

• 水利与土木工程 •

DOI:10.15961/j.jsuese.202001131



本刊网刊

考虑颗粒破碎的钙质砂双屈服面模型

侯贺营^{1,2}, 潘卓杰^{3*}, 姜朋明⁴

(1.江苏科技大学 土木工程与建筑学院, 江苏 镇江 212100; 2.江苏省地质环境灾害防治及修复工程研究中心, 江苏 镇江 212100;
3.南京水利科学研究院 岩土工程研究所, 江苏 南京 210024; 4.苏州科技大学, 江苏 苏州 215009)

摘 要:珊瑚岛礁主要由颗粒形状不规则、多孔隙、高压缩性、易破碎的钙质砂组成。在进行珊瑚岛礁生态开发建设时, 由于其地基土钙质砂具有特殊性, 有必要针对颗粒易破碎的钙质砂进行本构模型研究, 为设计施工提供参考。本文通过开展不同围压下的钙质砂三轴试验并筛分颗粒, 得到应力-应变关系曲线及级配变化曲线, 结果表明: 对于同一级配、同一密实度的钙质砂, 在不同围压下存在不同程度的应变软化和剪胀性, 尤其在较低围压下更为明显; 存在应变软化和剪胀性的围压范围内, 随着围压的增大, 其偏应力峰值点和临胀点所对应的轴向应变越大; 不同围压下钙质砂颗粒均出现了不同程度的颗粒破碎, 且围压越大其颗粒破碎程度越大, 细粒含量相对越多。同时, 为准确描述考虑颗粒破碎的钙质砂应力-应变关系, 基于分形理论和莫尔-库仑理论建立颗粒破碎指标对峰值内摩擦角进行修正, 并结合试验数据对“南水”模型中的切线变形模量和切线体积比进行修正, 明确了各材料常数的意义, 建立了考虑颗粒破碎的钙质砂本构模型。采用Fortran语言将修正的本构模型汇编程序进行模拟, 并与试验结果进行对比, 两者较为吻合。此外, 引用文献中相关试验数据对所建立的考虑颗粒破碎的钙质砂本构模型进行推广验证, 表明该模型依然能较为准确地反映钙质砂在不同围压下存在的应变软化和剪胀性。

关键词:钙质砂; 本构模型; 颗粒破碎; 分形理论; 应变软化; 剪胀性

中图分类号: TU452

文献标志码: A

文章编号: 2096-3246(2021)06-0132-10

Double Yield Surface Model of Calcareous Sand Considering Particle Breakage

HOU Heying^{1,2}, PAN Zhuojie^{3*}, JIANG Pengming⁴

(1.College of Civil Eng. and Architecture, Jiangsu Univ. of Sci. and Technol., Zhenjiang 212100, China;

2.Jiangsu Province Eng. Research Center of Geoenvironmental Disaster Prevention and Remediation, Zhenjiang 212100, China;

3.Geotechnical Eng. Dept., Nanjing Hydraulic Research Inst., Nanjing 210024, China; 4.Suzhou Univ. of Sci. and Technol., Suzhou 215009, China)

Abstract: Coral islands is mainly composed of calcareous sand with characteristics of irregular shape, multi porosity, high compressibility and friability. During the ecological development and construction of coral island, due to the particularity of calcareous sand, it is necessary to study the constitutive model of calcareous sand considering the particle breakage, to provide references for the design and construction of coral island engineering. To obtain the stress-strain and grading curves of calcareous sand, the triaxial tests with different confining pressures were carried out and the particles were screened. The test results showed that the calcareous sand with the same gradation and density had different degrees of strain softening and dilatancy under different confining pressures, especially under the lower confining pressures. In the range of confining pressure with strain softening and dilatancy, with the increase of confining pressure, the axial strain corresponding to the peak point of deviatoric stress and the critical expansion point increases. Calcareous sand had different degrees of particle breakage under different confining pressures. The higher confining pressure is, the higher degree of particle breakage is, and the more content of fine particles is. At the same time, to accurately describe the stress-strain relationship of calcareous sand, the tangent deformation modulus and tangent volume ratio of Nanjing Hydraulic

收稿日期: 2020 - 12 - 29

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51979128)

作者简介: 侯贺营 (1988—), 男, 讲师, 博士. 研究方向: 海洋土的基本性质及土工数值分析等. E-mail: just_hyhou@163.com

* 通信作者: 潘卓杰, E-mail: ytgcpzj@163.com

网络出版时间: 2021 - 11 - 12 15 : 53 : 00

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1773.TB.20211111.2158.007.html>

Research Institute (NHRI) double yield surface model were modified. Based on the fractal theory and Mohr–Coulomb theory, the index considering particle breakage was established to modify the internal friction angle. Finally, the constitutive model of calcareous sand considering particle breakage was established, and the significance of each material constant was clarified. Fortran language was used to simulate the modified constitutive model, and the results were compared with the experimental results, which were in good agreement. Combined with the relevant experimental data in the references, the established constitutive model of calcareous sand considering particle breakage was extended and verified. The results showed that the model could accurately reflect the strain softening and dilatancy of calcareous sand under different confining pressures.

