-2]$ 分别为最小和最大数使得 v 在 A_j 和 A_k 都有邻点, 且设邻点分别为 a_j 和 a_k . 若 $j = k$, 则 v 全联于 A_j (根据 (Ω_2)), (i) 成立. 若 $k - j > 1$, 则有长度小于 m 的洞 $xP_{a_ja_jva_k}Q_{a_k}yx$, 与 m 的最小性或 $v \notin W$ 矛盾. 所以, 下面假设 $j = k - 1$ 并证明 (ii) 一定成立. 为此只需验证 $N \cap A_j$ 全联于 $N \cap A_k$, 且 $A_j \setminus N$ 独立于 $A_k \setminus N$. 设 $u \in A_j \setminus N$, $w \in A_k \setminus N$. 若 $uw \in E(G)$, 则 v 在洞 xP_uuwQ_wyx 上无邻点, 与 (Ω_2) 矛盾. 所以, $A_j \setminus N$ 独立于 $A_k \setminus N$.

若 $N \cap A_j = \{a_j\}$ 且 $N \cap A_k = \{a_k\}$, 则结论自然成立. 假设 $N \cap A_j \neq \{a_j\}$ 或 $N \cap A_k \neq \{a_k\}$.

先设 $j = 1$. 令 a_2 是 $N \cap A_2$ 中任一点. 若 $N_{A_1 \cap N}(a_2) = \emptyset$, 则有一 4-洞或者一 $\text{theta } 3PC(a_2, x)$. 取 $a_1 \in N_{A_1 \cap N}(a_2)$. 若 a_2 不全联于 $N \cap A_1$, 令 $a'_1 \in (N \cap A_1) \setminus \{a_1\}$ 与 a_2 不相邻, 当 $a'_1a_1 \in E(G)$ 时有偶轮 $(xa'_1va_2Q_{a_2}yx, a_1)$, 当 $a'_1a_1 \notin E(G)$ 时有 4-洞 xa'_1va_1x . 所以, $N \cap A_1$ 必全联于 $N \cap A_2$.

下面设 $j \neq 1$, 且不失一般性, 设 $N \cap A_k \neq \{a_k\}$. 令 $a'_k \in (N \cap A_k) \setminus \{a_k\}$ 与 a_j 不相邻, $a_{k+1} \in N_{A_{k+1}}(a_k)$, 且设 a'_j 和 a'_{k+1} 分别为 a'_k 在 A_j 和 A_{k+1} 的邻点. 若 $a'_ka_k \in E(G)$, 因为

$(xP_{a_j}a_jva'_ka_{k+1}Q_{a_{k+1}}yx, a_k)$ 和 $(xP_{a_j}a_jva'_ka'_{k+1}Q_{a'_{k+1}}yx, a_k)$ 都不是偶轮, $a'_ka_{k+1} \notin E(G)$ 且 $a_ka'_{k+1} \notin E(G)$, 从而, $a'_{k+1}a_{k+1} \notin E(G)$ 蕴涵着 $\{a'_{k+1}, a_{k+1}\}$ 是一个 y -对, 导致

$$\text{theta } 3PC(a_k, a'_{k+2})(a_ka'_ka'_{k+1}a'_{k+2}, a_ka_{k+1}a'_{k+2}, a_kP_{a_k}xyQ_{a'_{k+2}}a'_{k+2}).$$

所以, $a'_ka_k \notin E(G)$, $\{a'_k, a_k\}$ 是一个 y -对, 蕴涵 $a'_ja_j \in E(G)$ (根据 (Ω_6)). 当 $a'_{j-1}a_j \in E(G)$ 时有一偶轮 $(xP_{a'_{j-1}}a'_{j-1}a_jva'_kQ_{a'_k}yx, a'_j)$, 当 $a'_{j-1}a_j \notin E(G)$ 出现一

$$\text{theta } 3PC(a'_j, a'_{k+1})(a'_ja'_ka'_{k+1}, a'_ja_ja_ka'_{k+1}, a'_ja'_{j-1}P_{a'_{j-1}}xyQ_{a'_{k+1}}a'_{k+1}).$$

所以, $N \cap A_j$ 全联于 $N \cap A_k$, (Ω_{10}) 得证. □

在继续证明之前, 再引入一些新记号. 给定 $i \in [m-2]$, 令

- $B_i = \{w : w \notin W, w \text{ 全联于 } A_i \text{ 且 } N_{W \setminus A_i}(w) = \emptyset\};$
- $C_i = \{w : w \notin W, N_{A_i}(w) \neq \emptyset, w \text{ 全联于 } K \text{ 且独立于 } W \setminus (K \cup A_i)\};$
- $B_{i,i+1} = \{w : w \notin W, N_{A_i}(w) \neq \emptyset \neq N_{A_{i+1}}(w) \text{ 且 } w \text{ 独立于 } W \setminus (A_i \cup A_{i+1})\}.$

令 $B_{x,y} = \{w : w \notin W, w \text{ 全联于 } K \text{ 且独立于 } W \setminus K\}$, $B_0 = B_{m-1} = C_0 = C_{m-1} = \emptyset$. 显然, 这些子集是相互无交的, 由 (Ω_{10}) 可知,

$$V(G) = W \cup B_{x,y} \bigcup_{i=0}^{m-2} (B_i \cup C_i \cup B_{i,i+1}).$$

为叙述简便起见, 下面谈到 theta 或棱柱时, 将略去相应的 3 条路.

(Ω_{11}) C_1 和 C_{m-2} 都是团.

证明 假设 C_1 中有不相邻的两点 u 和 u' . 若有 $a \in N_{A_1}(u) \cap N_{A_1}(u')$, 则 $yuau'y$ 是 4-洞, 所以, A_1 没有顶点与 u 和 u' 都相邻, 故而 u 和 u' 都不全联于 A_1 . 取 $a_1 \in N_{A_1}(u)$, $a'_1 \in N_{A_1}(u')$.

由 (Ω_8) 知, u 在 $V(G) \setminus N(K)$ 有邻点. 因为 u 独立于 $W \setminus (K \cup A_1)$, 由 (Ω_{10}) 可知 u 在 $\bigcup_{i=1}^{m-2} B_i \cup \bigcup_{i=1}^{m-3} B_{i,i+1}$ 有邻点, 取其一设为 n . 设 $i \in [m-2]$ 且 $n \in B_i$. 因 $xuna'_1x$ 不是 4-洞, $i > 1$. 记 a_i 是 Q_{a_1} 过 A_i 的点. 因为 B_i 全联于 A_i , $na_i \in E(G)$ 导致一 theta $3PC(a_i, u)$. 所以,

$$n \notin \bigcup_{i=1}^{m-2} B_i, \text{ 即 } u \text{ 独立于 } \bigcup_{i=1}^{m-2} B_i. \quad (2.5)$$

再证明

$$n \notin \bigcup_{i=2}^{m-3} B_{i,i+1}. \quad (2.6)$$

假设 $n \in B_{i,i+1}$, $2 \leq i \leq m-3$. 取 $a_i \in N_{A_i}(n)$ 和 $a_{i+1} \in N_{A_{i+1}}(n)$. 由 (Ω_{10}) 知, $a_ia_{i+1} \in E(G)$. 当 $i=2$ 时, 有 4-洞 uaa_2nu (其中 $a \in N_{A_1}(a_2) \cap N_{A_1}(u)$), 或一棱柱 $3PC(xuy, a_2na_3)$, 所以, $i \geq 3$.

若某条 x -路 P_{a_i} 过 a'_1 , 则有一棱柱 $3PC(xuy, a_ina_{i+1})$. 故由对称性假设知,

$$a_i \text{ 的每条 } x\text{-路都含 } N_{A_1}(u) \text{ 某个点.} \quad (2.7)$$

取一条 x -路 P_{a_i} , 一条 y -路 $Q_{a'_1}$. 令 a_h 和 a'_h 分别为 P_{a_i} 和 $Q_{a'_1}$ 过 A_h 的点. 若 $a'_1a_1 \notin E(G)$, 则 $\{a'_1, a_1\}$ 是 x -对, 由 (Ω_6) 知 $a'_2a_2 \in E(G)$. 当 $a'_2a_3 \in E(G)$ 时有 x -路 $xa'_1a'_2a_3P_{a_i}a_i$ 不经过 $N_{A_1}(u)$ (与 (2.7) 矛盾), 当 $a'_2a_3 \notin E(G)$ 时有一棱柱 $3PC(xuy, a_ina_{i+1})$. 所以, $a'_1a_1 \in E(G)$.

由 (2.7) 可知, $a'_1a_2 \notin E(G)$ 且 $a'_2a_3 \notin E(G)$. 若 $a'_2a_2 \in E(G)$, 则 $a_1a'_2 \in E(G)$, 有一棱柱 $3PC(xuy, a_ina_{i+1})$, 故 $a'_2a_2 \notin E(G)$. 由 (2.7) 知 $\{a'_2, a_2\}$ 是 y -对, 从而有一条 x -路包含 $A_1 \setminus N(u)$ 的点, 又与 (2.7) 矛盾, (2.6) 成立.

联立 (2.5) 和 (2.6), 由 u 与 u' 的对称性可知, $n \in B_{1,2}$, 且 $B_{1,2}$ 中某点 n' 与 u' 相邻.

取 $a \in N_{A_1}(n)$ 和 $a' \in N_{A_1}(n')$. 因 $uxu'nu$ 不是 4-洞, 故 $u'n \notin E(G)$. 同理, $un' \notin E(G)$. 又因 $a'_1xuna'_1$ 不是 4-洞, 故 $na'_1 \notin E(G)$. 记 $T = Q_{a'_1}$. 由 (Ω_2) 和 (Ω_{10}) 可知, n 与 T 在 A_2 的点 a'_2 相邻. 鉴于 $xunax$ 不是 4-洞, $au \in E(G)$. 由 (Ω_{10}) 知, $aa'_2 \in E(G)$, 从而, $aa'_1 \in E(G)$ (因 $xaa'_2a'_1x$ 不是 4-洞). 因为 A_1 不含顶点, 与 u 和 u' 都相邻, 故 $au' \notin E(G)$. 由 $aa'_2 \in E(G)$ 知, aa'_2Ty 是 a 的 y -路. 将处理 $\{u, n, a'_1\}$ 同样的方法应用到 $\{u', n', a\}$, 可以证明 $n'a \notin E(G)$ 且 $n'a_2 \in E(G)$, $N_{A_1}(n')$ 全联于 $\{a, u'\}$ 且独立于 $\{u, n\}$. 当 $nn' \in E(G)$ 时有 4-洞 $nn'a'an$, 当 $nn' \notin E(G)$ 时有一 theta $3PC(y, a'_2)$. (Ω_{11}) 得证. $\square$

(Ω_{12}) 设 $c_1, c_2 \in C$ 使得 $N_{N(x) \setminus N(y)}(c_1) \neq \emptyset$ 且 $N_{N(y) \setminus N(x)}(c_2) \neq \emptyset$, 则 $c_1c_2 \in E(G)$.

证明 假设结论不成立, 取 $a \in N_{N(x) \setminus N(y)}(c_1)$, $b \in N_{N(y) \setminus N(x)}(c_2)$. 因为 $axyba$ 不是 4-洞, 所以, $ab \notin E(G)$. 由 (Ω_3) 知, $c_1b, c_2a \notin E(G)$, 从而 $c_1 \neq c_2$. 由 (Ω_1) 知, 存在 ab -路 P 使得 $P^* \subseteq V(G) \setminus N(K)$. 令 $H_1 = axybPa$. 由 (Ω_2) 知, c_1 和 c_2 都不是 H_1 的大型点, 所以, $\{c_1, c_2\}$ 独立于 P^* . 令 $D \subseteq V(G) \setminus N(K)$ 是包含 P^* 且 $N_D(\{c_1, c_2\}) \neq \emptyset$ 的最小子集. 因为 $c_1xc_2dc_1$ 不是 4-洞, D 的点不可能全联于 $\{c_1, c_2\}$, 由 D 的极小性知恰好 c_1 和 c_2 之一, 不妨设 c_1 , 在 D 中有邻点.

令 Q 是满足 $Q^* \subseteq D$ 的一条 bc_1 -路, 则有偶轮 $(c_1Qbc_2xc_1, y)$, 矛盾. (Ω_{12}) 得证. $\square$

(Ω_{13}) 设 $c_1, c_2 \in C$ 且不相邻, 则 $\{c_1, c_2\}$ 独立于 $N(K) \setminus (C \cup K)$.

证明 假设 c_1 有一个邻点 $a \in N(x) \setminus N(y)$, 由 (Ω_3) 知 c_1 独立于 $N(y) \setminus N(x)$, 且由 (Ω_{12}) 知 c_2 独立于 $N(y) \setminus N(x)$. 由 (Ω_1) 知, 存在 $b \in N(y) \setminus N(x)$ 和 ab -路 P 满足 $P^* \subseteq V(G) \setminus N(K)$.

令 $H = aPbyxa$. 由 (Ω_2) 知, c_1 不是 H 的大型点, 所以, c_1 独立于 P^* . 若 $N_P(c_2) \neq \emptyset$, 令 Q 是内点全在 P 上的一条 ac_2 -路, 则有偶轮 (aQc_2yc_1a, x) . 所以, c_2 独立于 P . 由 (Ω_1) 知, $V(G) \setminus N(K)$ 含有 c_2 的邻点, 设为 d , 使得 $c_1d \notin E(G)$ (否则 $c_1xc_2dc_1$ 是一个 4-洞). 因为 H 是控制集, d 在 $P-b$ 上有邻点 (否则有 4-洞 $c_2ybd c_2$), 从而存在 ad -路 R 使得 $R^* \subseteq P \setminus \{b\}$. 但这时偶轮 (yc_2dRac_1y, x) , 所以, (Ω_{13}) 成立. $\square$

(Ω_{14}) 设 $c_1, c_2 \in C$ 不相邻, P 是一条 c_1c_2 -路, $P^* \subseteq V(G) \setminus N(K)$, 则 P 长度为 3 且 $P \cup \{x, y\}$ 是控制集, 或者 (i) $m = 5$, $c_1, c_2 \in B_{x,y}$ 且 $P^* \subseteq B_2$; 或者 (ii) $m = 7$, $c_1, c_2 \in C_3$ 且 $P^* \subseteq A_3$.