Key words: calcareous sand; constitutive model; particle breakage; fractal theory; strain softening; dilatancy

近年来,珊瑚岛礁的生态开发建设受到了广泛关注,部分学者针对中国^[1-2]、埃及^[3-4]、克罗地亚^[5]等地的珊瑚岛礁展开了一系列研究。结果表明,珊瑚岛礁主要是由具有颗粒形状不规则、多孔隙^[6-7]、高压缩性^[8-9]、易破碎^[10]等特点的钙质砂填筑而成。

钙质砂形状极不规则^[11]且易破碎^[12-13]的特点使其力学特性不同于石英砂,因此在生态开发建设的设计施工阶段存在一系列特殊问题^[14]。不少学者尝试将颗粒破碎引入本构模型中进行研究,为工程实践提供参考。Daouadji等^[15]认为发生颗粒破碎时,颗粒材料相应的物理力学参数会发生变化,故将其所受影响引入本构模型中以描述颗粒材料在大范围应力作用下的变形行为,并进行两种不同砂土的三轴试验,验证所建立模型的准确性。孙吉主等^[16]根据重塑和原状钙质砂压缩特性的不同,提出颗粒破碎会引起原状钙质砂的附加孔隙比增量;并在临界状态土力学的理论框架内,通过引入状态参数和帽盖屈服面,建立考虑颗粒破碎影响的钙质砂弹塑性本构模型。Sun等^[17]采用分数阶流动规则描述珊瑚砂存在颗粒破碎的特殊蠕变行为,并基于已有试验结果对所建模型进行模拟验证,为沿海地区岩土工程设计施工提供参考。胡波^[18]通过不同围压下固结排水和固结不排水试验,对钙质砂的剪切特性进行分析;并基于剪切变形中颗粒破碎的能耗提出一种塑性流动准则,在极限平衡条件下建立了能够模拟各剪切应变阶段颗粒破碎的钙质砂本构模型。Wang等^[19]在一般应力状态下进行了两组钙质砂的三轴蠕变试验,发现其3个阶段的蠕变情况分别主要受颗粒重新排列、颗粒间摩擦和颗粒破碎的影响;同时发现与石英砂相比,钙质砂颗粒孔隙附近的局部不稳定性导致了其存在特殊的初始线性阶段和衰减阶段,并基于此,利用不同的流变组分,建立描述钙质砂蠕变特性的流变模型,且利用试验数据验证了本构模型的合理性。蔡正银等^[20]通过一系列不同密度和不同围压组合的三轴试验,研究了颗粒破碎对土体变形特性和临界状态的影响,提出考虑颗粒破碎影响的珊瑚砂状态相关剪胀方程和本构模型。

近年来,有不少学者基于“南水”模型建立了修正本构模型。文畅平等^[21]基于生物酶掺量对“南水”

模型进行修正,以描述生物酶改良膨胀土的应力–应变关系;生物酶的改良使土体应力–应变关系呈硬化型,其基于Duncan–Chang模型参数分析方法修正的“南水”模型,可描述任意生物酶掺量下改良膨胀土的强度和变形特性。谷建晓等^[22]修正了“南水”模型,用以描述钙质砂的应力–应变关系;在切线模量中引入应力比与峰值应力比的比值,将修正后的切线模量引入切线体积比中重新推导,能较好地描述钙质砂应力应变关系,但并未选用指标说明颗粒破碎对应力–应变关系的影响。由上述可知,现阶段很多学者建立了各自考虑颗粒破碎的本构模型,但不能较好地描述颗粒破碎影响下的应变软化和剪胀性。

作者通过不同围压下三轴固结排水剪切试验得到钙质砂应力–应变关系及试验前后试样的颗粒级配曲线;采用分形理论和莫尔–库仑理论提出考虑颗粒破碎的内摩擦角计算公式,并将该计算公式引入驼峰曲线对“南水”模型中的切线变形模量和切线体积比进行修正,最终建立考虑颗粒破碎且能够较好地描述钙质砂应变软化和剪胀性的本构模型;同时,采用Fortran语言将修正的本构模型汇编程序进行模拟,并与试验结果对比,验证其合理准确性。

1 钙质砂基本特性

试验所用钙质砂取自某珊瑚岛礁,其颗粒松散,无明显黏结,呈乳白色,形状大小不规则,有棱角,如图1所示。

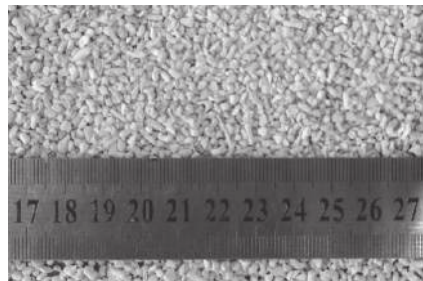
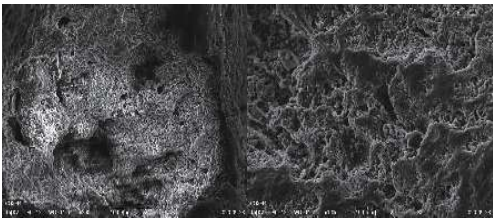