证明 由 (2.1) 知, 存在 $a \in N(x) \setminus N(y)$ 和 $b \in N(y) \setminus N(x)$. 令 Q 是一条 ab -路使得 $Q^* \subseteq V(G) \setminus N(K)$, 令 $H = xaQbyx$. 因 G 不含非控制洞, 所以, P^* 的点都在 H 中有邻点, 因此都在 Q 上有邻点. 不失一般性, 假设 P^* 中每个点都与 a 或 b 相邻. 设 p 是 c_1 在 P 中的邻点, 且由对称性假设知 $ap \in E(G)$. 由 (Ω_{13}) 知, $ac_1 \notin E(G)$, 从而, 有一个 4-洞 axc_1pa . 所以,

$$Q^* \text{ 某点在 } P^* \text{ 中有邻点.} \quad (2.8)$$

因 G 不含非控制洞且 $P \cup \{x\}$ 是一个洞, 故 $P \cup \{x, y\}$ 是 G 的控制集.

如果 a 在 P^* 中有邻点, 定义 $x_a = a$, 否则定义 x_a 为 a 在 Q 中的邻点. 同理可以定义 x_b , 则 x_a 和 x_b 都在 P^* 中有邻点. 给定 $h \in \{1, 2\}$, 令 p_h 是 x_a 在 P 上离 c_h 最近的邻点且令 P_h 为 P 中的 $c_h p_h$ -路. 同理, 将 x_a 换成 x_b , 可以定义点 p'_h 和路 P'_h .

$$x_a \text{ (或 } x_b) \text{ 在 } P \text{ 上恰有两个邻点, 且二者相邻.} \quad (2.9)$$

根据对称性可知, 只需对 x_a 证明结论成立. 若 $x_a \neq a$, 当 $p_1 \neq p_2$ 且 $p_1 p_2 \notin E(G)$ 时有一 theta $3PC(x_a, x)$, 当 $p_1 = p_2$ 时有一 theta $3PC(p_1, x)$, 所以, $p_1 \neq p_2$ 且 $p_1 p_2 \in E(G)$, 即 (2.9) 成立. 假设 $x_a = a$. 由 (Ω_{13}) 可知, $x_a c_1, x_a c_2 \notin E(G)$, 从而, $p_1 \neq p_2$ (否则 $G[P \cup \{x, x_a\}]$ 是一个 theta). 假若 $p_1 p_2 \notin E(G)$, 则 x_a 是洞 $x c_1 P c_2 x$ 的大型点. 鉴于 $x_a c_1, x_a c_2 \notin E(G)$, 根据定理 1.10 可知, G 有一个满星割, 与定理 1.7 矛盾, 所以, (2.9) 也成立. 下面证明

$$P \text{ 是长为 } 3 \text{ 的路.} \quad (2.10)$$

若 $p'_1 \in P_2$, 则路 $x_a Q a x$ 、 $p_1 P_1 c_1$ 和 $p_2 P_2 p'_1 x_b Q b y$ 导致一个棱柱或偶轮. 若 $p'_2 \in P_1$, 则路 $x_a Q a x$ 、 $p_2 P_2 c_2$ 和 $p_1 P_1 p'_2 x_b Q b y$ 也会导致一个棱柱或偶轮. 所以, $p_1 = p'_1$ 且 $p_2 = p'_2$.

如果 $p_1 = c_1$, 则 $x_a \neq a$ (根据 (Ω_{14})), 从而 $x_a a x c_1 x_a$ 是一个 4-洞. 由对称性有 $p_1, p_2 \in P^*$. 因为 $x a Q x_a p_1 x_b Q b y x$ 是一个控制洞, 又因为 P_2^* 在该洞上无邻点, 所以, P_2^* 必为空集, 即 $p_2 c_2 \in E(G)$. 同理可证 $p_1 c_1 \in E(G)$. 结合 (2.9) 可得 (2.10) 成立.

因为 c_1 独立于 $N(x) \setminus N(y)$, 且对任意 $a' \in N(x) \setminus N(y)$, $a' p_1 c_1 x a'$ 不能是 4-洞, p_1 必独立于 $N(x) \setminus N(y)$. 由对称性可得 $\{p_1, p_2\}$ 独立于 $N(K) \setminus (C \cup K)$. 由此可得 $x_a \neq a$ 且 $x_b \neq b$, $x_a x_b \notin E(G)$ (否则会有棱柱 $3PC(p_1 x_a x_b, c_1 x y)$). 至此有 $x a x_a p_1 x_b b y x$ 是一个 7-洞, 所以, $m \leq 7$.

最后证明 (i) 或 (ii) 成立. 若 $m = 7$, 则洞 $x a x_a p_1 x_b b y x$ 和 $x a x_a p_2 x_b b y x$ 表明 $\{p_1, p_2\} \subseteq A_3$. 因为 $\{c_1, c_2\}$ 全联于 $\{x, y\}$, 并且这两个点都在 A_3 中有邻点, 由 (Ω_9) 可知 $\{c_1, c_2\} \subseteq C_3$, 所以 (ii) 成立.

若 $m = 6$, 由 (Ω_9) 和 (Ω_{13}) 知 $\{c_1, c_2\} \subseteq B_{x,y}$, 且 p_1 和 p_2 都不在 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ 中. 由于 $p_1, p_2 \in V(G) \setminus N(K)$, 因此, p_1 和 p_2 都不在 $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ 中. 同理, p_1 和 p_2 都不可能在 $B_{0,1} \cup B_{4,5}$ 中. 由于 G 既无 4-洞也无棱柱, 因此, p_1 和 p_2 都不在 $B_1 \cup B_4 \cup B_{1,2} \cup B_{2,3} \cup B_{3,4}$ 中. 所以, $\{p_1, p_2\} \subseteq B_2 \cup B_3$. 由对称性, 假定 $p_1 \in B_2$. 因为 $a_2 p_1 p_2 a_3 a_2$ 不是 4-洞, $p_2 a_3 \notin E(G)$, 从而 $p_2 \in B_2$ 蕴涵 a_3 在 $P \cup \{x, y\}$ 中没有邻点, 与 $P \cup \{x, y\}$ 是控制集矛盾.

若 $m = 5$, 则 $\{c_1, c_2\} \subseteq B_{x,y} \cup C_1 \cup C_3$. 由 (Ω_{13}) 知 $\{c_1, c_2\}$ 独立于 $N(K) \setminus (C \cup K)$, 所以, $\{c_1, c_2\} \subseteq B_{x,y}$, 并且 p_1 和 p_2 都不在 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 中. 鉴于 $\{p_1, p_2\}$ 独立于 $N(K) \setminus (C \cup K)$, p_1 和 p_2 都不在 $B_1 \cup B_3 \cup B_{1,2} \cup B_{2,3}$ 中. 因为

$$V(G) = W \cup \bigcup_{i=0}^{m-2} (B_i \cup C_i \cup B_{i,i+1}) \cup B_{x,y},$$

而且 $\{p_1, p_2\}$ 独立于 $\{x, y\}$, 所以可得 $\{p_1, p_2\} \subseteq B_2$, 即 (i) 成立. (Ω_{14}) 得证. $\square$

(Ω_{15}) 设 $1 \leq j < i \leq m-2$, $p \in C_j$ 和 $b \in B_i \cup B_{i-1,i}$ 是两个相邻点, 则 $i \neq m-2$, $b \in B_{i-1,i}$, 并且下列结论之一成立:

- (i) $i = j+1$ 且 $N_{A_{i-1}}(b) = N_{A_{i-1}}(p)$;
- (ii) $i > j+1$, p 全联于 A_j , 且 b 全联于 $A_{i-1} \cup A_i$.

证明 因为对每个点 $a_i \in A_i$, $y p b a_i y$ 不是 4-洞, $i \neq m-2$. 因为 $p \in C_j$, $N_{A_j}(p) \neq \emptyset$, 取其一点 a_j . 记 $Q = Q_{a_j}$. 若 $b \in B_i$, 则 b 全联于 A_i , 且 b 在 Q 只有一个邻点 a_i , 从而产生 theta $3PC(p, a_i)$. 所以, $b \in B_{i-1,i}$.

若 $i = j+1$, 记 $P = P_{a_j}$, 令 $H' = x P a_j Q y x$ 且 $H' \cap A_i = \{a_i\}$. 因为 H' 是控制洞, 所以, $b a_j \in E(G)$ 或者 $b a_i \in E(G)$. 鉴于 G 无 4-洞和棱柱, $N_{A_{i-1}}(p) \subseteq N_{A_{i-1}}(b)$, 且 $N_{A_{i-1}}(b) \subseteq N_{A_{i-1}}(p)$, 即 (i) 成立.

现在假定 $i > j + 1$. 先来证明

$$p \text{ 全联于 } A_j. \quad (2.11)$$

反之, 取 $a'_j \in A_j$ 且 $a'_j p \notin E(G)$. 若 $i = j + 2$, 取 $a_{i-1} \in N_{A_{i-1}}(b)$ 和 $a_i \in N_{A_i}(b)$, 当 p 在 a_{i-1} 的所有 x -路都没有邻点时有一个棱柱 $3PC(xyp, a_{i-1}a_ib)$, 否则有一个 4-洞. 下面假定 $i > j + 2$. 取 $a_i \in N_{A_i}(b)$, 对 $h \in \{j, j+1, \dots, m-2\}$, 令 a'_h 是 $Q_{a'_j}$ 过 A_h 的点. 由 (Ω_{10}) 知, $a'_{i-1}a_i \in E(G)$. 若 $a'_{i-1}b \in E(G)$, 则有一棱柱 $3PC(xyp, a'_{i-1}a_ib)$. 所以,

a'_j 的所有 y -路过 A_{i-1} 的点都与 b 不相邻.

取定 a'_j 的某条 y -路过 A_{i-1} 的点, 设为 a'_{i-1} , 令 $a_i \in A_i$ 为一个全联于 $\{a'_{i-1}, b\}$ 的点, $a_{i-1} \in A_{i-1}$ 为一个全联于 $\{a_i, b\}$ 的点 (根据 (Ω_{10}) 可知, 这样的点一定存在). 通过对 a_{i-1} 和 a'_{i-1} 的简单讨论知, 总有一棱柱 $3PC(xyp, a_{i-1}a_ib)$. 所以, (2.11) 成立.

若 A_{i-1} 有一个点与 b 不相邻, 设其为 a'_{i-1} , 取 a_i 为某条 y -路 $Q_{a'_{i-1}}$ 过 A_i 的点, a_j 为某条 x -路 $P_{a'_{i-1}}$ 过 A_j 的点. 由 (2.11) 知, $pa_j \in E(G)$. 由于 $xP_{a'_{i-1}}Q_{a'_{i-1}}yx$ 是一个控制洞, $ba_i \in (G)$, 导致一 $\theta 3PC(p, a_i)$. 当 b 不全联于 A_i 时可以得到同样的矛盾. 所以, 当 $i > j + 1$ 时, b 全联于 $A_{i-1} \cup A_i$. 结合此结论与 (2.11), (Ω_{15}) 成立. $\square$

(Ω_{16}) 若 A_1 的某个点全联于 $B_{1,2}$, 则该点全联于 C_1 , 且 A_1 一定有点全联于 C_1 .

证明 取定 $p \in C_1$, 且设 p 在 A_1 有一个非邻点 a_1 . 因为 K 不是 $G - p$ 的控制集, 由 (Ω_8) 知, p 在 $V(G) \setminus N(K)$ 中有一个邻点, 设其为 b . 由 C_1 的定义可知, 或者 $b \in B_1$, 或者存在 $2 \leq i \leq m-2$ 使得 $b \in B_i \cup B_{i-1,i}$. 若 $b \in B_1$, 则 ba_1xpb 是一个 4-洞, 所以, $b \in B_i \cup B_{i-1,i}$. 由 (Ω_{15}) 可知, $i = 2$ 且 $N_{A_1}(b) = N_{A_1}(p)$. 特别地, $a_1 \notin N_{A_1}(b)$. 这就证明了, 如果 A_1 的某点全联于 $B_{1,2}$, 则它也全联于 C_1 .

如果 A_1 中没有点全联于 C_1 , 取 a 为 A_1 在 C_1 邻点最多的点, 令 $c' \in C_1$ 且 $ac' \notin E(G)$, 则 c' 在 A_1 一定有一个邻点, 设为 a' , 使得 C_1 中有一点 c 与 a 相邻, 与 a' 不相邻. 由 (Ω_{11}) 知, $cc' \in E(G)$. 因为 $aa'c'ca$ 不是 4-洞, 所以, $aa' \notin E(G)$. 用上一段相同的办法可以证明 $B_{1,2}$ 中存在点 b' 使得 $b'c' \in E(G)$ 且 $N_{A_1}(b') = N_{A_1}(c')$. 从而有 $b'a' \in E(G)$, $b'a \notin E(G)$. 令 a_2 为 a 在 A_2 中的一个邻点, 由 (Ω_{10}) 可知, $a_2b', a_2a' \in E(G)$, 从而产生 4-洞 $aa_2a'xa$, 矛盾. 所以, A_1 中一定有某一点全联于 C_1 . $\square$

(Ω_{17}) 设 $i \in [m-2]$, 且 A_i 有一 x -对 $\{u, v\}$, 则 A_i 全联于 $N_{A_{i-1}}(u)$, $B_{i,i+1}$ 独立于 $\{u, v\}$, $B_i = \emptyset$, 且 $N_{A_{i-1}}(u)$ 全联于 $B_{i-1,i}$.

证明 由 (Ω_7) 知第一个结论成立. 因为对任意 $w \in N_{A_{i-1}}(u)$ 和 $b \in B_{i,i+1} \cup B_i$, $uwvbu$ 不是 4-洞, $B_i = \emptyset$, 且 $B_{i,i+1}$ 不含点全联于 $\{u, v\}$. 假设存在 $b \in B_{i,i+1}$ 在 $\{u, v\}$ 有邻点, 不妨设 $bu \in E(G)$. 选取 $a \in N_{A_{i+1}}(u)$, $a' \in N_{A_{i+1}}(v)$. 因 $\{u, v\}$ 是 x -对, 由 (Ω_6) 知 $av \notin E(G)$ 且 $a'u \notin E(G)$. 由 (Ω_{10}) 知, $ba' \notin E(G)$, 从而 $bv \in E(G)$, 矛盾. 假设存在 $a \in N_{A_{i-1}}(u)$ 和 $b \in B_{i-1,i}$, $ab \notin E(G)$. 由 (Ω_{10}) 知, $\{bu, bv\} \subseteq E(G)$, 导致 4-洞 $ubvau$. 所以, (Ω_{17}) 成立. $\square$

(Ω_{18}) $B_{x,y}, B_{0,1}, B_{1,2}, \dots, B_{m-2,m-1}$ 两两相互独立; $B_0, \dots, B_{m-1}$ 两两相互独立; 对所有 $i \in \{0, \dots, m-2\}$ 和 $j \in \{0, \dots, m-1\} \setminus \{i, i+1\}$, $B_{i,i+1}$ 独立于 B_j .

证明 设 $0 \leq i < j \leq m-2$. 由对称性只需验证 $B_i \cup B_{i,i+1}$ 独立于 $B_{j+1} \cup B_{j,j+1}$, B_i 独立于 B_{i+1} , $B_{x,y}$ 独立于 $B_{i,i+1}$.

假设存在相邻点 $u \in B_i \cup B_{i,i+1}$ 和 $v \in B_{j+1} \cup B_{j,j+1}$. 选取 $a_i \in N_{A_i}(u)$, $a_{j+1} \in N_{A_{j+1}}(v)$. 记 $xP_{a_i}a_iuva_{j+1}Q_{a_{j+1}}yx$ 洞为 H . 因为 $H \not\subseteq W$, $\{x, y\} \subseteq H$, 从而 $j-i=1$. 由 $u \in B_i$ 和 $v \in B_{j+1}$ 导致

— theta $3PC(a_i, a_{j+1})$, $u \in B_i$ 且 $v \in B_{j,j+1}$ (或者 $u \in B_{i,i+1}$ 且 $v \in B_{j+1}$) 导致 4-洞, $u \in B_{i,i+1}$ 且 $v \in B_{j,j+1}$ 导致 4-洞或偶轮, 都会有矛盾.

若 $b_i \in B_i$ 与 $b_{i+1} \in B_{i+1}$ 相邻, 由 (Ω_{10}) 知, 存在 $a_i \in A_i$ 与 $a_{i+1} \in A_{i+1}$ 相邻, 导致 4-洞 $b_i b_{i+1} a_{i+1} a_i b_i$, 矛盾.

假若 $b \in B_{x,y}$ 有一个邻点 $b' \in B_{i,i+1}$. 令 a_i 和 a_{i+1} 分别为 b' 在 A_i 和 A_{i+1} 的邻点. 由 (Ω_{10}) 知, $a_i a_{i+1} \in E(G)$, 则 $G[(P_{a_i} \cup Q_{a_{i+1}} \cup \{b, b'\})]$ 是一棱柱或一偶轮, (Ω_{18}) 得证. $\square$

(Ω_{19}) 给定 $b_{x,y} \in B_{x,y}$, 存在 $i \in [m-2]$ 使得 $N_{B_i}(b_{x,y}) \neq \emptyset$, 且 $j \neq i$ 时 $N_{B_j}(b_{x,y}) = \emptyset$.

证明 因为 $N(K) \setminus K$ 的每个点都在 $V(G) \setminus N(K)$ 有邻点, 存在 B_i 使得 $N_{B_i}(b_{x,y}) \neq \emptyset$. 若存在 $j \neq i$ 使得 $N_{B_j}(b_{x,y}) \neq \emptyset$, 则有一 theta $3PC(b_{x,y}, a_j)$, (Ω_{19}) 得证. $\square$

(Ω_{20}) 若 $N_{B_i}(b_{x,y}) \neq \emptyset$, 则 $C_i = \emptyset$, 且 $N_{B_i}(b_{x,y})$ 是一个团.

证明 假设结论不成立, 取相邻点 $a_i \in A_i$ 和 $c_i \in C_i$, 且取 $b_i \in N_{B_i}(b_{x,y})$. 若 $b_i c_i \notin E(G)$, 则有 4-洞 $b_{x,y} b_i a_i c_i b_{x,y}$; 若 $b_i c_i \in E(G)$, 则有偶轮 $(x P_{a_i} a_i b_i b_{x,y} x, c_i)$, (Ω_{20}) 得证. $\square$

(Ω_{21}) 设 $i \in \{0, 1, \dots, m-2\}$ 且 $j \in [m-2]$. 若存在 $c_j \in C_j$ 和 $b \in B_{i,i+1}$ 使得 $bc_j \in E(G)$, 则 $j \in \{i, i+1\}$.

证明 假设结论不成立, 由对称性, 设 $j < i$. 取 $a_j \in N_{A_j}(c_j)$, 记 $Q = Q_{a_j}$ 且令 a_i 和 a_{i+1} 分别为 Q 过 A_i 和 A_{i+1} 的点. 由 (Ω_{15}) 知, $\{ba_i, ba_{i+1}\} \subseteq E(G)$, 从而 $N(c_j) \cup N(b) \setminus \{x, y\}$ 形成一个双星割. 根据定理 1.8 知, 存在一条从 a_{j+1} 到 x 或 y 的路. 因为 $a_{j+1} \in Q$, 所以, G 有一个棱柱 $3PC(xc_jy, a_i ba_{i+1})$ 或者一个 theta $3PC(c_j, a_i)$, 矛盾, (Ω_{21}) 得证. $\square$

(Ω_{22}) 设 $i \in [m-3]$, 则 $C_i = \emptyset$ 或者 $C_{i+1} = \emptyset$.

证明 假设结论不成立, 取 $c_i \in C_i$ 和 $a_i \in N_{A_i}(c_i)$, 令 $a_{i+1} \in A_{i+1}$ 且在某 y -路 Q_{a_i} 上. 同理取 $c_{i+1} \in C_{i+1}$ 和 $a'_{i+1} \in N_{A_{i+1}}(c_{i+1})$, 令 $a'_i \in A_i$ 且在某 x -路 $P_{a'_{i+1}}$ 上. 由 (Ω_{14}) 知, $c_i c_{i+1} \in E(G)$. 因为 G 无 4-洞, 所以, $\{a_i a'_{i+1}, c_i a'_i, c_{i+1} a_{i+1}\} \cap E(G) = \emptyset$.

假定 $a'_{i+1} a_{i+1} \in E(G)$. 当 $a'_i a_i \in E(G)$ 时 $a'_i a_{i+1} \in E(G)$, 或者有 $a_{i-1} \in A_{i-1} \cap N(a_i) \cap N(a'_i)$ 使得 $(a_{i-1} a_i a_{i+1} a'_{i+1} c_{i+1} x P_{a_{i-1}} a_{i-1}, a'_i)$ 是一偶轮, 或者有 $a_{i-2} \in A_{i-2}$ 导致一 theta $3PC(a_{i-2}, a_i)$. 当 $a'_i a_i \notin E(G)$ 时存在与 a_i 和 a'_i 都相邻的某个点 $a_{i-1} \in A_{i-1}$, 从而有一 theta $3PC(a_{i-1}, a'_{i+1})$. 所以, $a'_{i+1} a_{i+1} \notin E(G)$, 从而 $a'_i a_i \in E(G)$ 且 $\{a'_{i+1}, a_{i+1}\}$ 是一 y -对. 这时, 一定有

$$a_{i+2} \in N_{A_{i+2}}(a'_{i+1}) \cap N_{A_{i+2}}(a_{i+1}),$$

导致一 theta $3PC(a_{i+2}, a_i)$. 故 (Ω_{22}) 成立. $\square$

下面证明, 或者 A_i 是团, 或者 A_i 不是团但 A_{i-1} 或 A_{i+1} 之一是团.

(Ω_{23}) 设 $m \geq 8$, $i \in \{3, 4, \dots, m-4\}$. 若 $C_i \neq \emptyset$, 则 A_i 是团. 若 $C_i = \emptyset$, 则下述之一成立:

- $C_{i-1} = C_{i+1} = \emptyset$, A_i 是团;
- $C_{i-1} = \emptyset$ 且 $C_{i+1} \neq \emptyset$, 或者 A_i 是团, 或者 A_i 有一个 x -对且 A_{i+1} 是团;
- $C_{i-1} \neq \emptyset$ 且 $C_{i+1} = \emptyset$, 或者 A_i 是团, 或者 A_i 有一个 y -对且 A_{i-1} 是团;
- $C_{i-1} \neq \emptyset$ 且 $C_{i+1} \neq \emptyset$, A_{i-1} 和 A_{i+1} 都是团.

证明 首先证明, 若 $C_i \neq \emptyset$, 则 A_i 是团. 否则, 由对称性不妨设 A_i 有一 x -对, 由 (Ω_{22}) 知 $C_{i+1} = \emptyset$. 令

$$T = \{x\}, \quad S = A_i, \quad R = \bigcup_{j=i+1}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \cup B_{i,i+1} \cup B_{x,y} \cup \{y\} \cup \bigcup_{j=i}^{m-2} C_j,$$

且令 G' 是以 $S \cup T \cup R$ 为顶点集、以 $E(G[T \cup S \cup R]) \cup E(\{xa | a \in A_i\})$ 为边集的图. 显然,

$$G' \text{ 是无 } \mathcal{A} \text{ 的.} \quad (2.12)$$

下面来验证 G' 无 4-洞且奇可标号.

$$G' \text{ 不含 4-洞.} \quad (2.13)$$

否则, 设 H' 是 G' 的一个 4-洞, 则存在 $a_i \in A_i$ 使得 $xa_i \in E(H')$, 且由 x 和 A_i 的邻点集可知, 存在 $a'_i \in A_i \cap H'$, 使得 $\{a_i, a'_i\}$ 是一 x -对, 即有 $a_{i-1} \in N_{A_{i-1}}(a_i) \cap N_{A_{i-1}}(a'_i)$. 用 a_{i-1} 替代 x , 就得到 G 的一个 4-洞, 所以, (2.13) 成立.

根据定理 1.1, 为证明 G' 是奇可标号图, 只需验证 G' 不含 theta, 不含棱柱, 也不含偶轮. 因为由 G' 含 theta $3PC(x, \cdot)$ 可导出 G 含 theta $3PC(x, \cdot)$ 或者 $3PC(a_{i-1}, \cdot)$. 由 G' 含 theta $3PC(\cdot, \cdot)$ 且 x 是某条路的内点, 将 x 替换成 a_{i-1} 或一条路 $P_{a_{i-1}}$ 后, 则得 G 的一个 theta $3PC(\cdot, \cdot)$ (具体见图 1). 所以, G' 不含 theta.

运用完全类似的方法 (即将 x 替换成 a_{i-1} 或一条路 $P_{a_{i-1}}$), 可以由 G' 的棱柱 (偶轮) 相应得到 G 的棱柱 (偶轮), 所以, G' 也不含棱柱和偶轮. 结合 (2.12) 和 (2.13) 可知, G' 是一个 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图.

因为 $i \leq m-4$, K 不是 G' 的控制集, 由 $|V(G)|$ 的最小性知, 存在点 $v \in V(G') \setminus N_{G'}(K)$ 是 G' 的双单点. 令

$$R' = \bigcup_{j=i+1}^{m-3} A_j \cup \bigcup_{j=i+1}^{m-2} B_j \cup \bigcup_{j=i}^{m-3} B_{j,j+1},$$

易见 $R' \subseteq V(G) \setminus N(K)$, 故 $v \in R$. 由 (Ω_{18}) 和 (Ω_{21}) 知, R' 独立于 $V(G) \setminus V(G')$, 且 $N_G(v) = N_{G'}(v)$. 又因为 R' 中没有点与 x 邻接且在 A_i 中也有邻点, 所以, v 也是 G 的双单点, 这一矛盾说明, 若 $C_i \neq \emptyset$, 则 A_i 是团.

运用同样的方法 (即构造一个新的 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图, 找到它的双单点并验证该点也是 G 的双单点) 可以证明, 当 $C_{i-1} \neq \emptyset$ 且 $C_{i+1} = \emptyset$ 时, 或者 A_i 是团或者 A_i 有一 y -对且 A_{i-1} 是团; 当 $C_{i-1} \neq \emptyset$ 且 $C_{i+1} \neq \emptyset$ 时, A_{i-1} 和 A_{i+1} 都是团, 故 (Ω_{23}) 成立. $\square$

(Ω_{24}) 设 $i \in \{2, \dots, m-2\}$ 使得 A_{i-1} 是团. 如果 A_i 不含 y -对, 则 A_{i-1} 某些点全联于 A_i . 如果 A_{i-2} 不含 x -对, 则 A_{i-1} 某些点全联于 A_{i-2} . 如果 A_i 不含 y -对且 A_{i-2} 不含 x -对, 则 A_{i-1} 某些点全联于 $A_{i-2} \cup A_i$.

图 1 上一排为 G' 中的 theta, 下一排为替换后 G 中的 theta

证明 设 A_i 不含 y -对, 且设 A_{i-1} 没有点全联于 A_i . 取 $a_{i-1} \in A_{i-1}$ 在 A_i 中邻点最多, 令 $N = N_{A_i}(a_{i-1})$, $a'_i \in A_i \setminus N$ 且 $a'_{i-1} \in N_{A_{i-1}}(a'_i)$, 则存在 $a_i \in N \setminus N(a'_{i-1})$. 由 (Ω_{17}) 知, A_i 是团, 从而, $a_{i-1}a_i a'_i a'_{i-1}$ 是一个 4-洞, 矛盾. 由对称性可知前两个结论都成立.

现假设 A_i 不含 y -对且 A_{i-2} 不含 x -对, 取 a 和 a' 分别为 A_{i-1} 中全联于 A_i 和 A_{i-2} 的点, 且设 a 不全联于 A_{i-2} 且 a' 不全联于 A_i . 取 $a_i \in A_i \setminus N(a')$, $a_{i-2} \in A_{i-2} \setminus N(a)$, $a_{i-2} \in N_{A_{i-2}}(a)$, $a'_i \in N_{A_i}(a')$, 及 $a_{i+1} \in N_{A_{i+1}}(a_i)$. 由于 a 全联于 A_i 且 a' 全联于 A_{i-2} , 因此, $\{a'a_{i-2}, aa'_i\} \subseteq E(G)$. 因为 A_i 无 y -对且 A_{i-2} 无 x -对, 所以, $\{a'_{i-2}a_{i-2}, a_i a'_i\} \subseteq E(G)$. 当 $a'_i a_{i+1} \in E(G)$ 时, $(xP_{a'_{i-2}} a'_{i-2} a' a a_i a_{i+1} Q_{a_{i+1}} y x, a'_i)$ 是一偶轮, 而 $a'_i a_{i+1} \notin E(G)$ 时, $(xP_{a_{i-2}} a_{i-2} a' a'_i a_i a_{i+1} Q_{a_{i+1}} y x, a)$ 是一偶轮. 故 (Ω_{24}) 成立. $\square$

下面再引入几个记号. 令 $\mathcal{P} = \bigcup_{j=1}^{m-2} C_j$. 由 (Ω_4) 知, $C = \mathcal{P} \cup B_{x,y}$. 给定 $i \in [m-2]$, 定义 $A'_i = \{w : w \in A_i, N_{\mathcal{P}}(w) \neq \emptyset\}$. 由 B_i 和 $B_{i,i+1}$ 可完全类似地定义 B'_i 和 $B'_{i,i+1}$. 给定 $a \in A_{i-1}$, 令 $M(a) = N_{A_i}(a)$, $M'(a) = N_{A'_i}(a)$, $Q(a) = N_{B_{i-1,i}}(a)$, 及 $Q'(a) = N_{B'_{i-1,i}}(a)$. 给定 $b \in B_{i-1,i}$, 令 $M(b) = N_{A_i}(b)$, $M'(b) = N_{A'_i}(b)$.

(Ω_{25}) 设 $i \in \{3, 4, \dots, m-4\}$ 且 A_{i-1} 无 y -对. 取 $w \in A_{i-1}$, 先最大化 $|M'(w)|$ 再最大化 $|Q'(w)|$. 设 $B'_{i-1,i} \neq Q'(w)$, 则存在 $w' \in A_{i-1}$, $b, b' \in B'_{i-1,i}$, 以及 $p \in C_i$ 使得 $bw w' b'$ 是一条路, 而且

- (i) $M(w) = M(w') = M(b) = M(b') = A_i$;
- (ii) $N_{\mathcal{P}}(b) \subseteq N_{\mathcal{P}}(b')$, 或者 $N_{\mathcal{P}}(b') \subseteq N_{\mathcal{P}}(b)$;
- (iii) p 全联于 $A_i \cup \{b, b'\}$.

证明 令 b' 是 w 在 $B'_{i-1,i}$ 的非邻点, 取 $w' \in N_{A_{i-1}}(b')$. 由 (Ω_{10}) 知 b' 全联于 $M(w)$, 所以 w' 也全联于 $M(w)$. 由 w 的选取知 $Q'(w)$ 不是 $Q'(w')$ 的真子集, 取 $b \in Q'(w) \setminus Q'(w')$. 因为 A_{i-1} 无 y -对且 $M(w) \subseteq M(w')$, 所以, $ww' \in E(G)$. 又因为 $ww' b' bw$ 不是 4-洞, $bb' \notin E(G)$, 故而有路 $bw w' b'$.

因为 $bw' \notin E(G)$, 由 (Ω_{10}) 知 $M(w') \subseteq M(b)$. 类似地有 $M(w) \subseteq M(b')$. 再由 (Ω_{10}) , $M(b) \subseteq M(w)$ 且 $M(b') \subseteq M(w')$, 从而, 有

$$M(w) = M(w') = M(b) = M(b'). \quad (2.14)$$

假若 (ii) 不成立. 取 $p \in (N(b) \setminus N(b')) \cap \mathcal{P}$ 和 $p' \in (N(b') \setminus N(b)) \cap \mathcal{P}$. 若 $pp' \notin E(G)$, 由 (Ω_{14}) 知 $m = 7$ 且 $\{pw, p'w'\} \subseteq E(G)$, 一定存在 $a_i \in A_i \cap M(w)$, 从而, 有偶轮 $(pba_i w' p' xp, w)$. 所以, $pp' \in E(G)$. 当 $\{p, p'\} \subseteq C_{i-1}$ 时有 4-洞 $wpp'w'w$, 当 $p \in C_{i-1}$ 且 $p' \in C_i$ 时有 4-洞 $pba_i p'p$, 当 $p \in C_i$ 且 $p' \in C_{i-1}$ 时有 4-洞 $p'b'a_i pp'$, 当 $\{p, p'\} \subseteq C_i$ 时有偶轮 $(wbpp' b' w' w, a_i)$. 所以 (ii) 成立.

因为 $\{b, b'\} \subseteq B'_{i-1,i}$, 所以, $N_{\mathcal{P}}(b) \neq \emptyset$ 且 $N_{\mathcal{P}}(b') \neq \emptyset$, 一定存在点 $p \in \mathcal{P}$ 全联于 $\{b, b'\}$. 因为 $\{b, b'\}$ 全联于 $M(w)$, 且对任意 $a \in M(w)$, $bab'pb$ 不是 4-洞, 所以 p 全联于 $M(w)$. 所以, $p \in C_i$, (iii) 成立.

假定 A_i 有一点 a 与 b 不相邻, 则 $ab' \notin E(G)$. 取 $v \in N_{A_{i-1}}(a)$. 由 (Ω_{10}) 知, $\{bv, b'v\} \subseteq E(G)$, 从而, 有 4-洞 $bvb'pb$, 故 $M(b) = A_i$. 由 (2.14) 知 (i) 成立, 从而, (Ω_{25}) 得证. $\square$

(Ω_{26}) 设 $i \in \{3, 4, \dots, m-4\}$ 且 A_i 是团. 若 A_{i-1} 无 y -对且 $B_i = \emptyset$, 则 A_{i-1} 的某些点全联于 $A'_i \cup B'_{i-1,i}$.

证明 先来证明

$$C_i \text{ 中没有点全联于 } A_i. \quad (2.15)$$

假设结论不成立, 取 $p \in C_i$ 全联于 A_i . 因 $m \geq 7$ 且 p 全联于或独立于 A_3 , 故 p 必全联于 $C \setminus \{p\}$. 令

$$S = \{y\} \cup A_i \cup C, \quad T = \{x\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} (A_j \cup B_j) \cup \bigcup_{j=0}^{i-1} B_{j,j+1},$$

且令

$$U = \bigcup_{j=i+1}^{m-2} (A_j \cup B_j) \cup \bigcup_{j=i}^{m-2} B_{j,j+1},$$

则 p 全联于 $S \setminus \{p\}$. 因为 $B_i = \emptyset$, $V(G) = S \cup T \cup U$, 显然, T 独立于 U . 这时 S 是以 p 为中心的星割集, 且 $x \notin S$, 与定理 1.6 矛盾, 故 (2.15) 成立.

选取点 $w \in A_{i-1}$, 先最大化 $|M'(w)|$, 再最大化 $|Q'(w)|$. 假设 $A'_i \not\subseteq M'(w)$ 且令 $a \in A'_i$ 为 w 的一个非邻点. 由于 A_i 是团, a 必全联于 $M(w)$. 取点 $p' \in N_{C_i}(a)$, 则 p' 不能全联于 A_i . 取 $a' \in A_i$ 为 p' 的一个非邻点, $w' \in N_{A_{i-1}}(a')$, 且在可能的情形下尽可能选取 a' 和 w' 使得 $w' = w$. 下面将证明

$$w'a \in E(G). \quad (2.16)$$

假设不然, 若存在 $a_{i+1} \in A_{i+1} \cap N(a') \cap N(a)$, 则有一棱柱 $3PC(a'aa_{i+1}, xp'y)$, 否则, 令 a'_{i+1} 和 a_{i+1} 分别为 a' 和 a 在 A_{i+1} 的邻点, 则 $\{a'_{i+1}, a_{i+1}\}$ 是一 y -对, 取 $a_{i+2} \in N_{A_{i+2}}(a_{i+1}) \cap N_{A_{i+2}}(a'_{i+1})$, 出现一 theta $3PC(a', a_{i+2})$. 所以 (2.16) 成立, 从而 $w' \neq w$. 同理可证, $p'm \in E(G)$, 且 w' 全联于 $M(w)$. 从而, w' 全联于 $M(w) \cup \{w\}$, 与 w 的选取矛盾. 所以, w 必全联于 A'_i .

若 $B'_{i-1,i} \neq Q'(w)$, 令 w', b, b' 和 p 为 (Ω_{25}) 所定义诸点, 则 p 全联于 A_i , 与 (2.15) 矛盾. 故 $B'_{i-1,i} = Q'(w)$, 从而 w 全联于 $A'_i \cup B'_{i-1,i}$. (Ω_{26}) 得证. $\square$

(Ω_{27}) 设 $i \in \{3, 4, \dots, m-4\}$ 使得 A_i 是团且 A_{i-1} 无 y -对, 则 A_{i-1} 某点全联于 $B'_{i-1,i}$.

证明 反之设这类点不存在. 由 (Ω_{26}) 知, $B_i \neq \emptyset$. 根据 (Ω_{25}) 可知, 存在 $w_1, w_2 \in A_{i-1}$, $b_1, b_2 \in B'_{i-1,i}$, $p \in C_i$, 满足: bw_1w_2b' 是一条路, $M(w_1) = M(w_2) = M(b) = M(b') = A_i$, $N_{\mathcal{P}}(b) \subseteq N_{\mathcal{P}}(b')$ 或者 $N_{\mathcal{P}}(b') \subseteq N_{\mathcal{P}}(b)$, 而且 p 全联于 $A_i \cup \{b, b'\}$.

因为 A_{i-1} 无 y -对, 由 (Ω_{17}) 知 $\{w_1, w_2\}$ 全联于 $A_{i-1} \setminus \{w_1, w_2\}$. 记 $R_1 = P_{w_1}$, $R_2 = P_{w_2}$. 我们证明下面的命题:

命题 2.1 存在 s 和 t 使得 $\{s, t\} = \{1, 2\}$, 以及从 b_s 到 $B_{i,i+1}$ 的路 Q 独立于 $\{w_t, b_t\}$ 且 $Q^* \subseteq B_{i-1,i} \cup B_i$.

为证明这一命题, 定义 $S_1 = N(\{b_1, w_1\})$, $S_2 = N(\{b_2, w_2\})$, $U = \{x, y\} \cup C \cup \bigcup_{j=i+1}^{m-2} (A_j \cup B_j) \cup \bigcup_{j=i}^{m-2} B_{j,j+1}$. 由定理 1.7 知, S_2 不是 G 的双星割集, 所以存在一条 (b_1, U) -路 Q_2 使得 $Q_2 \cap S_2 = \emptyset$. 令 u 为 Q_2 在 U 中的端点. 因为 $B_{i-1,i} \cup B_i$ 独立于 $V(G) \setminus (U \cup S_2)$ (根据 (Ω_{18})), $Q_2 \setminus \{u\} \subseteq B_{i-1,i} \cup B_i$, 所以, $u \in B_{i,i+1} \cup C$.

若 $u \notin C$, 取 $s = 1$, 令 $Q = Q_2$, 易见命题 2.1 成立. 所以 $u \in C$. 取 q' 为 Q_2 上距 u 最近且与 w_1 相邻的点, 令 $Q' = Q_2[u, q']$, $H = w_1q'Q'uxR_1w_1$, 则 $u \in B_{x,y}$, 或者 $u \in C_j$ 且 $j \geq i$, 或者 $u \in C_{i-1}$, 因而, $j < i-1$ 时 $u \notin C_j$. 因为 $b_2 \in V(G) \setminus N(H)$, H 是一非控制洞, 矛盾. 故命题 2.1 成立.

设 Q 是命题 2.1 中定义的路, 取 $a \in N_{A_{i+1}}(u)$. 令 $T = Q_a$, 取 $q' \in N_Q(w_s)$ 在 Q 上距 u 最近且令 $Q' = Q[u, q']$. 由 (Ω_{18}) 知, $xR_s w_s q' Q' u a T y x$ 是一个洞且不含 b_t 的邻点, 与 (Ω_2) 矛盾, (Ω_{27}) 得证. $\square$

(Ω_{28}) $m < 9$.

证明 假定 $m \geq 9$, 取 $i \in \{4, \dots, m-5\}$. 由对称性及 (Ω_6) , 不妨假设 A_i 无 y -对, 则有下列情形出现: $(\Omega_{28}(1)) C_{i+1} \neq \emptyset, C_i = C_{i+2} = \emptyset$, 且 A_{i+1} 是团; $(\Omega_{28}(2)) C_{i+1} = C_{i+2} = \emptyset$; $(\Omega_{28}(3)) C_{i+1} = \emptyset$ 且 $C_{i+2} \neq \emptyset$.

先考虑情形 $(\Omega_{28}(1))$. 令 $B_{x,y}^* = \{b_{x,y} \mid N_{B_j}(b_{x,y}) \neq \emptyset, j \geq i\}$,

$$S = A_i, \quad T = \{y\} \cup \bigcup_{j=i}^{m-2} C_j \cup B_{x,y}^*, \quad \text{且} \quad R = \bigcup_{j=i}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \setminus A_i,$$

G' 是以 $S \cup T \cup R$ 为顶点集、以 $E(G[S \cup T \cup R]) \cup \{st \mid s \in S \text{ 且 } t \in T\}$ 为边集的图. 完全类似于 (Ω_{23}) 的过程, 可验证 G' 是 $(4\text{-洞}, \mathcal{A})$ -无奇可标号图. 由 (Ω_{26}) 和 (Ω_{27}) 知, 存在 $t \in A_i$ 使得 $B_{i+1} \neq \emptyset$ 时, t 全联于 $B'_{i,i+1}$, 且 $B_{i+1} = \emptyset$ 时全联于 $A'_{i+1} \cup B'_{i,i+1}$. 令 $K' = \{y, t\}$. 因 K' 独立于 A_{m-3} , K' 是 G' 的非控制团, 故 $V(G') \setminus N_{G'}(K')$ 中存在点 v , 是 G' 的双单纯点. 易验证

$$v \in \bigcup_{j=i+1}^{m-3} A_j \cup \bigcup_{j=i+1}^{m-2} B_j \cup \bigcup_{j=i}^{m-3} B_{j,j+1}.$$

因 $V(G) \setminus V(G') = \{x\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} (A_j \cup B_j \cup B_{j-1,j}) \cup B_{i-1,i} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j \cup (B_{x,y} \setminus B_{x,y}^*)$, 故 $v \in V(G) \setminus N(K)$, $N_G(v) = N_{G'}(v)$. 记 $N = N_G(v)$, 因 v 不是 G 的双单纯点, 故 $G[N] \neq G[N']$. 由 $y \notin N$ 及 G' 的构造可知 $N \cap A_i \neq \emptyset, N \cap C \neq \emptyset$. 所以, $v \in A_{i+1} \cup B_{i,i+1}$.

由 (Ω_{18}) 和 (Ω_{21}) 知, $N \cap C \subseteq C_{i+1} \subseteq \mathcal{P}$. 取 $p \in N \cap C$. 因为 $vt \notin E(G)$ 且 $N_{\mathcal{P}}(v) \neq \emptyset$, 由 t 的选取知 $v \in A_{i+1}$ 且 $B_{i+1} \neq \emptyset$. 取 $b \in B_{i+1}$, 且取 $a_i \in A_i$ 和 $a_{i+2} \in A_{i+2}$ 使得 $\{a_i v, a_{i+2} v\} \subseteq E(G)$. 显然, $bv \in E(G)$, 从而 a_i, a_{i+2} 和 b 是 3 个互不相邻的点, 与 v 是 G' 的双单纯点矛盾. 所以, $(\Omega_{28}(1))$ 不会发生.

用完全类似的方法在情形 $(\Omega_{28}(2))$ 和 $(\Omega_{28}(3))$ 同样可以导出矛盾, 这里不一一列出. (Ω_{28}) 证毕. $\square$

(Ω_{29}) $m \neq 8$.

证明 假定 $m = 8$. 由 (Ω_{23}) 知, 或者 A_3 是团, 或者 A_3 有 x -对且 A_4 是团. 有 4 种可能的情形: $(\Omega_{29}(1)) A_3$ 和 A_4 都是团; $(\Omega_{29}(2)) A_3$ 是团且 A_4 有一 y -对; $(\Omega_{29}(3)) A_3$ 是团且 A_4 有一 x -对; $(\Omega_{29}(4)) A_3$ 有一 x -对且 A_4 是团.

在情形 $\Omega_{29}(1)$ 下, $C_3 = \emptyset$ 或 $C_4 = \emptyset$, 又可以分为 3 种可能性. 为简单起见, 记 $b_{x,y}, b_{x,y}^*, b_3$ 和 b_4 分别表示 $B_{x,y}, B_{x,y}^*, B_3$ 和 B_4 中的点, 集合 $B_{x,y}^* \subset B_{x,y}$ 的定义将在后面列出.

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 = \emptyset & \left\{ \begin{array}{l} \text{任给 } b_{x,y} \text{ 和 } b_4, b_{x,y}b_4 \notin E(G), \\ \text{存在 } b_{x,y} \text{ 和 } b_4, b_{x,y}b_4 \in E(G), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\Omega_{29}(1.1.1)) \\ (\Omega_{29}(1.1.2)) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_3 = \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset & \left\{ \begin{array}{l} \text{任给 } b_{x,y} \text{ 和 } b_3, b_{x,y}b_3 \notin E(G), \\ \text{存在 } b_{x,y} \text{ 和 } b_3, b_{x,y}b_3 \in E(G), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\Omega_{29}(1.2.1)) \\ (\Omega_{29}(1.2.2)) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_3 = \emptyset, \quad C_4 = \emptyset & \left\{ \begin{array}{l} \text{任给 } b_{x,y}, b_3, b_{x,y}^* \text{ 和 } b_4, \{b_{x,y}b_3, b_{x,y}^*b_4\} \cap E(G) = \emptyset, \\ \text{存在 } b_{x,y} \text{ 和 } b_3, b_{x,y}b_3 \in E(G), \\ \text{存在 } b_{x,y}^* \text{ 和 } b_4, b_{x,y}^*b_4 \in E(G). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\Omega_{29}(1.3.1)) \\ (\Omega_{29}(1.3.2)) \\ (\Omega_{29}(1.3.3)) \end{array}$$

若 $(\Omega_{29}(2))$ 出现, 又有两种可能性: $(\Omega_{29}(2.1))$ $C_3 \neq \emptyset$, 或者 $(\Omega_{29}(2.2))$ $C_3 = \emptyset$. 若 $(\Omega_{29}(4))$ 出现, 也有两种可能性: $(\Omega_{29}(4.1))$ $C_4 \neq \emptyset$, 或者 $(\Omega_{29}(4.2))$ $C_4 = \emptyset$.

在 $(\Omega_{29}(1.1.1))$ 、 $(\Omega_{29}(1.2.2))$ 、 $(\Omega_{29}(1.3.1))$ 、 $(\Omega_{29}(1.3.2))$ 和 $(\Omega_{29}(4.1))$ 情形下, 令 $B_{x,y}^* = \{B_{x,y} \mid N(b_{x,y}) \cap B_j \neq \emptyset, j \geq 3\}$, $K' = \{t, y\}$ (其中 $t \in A_3$), 且令

$$S = A_3, \quad T = \{y\} \cup \bigcup_{j=3}^{m-2} C_j \cup B_{x,y}^*, \quad R = \bigcup_{j=3}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \setminus A_3.$$

在 $(\Omega_{29}(1.1.2))$ 、 $(\Omega_{29}(1.2.1))$ 、 $(\Omega_{29}(1.3.3))$ 和 $(\Omega_{29}(2.1))$ 情形下, 令 $B_{x,y}^* = \{B_{x,y} \mid N(b_{x,y}) \cap B_j \neq \emptyset, j \leq 4\}$, $K' = \{t, x\}$ (其中 $t \in A_4$), 且令

$$S = A_4, \quad T = \{x\} \cup \bigcup_{j=1}^4 C_j \cup B_{x,y}^*, \quad R = \bigcup_{j=1}^4 (A_j \cup B_j \cup B_{j-1,j}) \setminus A_4.$$

若情形 $(\Omega_{29}(2.2))$ 出现, 令

$$T = \{y\}, \quad S = A_4, \quad R = \bigcup_{j=1}^3 (A_j \cup B_j \cup B_{j-1,j} \cup B_{3,4} \cup B_{x,y} \cup \{x\}) \cup \bigcup_{j=1}^4 C_j.$$

若 $(\Omega_{29}(3))$ 出现, 令

$$T = \{x\}, \quad S = A_4, \quad R = \bigcup_{j=5}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \cup B_{4,5} \cup B_{x,y} \cup \{y\} \cup \bigcup_{j=4}^{m-2} C_j.$$

若 $(\Omega_{29}(4.2))$ 出现, 令 $K' = \{x, y\}$,

$$T = \{x\}, \quad S = A_3, \quad R = \bigcup_{j=4}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \cup B_{3,4} \cup B_{x,y} \cup \{y\} \cup \bigcup_{j=3}^{m-2} C_j.$$

令 G' 是以 $S \cup T \cup R$ 为点集、以 $E(G[S \cup T \cup R]) \cup \{st : s \in S, t \in T\}$ 为边集的图. 易验证 G' 是 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图, K' 是 G' 的非控制团. 故 $V(G') \setminus N_{G'}(K')$ 有一点 v 是 G' 的双单点, 同样也是 G 的双单点, (Ω_{29}) 得证. $\square$

(Ω_{30}) 若 $m = 7$, 则 C 是团.

证明 假定 $m = 7$ 但 C 不是团, 取 $c_1, c_2 \in C$ 且 $c_1 c_2 \notin E(G)$. 由 (Ω_1) 知, 存在 $c_1 c_2$ -路 P 使得 $P^* \subseteq V(G) \setminus N(K)$. 首先证明

$$N(K) = K \cup A_1 \cup A_5 \cup C_3. \quad (2.17)$$

由 (Ω_{14}) 可知, $V(P) \cup K$ 是控制集, 故而 $B_1 \cup B_{1,2} \cup B_2 \cup B_4 \cup B_{4,5} \cup B_5 = \emptyset$, P 的长度为 3 且 $P^* \subseteq A_3$, 还有 $c_1, c_2 \in C_3$. 由 (Ω_1) 、 (Ω_{18}) 和 (Ω_{21}) 知, $B_{0,1} = B_{5,6} = C_1 = C_5 = \emptyset$.

令 $P = c_1 a_3 a'_3 c_2$. 假定 $B_{x,y} \neq \emptyset$, 选取 $p \in B_{x,y}$. 由 (Ω_1) 知, p 在 $V(G) \setminus N(K)$ 有邻点, 设为 d . 显然, $d \in B_{2,3} \cup B_3 \cup B_{3,4}$. 由对称性不妨设 $d \in B_{2,3} \cup B_3$. 由 (Ω_{18}) 知, $d \in B_3$. 若 $c_1 d \notin E(G)$, 则有 4-洞 $c_1 p d a_3 c_1$, 故而 $c_1 d \in E(G)$. 同理, $c_2 d \in E(G)$, 从而有偶轮 $(c_1 y c_2 a'_3 a_3 c_1, d)$. 所以, $B_{x,y} = \emptyset$, 即 (2.17) 成立.

下面证明

$$A_3 \text{ 是团.} \quad (2.18)$$

否则, 不妨设 A_3 有一 x -对. 令 $T = \{x\}$, $S = A_3$, $R = A_4 \cup A_5 \cup B_{3,4} \cup C_3 \cup \{y\}$, 且令 G' 是以 $S \cup T \cup R$ 为顶点集、以 $E(G[S \cup T \cup R]) \cup \{st : s \in S \text{ 且 } t \in T\}$ 为边集的图. 运用 (Ω_{25}) 同样的方法可验证 G' 是 $(4\text{-洞}, \mathcal{A})$ -无奇可标号图. 因为 K 是 G' 的非控制团, 故存在点 $v \in V(G') \setminus N_{G'}(K)$ 是 G' 的双单纯点, 同样也是 G 的双单纯点. 所以, (2.18) 成立.

令 $i \in \{1, 2\}$, $D_i = N_{A_3}(c_i)$. 由于对任给 $a \in A_3$, $c_1 x c_2 a c_1$ 不是 4-洞, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. 因为 A_3 是团, D_1 全联于 D_2 . 进一步有

$$(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \setminus (D_1 \cup D_2) \text{ 全联于 } D_1 \cup D_2. \quad (2.19)$$

假设不是这样, 取不相邻的点 $a \in (A_2 \cup A_3 \cup A_4) \setminus (D_1 \cup D_2)$ 和 $d \in D_1 \cup D_2$. 由对称性不妨设 $d \in D_2$. 因为 A_3 是团, $a \in A_2 \cup A_4$, 不妨设 $a \in A_4$. 选取 $d_1 \in D_1$, 则有路 $c_1 d_1 d c_2$. 由 (Ω_{14}) 知, $\{x, y, c_1, c_2, d_1, d\}$ 是 G 的控制集, 因而 $ad_1 \in E(G)$. 任选 $a_5 \in N_{A_5}(a)$, 则有一 theta $3PC(d_1, y)$. 所以, (2.19) 成立.

下面再证

$$D_1 \text{ 全联于 } B_{2,3} \cup B_{3,4}. \quad (2.20)$$

否则, 令 $d_1 \in D_1$, 且由对称性不妨设 $B' = B_{2,3} \setminus N(d_1) \neq \emptyset$. 因为 $N(B_{2,3}) \subseteq B_{2,3} \cup A_2 \cup A_3 \cup B_3 \cup C_3$ 且 d_1 全联于 $A_2 \cup A_3 \cup B_3$, 由定理 1.7 可知, $N(d_1)$ 不是满星割, 故而存在相邻的点 $b \in B'$ 和 $c \in C_3 \setminus N(d_1)$. 由于对任意 $a_2 \in N_{A_2}(b)$, $bc_1 d_1 a_2 b$ 不是 4-洞, $bc_1 \notin E(G)$. 若 $cc_1 \notin E(G)$, 则有一 theta $3PC(x, a_2)$, 故而 $cc_1 \in E(G)$. 因对任意 $d_2 \in D_2$, $c_1 c d_2 d_1 c_1$ 不是 4-洞, 故 c 独立于 D_2 . 又因为 $bc \in E(G)$, $N_{A_3}(b) = N_{A_3}(c)$, 故而 b 独立于 D_2 . 同理, $cc_2 \in E(G)$ 且 c 独立于 D_1 . 因为 $c \in C_3$, 所以存在 $d \in N_{A_3}(c) \setminus D_1$, 导致一 4-洞 $c_1 c d d_1 c_1$. 所以 (2.20) 成立.

由于 K 不是 $G' = G - d_1$ 的控制团, 因此存在点 $v \in V(G') \setminus N_{G'}(K)$ 是 G' 的双单纯点. 显然, $v \in V(G) \setminus N(K)$. 因 v 不是 G 的双单纯点, 故 $vd_1 \in E(G)$, 且存在点 n 使得 $d_1 n \notin E(G)$ 且 $nv \in E(G)$. 由 $v \in N(d_1) \setminus N(K)$ 知, $v \in A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup B_{2,3} \cup B_3 \cup B_{3,4}$. 若 $v \in B_{2,3} \cup B_3$, 由 (Ω_{18}) 知 $n \in N(K)$, 故而 $n \in C_3$. 若 $v \in B_{2,3}$, 由 (Ω_{15}) 和 $vd_1 \in E(G)$ 知 $nd_1 \in E(G)$, 与 $nd_1 \notin E(G)$ 矛盾. 若 $v \in B_3$, 则有偶轮 $(xa_1 a_2 d_1 v n x, a'_3)$, 其中 $a'_3 \in N_{A_3}(n)$ 且 $a_2 \in N_{A_2}(a'_3)$. 同理可证, $v \notin B_{3,4}$. 所以, $v \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

假设 $v \in A_2$, 则有 $N(v) \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_{2,3}$. 因为 $N_{A_1}(v) \neq \emptyset$ 且 v 是 G' 的双单纯点, $N_{A_2}(v) = N_1 \cup N_2$, 其中 $N_1 \cup (N_{G'}(v) \cap A_1)$ 和 $N_2 \cup (N_{G'}(v) \cap (A_3 \cup B_{2,3}))$ 都是团. 由于 d_1 全联于 $A_2 \cup A_3 \cup B_{2,3}$, $N_2 \cup (N_G(v) \cap (A_3 \cup B_{2,3})) = \{d_1\} \cup N_2 \cup (N_{G'}(v) \cap (A_3 \cup B_{2,3}))$ 是一个团, 从而 v 也是 G 的双单纯点. 这一矛盾说明 $v \notin A_2$. 同理可证 $v \notin A_4$. 故而 $v \in A_3$. 鉴于 $nv \in E(G)$ 且 $nd_1 \notin E(G)$, $n \in C_3$. 这样一来, v 有 3 个互不相邻的邻点分别处于 A_2 、 C_3 和 A_4 中. 这一矛盾最后证明了 (Ω_{30}) 成立. $\square$

(Ω_{31}) 设 S 是一 5-洞, 点 v 全联于 S , 且令 A 是 $G - S \cup \{v\}$ 的一个连通子图使得 S 中某 3 个连续点都在 A 中有邻点, 则 $N_A(v) \neq \emptyset$.

证明 用反证法. 设 $S = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_1$, 且 P 是连接 S 上两个不相邻点的路使得 $|P|$ 最小且 $P^* \subseteq A$. 显然, $|P| \geq 3$. 不妨设 P 的端点为 c_1 和 c_3 . 先来证明

$$\{c_4, c_5\} \text{ 不独立于 } P^*. \quad (2.21)$$

如若不然, 取 A 为满足上述性质的极小子图. 当 $N_{P^*}(c_2) \neq \emptyset$ 时有偶轮 $(c_1 P c_3 v c_1, c_2)$ 或者 $(c_1 P c_3 c_4 c_5 c_1, c_2)$, 当 $N_{P^*}(c_2) = \emptyset$ 时有一 theta $3PC(c_1, c_3)$. 故 (2.21) 成立.

由对称性和 $|P|$ 的最小性, 不妨设 c_1 和 c_5 有一个公共邻点 $p \in P^*$ 且 p 是 c_5 在 P^* 的唯一邻点.

若 c_2 有一个邻点 $p' \in P^*$, 则 p' 是 c_2 在 P^* 的唯一邻点. 又因为 c_4 在 P^* 没有邻点 (否则与 P 的选取矛盾), 则有一棱柱 $3PC(p c_1 c_5, p' c_2 c_3)$, 矛盾. 由对称性, 设 c_2 和 c_4 都在 P^* 中无邻点.

令 D 是 A 的一个极小连通子图使得 $P^* \subseteq D$ 且 $\{c_2, c_4\}$ 不独立于 D . 若 c_2 和 c_4 都在 D 中有邻点, 由 $|D|$ 的极小性可知, 存在 $d \in D$ 使得 $c_2 d c_4 v c_2$ 是一 4-洞, 矛盾. 由对称性不妨设 $N_D(c_4) \neq \emptyset$ 且 $N_D(c_2) = \emptyset$. 取 $q \in V(D)$, 且取 $c_4 q$ -路 Q 使得 $Q^* \subseteq V(D)$ 满足 $N_{P^*}(q) \neq \emptyset$ 且 Q 的其他点都在 P^* 中无邻点. 由 A 的极小性可知, q 在 P^* 只有一个邻点, 设为 p' , 满足 $p' c_3 \in E(G)$.

若 $N_{Q-c_4}(c_5) \neq \emptyset$, 则 $A-p$ 是 $G-S \cup \{v\}$ 的连通子图且 c_3, c_4 和 c_5 都在 $A-p$ 中有邻点 (与 A 的极小性矛盾), 所以, $N_{Q-c_4}(c_5) = \emptyset$. 若 $N_{Q-c_4}(c_3) = \emptyset$, 则有一 theta $3PC(p', c_4)$, 故 $N_{Q-c_4}(c_3) \neq \emptyset$. 若 $N_{Q-c_4}(c_1) = \emptyset$, 则 $(c_1 P p' q Q c_4 v c_1, c_3)$ 或 $(c_5 P p' q Q c_4 c_5, c_3)$ 是一偶轮, 故 $N_{Q-c_4}(c_1) \neq \emptyset$.

令 q' 是 c_1 在 Q 上的邻点使得路 $q-Q-q'$ 不含 c_1 的其他邻点. 因为 $c_1 q' c_4 v c_1$ 不是 4-洞, $c_4 q' \notin E(G)$, 一定有 $c_1 c_3$ -路 T 使得 $T^* \subseteq V(q-Q-q') \cup \{p'\}$ 且 c_4 和 c_5 都在 T^* 中无邻点, 从而导致一 theta $3PC(c_1, c_3)$. 所以 (Ω_{31}) 成立. $\square$

(Ω_{32}) 设 $u \in V(G) \setminus N(K)$, 且设 $v \in V(G) \setminus (N(K) \cup \{u\})$ 是 $G-u$ 的一个双单纯点, 则 $N_G(v) \setminus N_G(u)$ 不是团.

证明 记 $G' = G - u$. 假定 $N_G(v) \setminus N_G(u)$ 是一个团. 令 $N_{G'}(v) = N_1 \cup N_2$ 使得 u 在 N_1 和 N_2 中都有邻点和非邻点, 而且 N_1 和 N_2 都是 G' 的团. 令

$$N_{11} = N_1 \setminus N(u), \quad N_{21} = N_2 \setminus N(u), \quad N_{12} = N_{N_1}(u), \quad N_{22} = N_{N_2}(u).$$

因为 v 不是 G 的双单纯点, 存在 $a' \in N_{11}$, $a \in N_{12}$, $b \in N_{22}$, $b' \in N_{21}$, 使得 $a u b b' a' a$ 是一个 5-洞. 设 F 是 $G - N(v)$ 包含 $\{x, y\}$ 的分支, 由定理 1.7 知, $F = G - N(v)$.

若 $N_F(u) = \emptyset$, 则 $N_G(u) \setminus \{u\} \subseteq N_{G'}(v)$, 从而 u 独立于 K 且是 G 的双单纯点, 矛盾. 故 $N_F(u) \neq \emptyset$. 令 $A = N_G(v) \setminus (N_G(b') \cup \{u\})$, $B = N_G(v) \setminus (N_G(a') \cup \{u\})$, $D = N_G(v) \cap N_G(a') \cap N_G(b')$. 显然, $a \in A$, $b \in B$, $A \subseteq N_{12}$, $B \subseteq N_{22}$ 且 $N_{11} \cup N_{21} \subseteq D$. 所以, u 全联于 $A \cup B$.

由 (Ω_{31}) 知, $N_F(a) = \emptyset$ 或者 $N_F(b) = \emptyset$. 不妨设 $N_F(a) = \emptyset$. 由于任意 $z \in N_B(a)$ 都导致 4-洞 $a a' b' z a$, a 独立于 B , 从而 $N(a) \subseteq A \cup D \cup \{u, v\}$. 又因为对任意 $d, d' \in D \cap N(a)$, $a d b' d' a$ 不是 4-洞, $D \cap N(a)$ 是一个团. 故而 $N_G(a)$ 是两个团 $A \cup \{u, v\}$ 和 $N(a) \cap (D \cup \{a'\})$ 的并集. 但 a 独立于 F 且 $a \in V(G) \setminus N(K)$, 矛盾. (Ω_{32}) 得证. $\square$

(Ω_{33}) $m \neq 7$.

证明 假定 $m = 7$. 由 (Ω_{30}) 可知, C 是一个团. 由 (Ω_{23}) 可知 A_3 是一个团.

首先假设 A_2 不含 y -对. 若存在相邻点 $b_{x,y} \in B_{x,y}$ 和 $b_3 \in B_3$, 令 $t \in A_1$, $K' = \{t, y\}$, $B_{x,y}^* = \{B_{x,y} \mid N(b_{x,y}) \cap B_j \neq \emptyset, j \geq 1\}$, 且令

$$S = A_1, \quad T = \{y\} \cup \bigcup_{j=1}^{m-2} C_j \cup B_{x,y}^*, \quad R = \bigcup_{j=1}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \setminus A_1.$$

若 $B_{x,y}$ 独立于 B_3 , 令 $t \in A_2$, $K' = \{t, y\}$, $B_{x,y}^* = \{B_{x,y} \mid N(b_{x,y}) \cap B_j \neq \emptyset, j \geq 2\}$, 且令

$$S = A_2, \quad T = \{y\} \cup \bigcup_{j=2}^{m-2} C_j \cup B_{x,y}^*, \quad R = \bigcup_{j=2}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \setminus A_2.$$

构造图 G' 使得 $V(G') = S \cup T \cup R$ 且 $E(G') = E(G[S \cup T \cup R]) \cup \{st : s \in S \text{ 且 } t \in T\}$. 完全类似于前面方法, 易验证 G' 是 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图. 因为 K' 不是 G' 的控制团, 所以存在点 $v \in V(G') \setminus N_{G'}(K')$ 是 G' 的双单纯点. 显然, $v \in V(G) \setminus N(K)$ 也是 G 的双单纯点, 矛盾. 由对称性, 可以假设

A_2 一定包含 y -对且 A_4 一定含有 x -对.

由 (Ω_{17}) 可知, $B_2 = B_4 = \emptyset$. 由 (Ω_{24}) 可知, 存在 $a_3 \in A_3$ 全联于 $A_2 \cup A_4$. 由 (Ω_{17}) 可知, a_3 全联于 $B_{2,3} \cup B_{3,4}$. 故 a_3 全联于 $A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_{2,3} \cup B_{3,4}$. 令 $G' = G - a_3$. 因为 K 不是 G' 的控制团, 所以存在 $v \in V(G') \setminus N_{G'}(K)$ 是 G' 的双单纯点且 $va_3 \in E(G)$. 所以, $v \in A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup B_3 \cup B_{2,3} \cup B_{3,4}$. 由对称性不妨设 $v \in A_2 \cup A_3 \cup B_3 \cup B_{2,3}$.

若 $v \in A_3 \cup B_3 \cup B_{2,3}$, 则 $N(v) \setminus N(a_3) \subseteq C$ 是一个团, 与 (Ω_{32}) 矛盾. 故而 $v \in A_2$. 令 $\{a_2, a'_2\}$ 是 A_2 的一个 y -对. 由 (Ω_{11}) 知, $N_{G'}(v) \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_2 \cup B_{1,2} \cup B_{2,3}$. 若 $N_{B_{1,2}}(v) \neq \emptyset$, 选取 $b \in N_{B_{1,2}}(v)$, 由 (Ω_{17}) 知 v 全联于 $A_2 \setminus \{v\}$ 且 b 独立于 $\{a_2, a'_2\}$. 这样一来, b, a_2 和 a'_2 是 3 个互不相邻的顶点, 与 v 是 G' 的双单纯点矛盾. 所以, v 独立于 $B_{1,2}$, 从而, $N(v) \setminus N(a_3) \subseteq A_1$. 鉴于对任意 $n, n' \in N_{A_1}(v)$, $vnxn'v$ 不是 4-洞, 故而 $N_{A_1}(v)$ 是一个团, 与 (Ω_{32}) 矛盾. (Ω_{33}) 得证. $\square$

(Ω_{34}) $m \neq 6$.

证明 假定 $m = 6$. 若 $B_{x,y}$ 有一个点 $b_{x,y}$ 独立于 B_2 , 令 $t \in A_1, K' = \{t, y\}, B_{x,y}^* = \{B_{x,y} \mid N(b_{x,y}) \cap B_j \neq \emptyset, j \geq 1\}$, 且令 $S = A_1, T = \{y\} \cup \bigcup_{j=1}^{m-2} C_j \cup B_{x,y}^*, R = \bigcup_{j=1}^{m-2} (A_j \cup B_j \cup B_{j,j+1}) \setminus A_1$. 否则令 $t \in A_4, K' = \{t, x\}, B_{x,y}^* = \{B_{x,y} \mid N(b_{x,y}) \cap B_j \neq \emptyset, j \leq 4\}$, 且令 $S = A_4, T = \{x\} \cup \bigcup_{j=1}^4 C_j \cup B_{x,y}^*, R = \bigcup_{j=1}^4 (A_j \cup B_j \cup B_{j-1,j}) \setminus A_4$.

构造图 G' 使得 $V(G') = S \cup T \cup R$ 且 $E(G') = E(G[S \cup T \cup R]) \cup \{st : s \in S, t \in T\}$. 易验证 G' 是 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图, 存在 $v \in V(G') \setminus N_{G'}(K')$ 是 G' 的双单纯点, 且 $v \in V(G) \setminus N(K)$. 因 C_2 和 C_3 都是空集, 故 v 也是 G 的双单纯点, 矛盾. (Ω_{34}) 得证. $\square$

至此已证明了 $m = 5$.

(Ω_{35}) 任给 $b \in B_{x,y}, N(b) \cap (V(G) \setminus N(K)) \subseteq B_2$.

证明 取 $b \in B_{x,y}$. 由 (Ω_{18}) 知, b 独立于 $B_{0,1}, \dots, B_{3,4}$. 因为任给 $a_1 \in A_1$ 和 $b_1 \in N_{B_1}(b)$, xa_1b_1bx 是一 4-洞, 故 b 独立于 B_1 . 由对称性知 b 也独立于 B_3 , 根据 (Ω_8) 可得 (Ω_{35}) 成立. $\square$

(Ω_{36}) 假定 A_2 有一 y -对, 则存在 $a_2, a'_2 \in A_2, a_1 \in N_{A_1}(a_2), p \in N(x) \cup N(y)$, 以及一条 a'_2p -路 P 满足下述性质:

- (i) P 独立于 $\{a_1, a_2\}$, 且 $P \cap C_3 = \emptyset$;
- (ii) $P \setminus \{p\}$ 独立于 $\{x, y\}$, 且 $P \cap A_2 = \{a'_2\}$.

证明 由 (Ω_7) 知, A_2 无 x -对. 由 (Ω_{17}) 知, $B_2 = \emptyset$. 因为满足 (i) 的最短路 P 一定满足 (ii), 只需验证存在 a_1, a_2, a'_2, p 和 P 满足 (i).

令 a'_2 和 n 为 A_2 中两个不相邻点, 且令 $a'_1 \in N_{A_1}(a'_2)$. 因为 A_2 无 x -对, 所以, $na'_1 \notin E(G)$. 由定理 1.8, 若 D 是以 $a'_1a'_2$ 为中心的双星割, 则 K 和 n 必在 $G - D$ 的同一分支中, 所以, 存在 $a_2 \in A_2, p \in N(x) \cup N(y)$ 和 a_2p -路 P , 使得 $\{a'_1, a'_2\}$ 独立于 P .

选取 a_2 和 P 使得 $|P|$ 达最小, 显然, $P \cap A_2 = \{a_2\}$ 且 $P \setminus \{p\}$ 独立于 $\{x, y\}$. 若 $P \cap C_3 = \emptyset$, 则 (Ω_{36}) 成立. 假设 $p \in C_3$, 且取 $a_1 \in N_{A_1}(a_2)$. 因 $a_2a'_2 \notin E(G)$ 且 A_2 无 x -对, 故 $a'_2a_1 \notin E(G)$.

因为 $P \setminus \{p\}$ 独立于 $\{x, y\}$, 所以, $P \cap (A_1 \cup B_{0,1} \cup C_1) = \emptyset$. 由 (Ω_{10}) 和 (Ω_{17}) 知, a'_1 全联于 $B_1 \cup B_{1,2}$. 又因 a'_1 独立于 P , 故 $P \cap (B_1 \cup B_{1,2}) = \emptyset$. 因 $B_2 = \emptyset$, 由 (Ω_{35}) 可得 $B_{x,y} = \emptyset$. 最后因 $N(a_1) \subseteq A_1 \cup C_1 \cup B_1 \cup B_{0,1} \cup B_{1,2} \cup A_2 \cup \{x\}$, 必有 a_1 独立于 $P \setminus \{a_2\}$.

令 $H' = xa_1a_2Ppx$. 由定理 1.9 知 $G \setminus (N(H') \setminus \{y\})$ 是连通图, 所以, 存在路 P' 连接 a'_2 和 y 的一个邻点 p' , 使得 H' 独立于 P' . 从而, 有 $x \in H'$, $P' \cap C_3 = \emptyset$, 且 $\{a_1, a_2\}$ 独立于 P' . (Ω_{36}) 得证. $\square$

(Ω_{37}) A_2 是团.

证明 假设结论不成立, 由 (Ω_{17}) 知 $B_2 = \emptyset$. 由对称性不妨设 A_2 有 y -对. 按 (Ω_{36}) 所述, 选取点 a_1, a_2, a'_2, p 和路 P . 由 (Ω_{10}) 知, $B_1 \cup B_{1,2}$ 每一个点在 $\{a_1, a_2\}$ 中有邻点, 故 $P \cap (B_1 \cup B_{1,2}) = \emptyset$. 因为 $B_2 = \emptyset$, 所以, $B_{x,y} = \emptyset$. 由 (Ω_{16}) 知, C_1 全联于 a_1 , 从而, $P \cap (B_{x,y} \cup C_1) = \emptyset$.

假设 $P \cap (A_1 \cup B_{0,1}) \neq \emptyset$, P 上只有一个点 p 在 $A_1 \cup B_{0,1}$ 中. 记 p' 为 p 在 P 上的邻点. 若 $p \in A_1$, 则 $N(p) \setminus N(K) \subseteq A_2 \cup B_1 \cup B_{1,2}$. 由 (Ω_{18}) , 若 $p \in B_{0,1}$, 则 $N(p) \setminus N(K) \subseteq B_1$. 因为 $p' \notin N(K) \cup B_1 \cup B_{1,2}$, $p' = a'_2$, $p \in A_1$, 且 $pa'_2 \in E(G)$, $a_1p \notin E(G)$, $a_2p \notin E(G)$, 与 (Ω_6) 矛盾. 所以, $P \cap (A_1 \cup B_{0,1}) = \emptyset$, 从而, $P \subseteq \{a'_2\} \cup A_3 \cup B_3 \cup B_{2,3} \cup B_{3,4}$.

现在, $p \in A_3 \cup B_{3,4}$ 且 $P \setminus \{p\} \subseteq \{a'_2\} \cup B_3 \cup B_{2,3}$, 因而, $py \in E(G)$ 且 $px \notin E(G)$. 记 $a'_1 \in A_1$ 为 a'_2 的一个邻点. 因为 $\{a_2, a'_2\}$ 是一 y -对, 所以, $a_2a'_1 \notin E(G)$. 令 $H' = a'_2Ppyxa'_1a'_2$, 则有 $x, y \in H'$ 且 $a_2 \notin N(H')$, 与 (Ω_2) 矛盾. (Ω_{37}) 得证. $\square$

(Ω_{38}) C 是团.

证明 否则, 在 C 中取两个不相邻点 c_1 和 c_2 . 由 (Ω_{14}) 知, $c_1, c_2 \in B_{x,y}$. 设 P 为一 c_1c_2 -路使得 $P^* \subseteq V(G) \setminus N(K)$, 则 $P^* \subseteq B_2$. 给定 $i \in \{1, 2\}$, 令 $N_i = N_{B_2}(c_i)$. 下面证明

$$B_{1,2} \cup B_{2,3} \text{ 全联于 } N_1 \cup N_2. \quad (2.22)$$

由 (Ω_{35}) 知, $N_1 \neq \emptyset$ 且 $N_2 \neq \emptyset$. 因 $|P| = 3$, 故 $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. 若存在不相邻点 $n_1 \in N_1$ 和 $n_2 \in N_2$, 则对任给 $a_2 \in A_2$, 路 $c_1n_1a_2n_2c_2$ 与 (Ω_{14}) 矛盾. 所以, N_1 全联于 N_2 . 因对任给 $n_1, n'_1 \in N_1$ 和 $n_2 \in N_2$, $c_1n_1n_2n'_1c_1$ 不是 4-洞, 故 N_1 是团. 同理, N_2 也是团. 由 (Ω_{14}) 和 (Ω_{18}) 可得 $B_1 = B_3 = \emptyset$, $B_{0,1} = B_{3,4} = \emptyset$, 而且对任给 $n_1 \in N_1$ 和 $n_2 \in N_2$, $\{c_1, c_2, n_1, n_2, x, y\}$ 是一控制集, 从而, 对任一点 $b \in B_{1,2} \cup B_{2,3}$, $bn_1 \in E(G)$ 或者 $bn_2 \in E(G)$. 若 $b \in B_{1,2}$ 与 n_1 相邻但不与 n_2 相邻, 则存在点 $a_2 \in A_2$ 使得 $(xa_1bn_1n_2c_2xa_2)$ 是偶轮. 所以, $B_{1,2}$ 必全联于 $\{n_1, n_2\}$, 即 $B_{1,2}$ 全联于 $N_1 \cup N_2$. 由对称性可知 $B_{2,3}$ 也全联于 $N_1 \cup N_2$. 故 (2.22) 成立.

选定 $n_1 \in N_1$. 下面将证明

$$B_2 \setminus \{n_1\} \text{ 全联于 } n_1. \quad (2.23)$$

否则, 存在 $b \in B_2 \setminus \{n_1\}$ 且 $bn_1 \notin E(G)$. 显然, $b \notin N_1$ 且 $bc_1 \notin E(G)$. 如果存在点 $c \in N_{B_{x,y}}(b)$ 使得 $cc_1 \notin E(G)$, 则对任意 $a_2 \in A_2$, 路 $c_1n_1a_2bc$ 与 (Ω_{14}) 矛盾. 所以, c_1 必全联于 $N_{B_{x,y}}(b)$.

设 M 是 $B_2 \setminus N(n_1)$ 包含 b 的分支. 将上一段处理点 b 时的过程应用于 M 中的点, 可得 $N(M) \cap B_{x,y} \subseteq N(c_1)$. 令 $X = A_2 \cup B_{1,2} \cup B_{2,3} \cup N_1 \cup N_2 \cup C_1 \cup C_3 \cup (N(c_1) \cap B_{x,y})$. 由 (Ω_{18}) 知, $N(M) \subseteq X$. 因为 $A_2 \cup B_{1,2} \cup B_{2,3} \cup N_1 \cup N_2 \subseteq N(n_1)$, 由 (Ω_{14}) 易见 $C_1 \cup C_3 \subseteq N(c_1)$, 故 X 是一双星割集, 与定理 1.8 矛盾, (2.23) 得证.

记 $G' = G \setminus \{n_1\}$. 因 K 不是 G 的控制集, 由 (Ω_8) 知, 存在点 $v \in N(n_1) \setminus N(K)$ 是 G' 的双单纯点. 所以, $v \in B_{1,2} \cup B_{2,3} \cup A_2 \cup B_2$. 因为 A_2 的每个点在 G' 中有 3 个互不相邻的邻点 (分属于 N_2, A_1 和

A_3), 所以, $v \notin A_2$. 由对称性, 不妨设 $v \in B_2 \cup B_{1,2}$. 由 (Ω_{18}) 知, $N(v) \setminus N(n_1) \subseteq C_1 \cup C_3 \cup B_{x,y} \cup A_1$, 因而, $N(v) \setminus N(n_1)$ 全联于 x . 鉴于对任意 $u, u' \in N(v) \setminus N(n_1)$, $xuvu'x$ 不是 4-洞, $N(v) \setminus N(n_1)$ 必是团, 与 (Ω_{32}) 矛盾. (Ω_{38}) 得证. $\square$

(Ω_{39}) 设 $a_2, a'_2 \in A_2$ 和 $b \in B_{1,2}$ 导出路 $ba_2a'_2$, 令 P 是从 $N_{B_{1,2}}(a'_2)$ 到 $N(K)$ 的路使得 $\{a_2, b\}$ 独立于 P 且 $|P \cap N(K)| = 1$, 则 $P \subseteq A_1 \cup B_1 \cup B_{1,2} \cup B_{0,1} \cup C$ 且 $P \cap C \neq \emptyset$.

证明 记 $\{p\} = P \cap N(K)$, 显然, p 是 P 的端点. 因 A_2 是全联于 B_2 的团, 故 $P \cap (A_2 \cup B_2) = \emptyset$. 因 $A_1 \cup B_1 \cup B_{1,2} \cup B_{0,1}$ 独立于 $A_3 \cup B_3 \cup B_{2,3} \cup B_{3,4}$, $(P - p) \cap (C \cup A_2 \cup B_2 \cup K) = \emptyset$, 且 $P \cap B_{1,2} \neq \emptyset$, 故而 $P \subseteq A_1 \cup B_1 \cup B_{1,2} \cup B_{0,1} \cup C$.

若 $p \notin C$, 则可选取 P 为最小的反例. 显然, P 的第一个点, 记为 b' , 一定属 $B_{1,2} \cap N(a'_2)$, 且 $P \cap B_{1,2} - b'$ 独立于 a'_2 . 因为 $p \in N(K)$, $p \in A_1 \cup B_{0,1}$, 所以, x 独立于 $Q_{a'_2} \setminus \{y\}$, 且 y 独立于 P . 故而有洞 H' 过 xy 且 $H' \subseteq P \cup Q_{a'_2} \cup \{x\}$. 由 P 的选取知, b 独立于 P , 且 b 独立于 $Q \cup \{x\}$ (因为 $b \in B_{1,2}$). 所以, b 独立于 H' , 与 G 的定义矛盾. (Ω_{39}) 得证. $\square$

(Ω_{40}) A_2 有点全联于 $B_{1,2}$.

证明 否则, 任给 $a \in A_2$, 定义 $M(a) = N_{B_{1,2}}(a)$. 令 $a_2 \in A_2$ 使得 $|M(a_2)|$ 最大, 且令 $b' \in B_{1,2} \setminus M(a_2)$. 取 $a'_2 \in N_{A_2}(b')$. 由 a_2 的选取可知, 存在 $b \in B_{1,2}$ 使得 $ba_2 \in E(G)$, $ba'_2 \notin E(G)$. 因 A_2 是团且 $a_2bb'a'_2a_2$ 不可为 4-洞, 故 $bb' \notin E(G)$.

由定理 1.8 知, 对任一个以 a'_2b' 为中心的双星割集 D , b 和 K 必包含于 $G - D$ 的同一分支中, 存在从 b 到 $N(K)$ 的路 S 独立于 $\{a'_2, b'\}$. 适当选取 b , 可以设 a_2 独立于 $(S - b) \cap B_{1,2}$, 而且只有 S 的另一个端点, 记为 c , 属于 $N(K)$. 由 (Ω_{39}) 知,

$$S \subseteq A_1 \cup B_1 \cup B_{1,2} \cup B_{0,1} \cup C$$

且 $c \in C$, 则 y 独立于 $S - c$. 记 $T = Q_{a_2}$. 若 $N_{T \setminus \{y\}}(c) \neq \emptyset$, 则 $c \in C_3$, c 在 S 的邻点 s 必属于 $B_1 \cup B_{1,2}$, 形成一 4-洞 csa_1sc (其中 $a_1 \in N_{A_1}(s)$), 矛盾. 所以, $N_{T \setminus \{y\}}(c) = \emptyset$, 存在洞 H' 包含 c 和 y , $H' \subseteq S \cup T$, 且 $N_{H'}(b') = \emptyset$, 与 G 的选取矛盾. (Ω_{40}) 得证. $\square$

(Ω_{41}) $B_1 \cup B_{0,1} = \emptyset$, $B_3 \cup B_{3,4} = \emptyset$.

证明 假设 $B_1 \neq \emptyset$. 记 $S = C_1 \cup \{x\}$, $T = A_2$, $R = A_1 \cup B_1 \cup B_{0,1} \cup B_{1,2}$. 由 $G[S \cup T \cup R]$ 添加边连接 S 和 T 的所有点, 得图 G' . 完全类似于 (Ω_{25}) 的过程, 可验证 G' 是 (4-洞, $\mathcal{A}$)-无奇可标号图. 由 (Ω_{40}) 知, 存在 $a_2 \in A_2$ 全联于 $B_{1,2}$. 因 $B_1 \neq \emptyset$, 故 a_2x 不是 G' 的控制团, 存在点 $v \in V(G') \setminus N_{G'}(\{a_2, x\})$ 是 G' 的双单纯点. 因为 $S \subseteq N(x)$, $T \subseteq N(a_2)$, $A_1 \cup B_{0,1} \subseteq N(x)$, $B_{1,2} \subseteq N(a_2)$, 所以, $v \in B_1$. 又因 $N_G(v) \subseteq V(G')$ 使得 $G[N_G(v)] = G[N_{G'}(v)]$, v 也是 G 的双单纯点, 矛盾.

再假定 $B_{0,1} \neq \emptyset$, 选取 $b \in B_{0,1}$. 由 (Ω_1) 和 (Ω_{18}) 知, $N_{B_1}(b) \neq \emptyset$, 与 $B_1 = \emptyset$ 矛盾. 由对称性可知 $B_3 \cup B_{3,4} = \emptyset$ 也成立. (Ω_{41}) 得证. $\square$

至此, 有 $V(G) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_{1,2} \cup B_{2,3} \cup B_2 \cup C_1 \cup C_3 \cup B_{x,y} \cup \{x, y\}$.

(Ω_{42}) A_2 没有点全联于 $B_{1,2} \cup B_{2,3}$.

证明 否则, 从 A_2 的全联于 $B_{1,2} \cup B_{2,3}$ 的点中, 选取 u 使得 $|N_{A_1 \cup A_3}(u)|$ 最大. 记 $G' = G - u$. 若 K 是 G' 的控制集, 则 $B_2 = B_{1,2} = B_{2,3} = \emptyset$, $A_2 = \{u\}$ 全联于 $A_1 \cup A_3$, 且 A_1 和 A_3 都是团 (否则有 4-洞), 从而, u 是 G 的双单纯点. 所以,

$$K \text{ 不是 } G' \text{ 的控制集.} \quad (2.24)$$

记 $N_1 = N_{A_1}(u)$, $N_3 = N_{A_3}(u)$. 由 (2.24) 知, 存在点 $v \in V(G) \setminus (N(K) \cup \{u\})$ 使得 $v \in N_G(u)$ 且 v 是 G' 的双单纯点. 因为 $v \in V(G) \setminus (N(K) \cup \{u\})$, 所以, $v \in A_2 \cup B_2 \cup B_{1,2} \cup B_{2,3}$. 由对称性不妨设 $v \in A_2 \cup B_2 \cup B_{1,2}$, 则 $N_G(v) \setminus N_G(u) \subseteq C \cup A_1 \cup A_3$. 因 C 是团, 故 $N_{A_1 \cup A_3}(v) \neq \emptyset$, 从而 $v \in A_2 \cup B_{1,2}$.

假定 $v \in B_{1,2}$, 则 $N_G(v) \setminus N_G(u) \subseteq A_1 \cup C$, 从而 $N_G(v) \setminus N_G(u)$ 全联于 x . 取 $n_1, n_2 \in N_G(v) \setminus N_G(u)$. 因 xn_1vn_2x 不为 4-洞, $n_1n_2 \in E(G)$, 故而 $N_G(v) \setminus N_G(u)$ 是团, 与 (Ω_{32}) 矛盾. 所以, $v \in A_2$, 从而独立于 C .

当 A_1 是团时, 显然, $N(v) \cap A_1$ 是团. 当 A_1 不是团时 A_1 有一 x -对, 从而 $N_{A_1}(v)$ 也是团. 同理 $N_{A_3}(v)$ 是团. 由 (Ω_{32}) 知, $N_G(v) \setminus N_G(u) \subseteq A_1 \cup A_3$ 不是团, 存在 $a_1 \in A_1 \setminus N(u)$ 和 $a_3 \in A_3 \setminus N(u)$ 使得 $\{a_1v, a_3v\} \subseteq E(G)$. 若 v 有一非邻点 $b \in B_{1,2}$, 则 $ba_1 \in E(G)$ 导致 4-洞 uva_1bu . 所以, v 全联于 $B_{1,2}$. 同理可证 v 全联于 $B_{2,3}$. 由 u 的选取可知, 存在 $a'_1 \in A_1$ 使得 $a'_1u \in E(G)$ 但 $a'_1v \notin E(G)$, 从而, 有一 theta $3PC(y, u)$ 或一偶轮 (yxa'_1uva_3y, a'_3) (其中 $a'_3 \in A_3$ 且 $a'_3u \in E(G)$). (Ω_{42}) 得证. $\square$

现在可以证明定理 1.4.

定理 1.4 的证明 由 (Ω_{40}) 知, A_2 有点 v_1 和 v_3 使得 v_1 全联于 $B_{1,2}$ 而且 v_3 全联于 $B_{2,3}$. 选取 v_1 和 v_3 使得 $|N_{A_1}(v_1)|$ 和 $|N_{A_3}(v_3)|$ 都最大. 对 $i \in \{1, 3\}$, 记 $N_i = N_{A_i}(v_i)$. 由 (Ω_{42}) 知, $v_1 \neq v_3$, 且 $v_1v_3 \in E(G)$ (因 A_2 是团). 若存在 $n_1 \in N_1$ 和 $n_3 \in N_3$ 使得 $n_1v_3, n_3v_1 \notin E(G)$, 则存在 $w \in N_{A_1}(v_3)$, 当 $v_1w \notin E(G)$ 时有一 theta $3PC(x, v_3)$, 当 $v_1w \in E(G)$ 时有一偶轮 $(yxn_1v_1v_3n_3y, w)$, 矛盾. 由对称性不妨设 v_3 全联于 N_1 . 由 (Ω_{42}) 知, v_3 不全联于 $B_{1,2}$. 根据定理 1.7 知, $N(v_3)$ 不是满星割, 存在从 $B_{1,2} \setminus N(v_3)$ 到 K 的路, 矛盾. 由 (Ω_{10}) 知 $N(B_{1,2}) \cap A_1 \subseteq N_1$, 而且由 (Ω_{18}) 知 $B_{1,2}$ 独立于 $B_{2,3}$. 因为 v_3 全联于 $B_2 \cup A_2 \setminus \{v_3\}$, 从而存在相邻的点 $b \in B_{1,2} \setminus N(v_3)$ 和 $c \in C \setminus N(v_3)$. 鉴于 ba_1xcb 不是 4-洞 (其中 $a_1 \in N_{A_1}(b)$), $c \in C_1 \setminus N(v_3)$. 若存在 $n_3 \in N_3$ 使得 $n_3v_1 \notin E(G)$, 则有一 theta $3PC(y, v_1)$ 或一偶轮 $(ycbv_1v_3n_3y, n'_3)$ (其中 $n'_3 \in N_{A_3}(v_1)$), 矛盾. 故而 v_1 全联于 N_3 . 由对称性知, 存在相邻点 $b' \in B_{2,3} \setminus N(v_1)$ 和 $c' \in C_3 \setminus N(v_1)$. 因为 C 是团, 所以, $cc' \in E(G)$, 存在 $n_3 \in N_3$ 使得 $(cbv_1v_3b'c'c, n_3)$ 为一偶轮. 这一矛盾最终完成了定理 1.4 的证明. $\square$

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. New York: Springer, 2008
- 2 Erdős P. Graph theory and probability. Canad J Math, 1959, 11: 34–38
- 3 Dong W, Xu B G, Zhang X Y. Improved bounds on linear coloring of plane graphs. Sci China Math, 2010, 53: 1895–1902
- 4 Lin Q Z, Hou J F, Liu Y. Acyclic edge coloring of graphs with large girths. Sci China Math, 2012, 55: 2593–2600
- 5 Randerath B, Schiermeyer I. Vertex colouring and forbidden subgraphs—A survey. Graphs Combin, 2004, 20: 1–40
- 6 Wan M, Xu B G. Acyclic edge coloring of planar graphs without adjacent cycles. Sci China Math, 2014, 57: 433–442
- 7 Wang Y Q, Mao X H, Lu H J, et al. On 3-colorability of planar graphs without adjacent short cycles. Sci China Math, 2010, 53: 1129–1132
- 8 许怡安, 张晓岩. 环面图上的一个 Lebesgue 型定理及其在线性染色中的应用. 中国科学: 数学, 2011, 41: 477–484
- 9 Chudnovsky M, Robertson N, Seymour P, et al. The strong perfect graph theorem. Ann of Math (2), 2006, 164: 51–229
- 10 Gyárfás A. Problems from the world surrounding perfect graphs. Appl Math (Warsaw), 1987, 19: 413–441
- 11 Conforti M, Cornuéjols G, Kapoor A, et al. Even and odd holes in cap-free graphs. J Graph Theory, 1999, 30: 289–308
- 12 Addario-Berry L, Chudnovsky M, Havet F, et al. Bisimplicial vertices in even-hole-free graphs. J Combin Theory Ser B, 2008, 98: 1119–1164
- 13 Chudnovsky M, Seymour P. Even-hole-free graphs still have bisimplicial vertex. <https://web.math.princeton.edu/~pds/papers/bisimplicial2/paper.pdf>, 2020

A result on the optimal binding function of odd signable graphs

Rong Wu & Baogang Xu

Abstract Let $\mathcal{G}$ be a family of graphs. We say that $\mathcal{G}$ is a χ -bounded family if there is a function f such that, for each $G \in \mathcal{G}$, $\chi(G) \leq f(\omega(G))$, and call f a binding-function of $\mathcal{G}$. In this paper, we study the problem related to the optimal binding function of odd signable graphs, and prove that a subclass of odd signable graphs has the linear binding function.

Keywords even hole, chromatic number, clique number

MSC(2010) 05C15, 05C75

doi: 10.1360/SSM-2020-0036