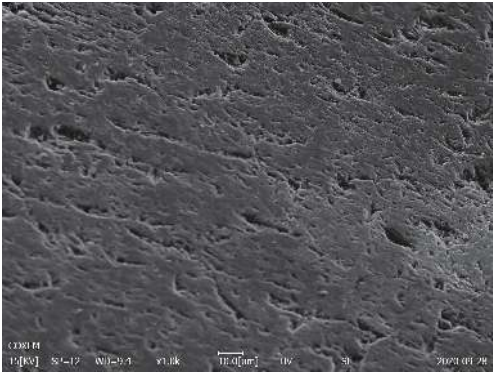
图1 钙质砂颗粒

Fig. 1 Calcareous sand particles

崔翔等^[23]研究发现钙质砂存在其特殊的孔隙特征。采用扫描电镜(SEM)观察钙质砂颗粒与石英砂颗粒的微观形貌,如图2所示。对比可知,相比于石英砂,钙质砂颗粒表面更为粗糙,且存在孔隙。



(a) 钙质砂颗粒表面微观形貌



(b) 石英砂颗粒表面微观形貌

图 2 扫描电镜 (SEM) 微观形貌

Fig. 2 Scanning electron microscope (SEM) micrograph

试验所用钙质砂的级配曲线如图3所示,其颗粒比重 $G_s=2.71$,相对密度为0.75。根据王志志等^[24]研究结果,分别采用量筒法和电动相对密度仪法测得所用钙质砂最大干密度 $\rho_{dmax}=1.39\text{ g/cm}^3$,最小干密度 $\rho_{dmin}=1.16\text{ g/cm}^3$ 。

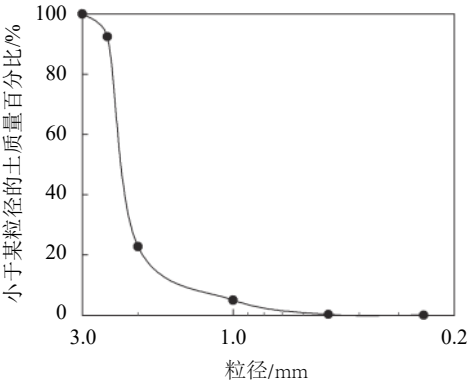


图 3 钙质砂初始级配曲线

Fig. 3 Initial grading curve of calcareous sand

2 三轴试验方案

采用全自动三轴仪进行三轴试验,该仪器最大轴荷载为60 kN,最大围压为2 MPa,最大轴向变形速率为10 mm/min,试样尺寸为 $\phi 39.1\text{ mm} \times H 80\text{ mm}$,如图4所示。为减小试验误差,分别在100、200、300和400 kPa围压下进行多组钙质砂固结排水试验。试样采用煮沸的方式进行初步饱和,再装入仪器中进行反压饱和及B值检测,当B值大于0.98后开始固结。待

试样固结稳定后,按0.1 mm/min的速率剪切至15%轴向应变时,停止试验。将试验后的试样烘干并利用筛分法筛分,绘制出级配曲线,并与初始级配曲线进行对比,以分析不同围压下颗粒破碎情况。

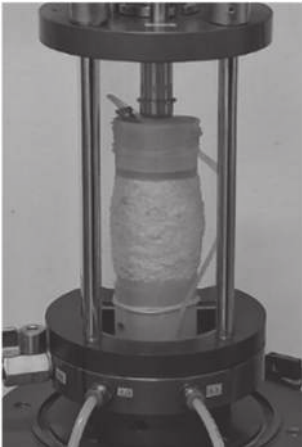


图 4 三轴试验装置及试样

Fig. 4 Triaxial apparatus and the specimen

3 钙质砂变形及破碎特性

3.1 偏应力与轴向应变的关系曲线

根据试验结果得出不同围压下偏应力与轴向应变关系曲线如图5所示。由图5可知:随着围压的增大,同一轴向应变对应的偏应力有所增大,峰值偏应力所对应的轴向应变也越来越大;4组试验曲线均存在应变软化现象,且均当达到偏应力峰值时,随着轴向应变的进一步增大,偏应力开始减小,且减小趋势逐渐减弱。

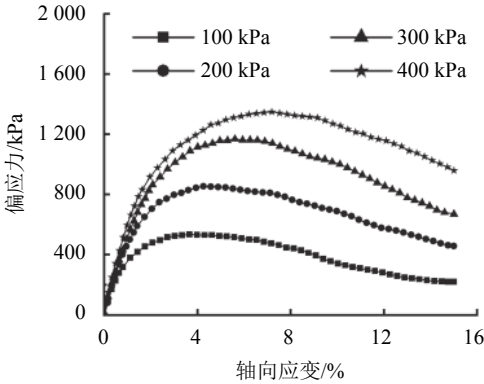


图 5 不同围压下偏应力与轴向应变关系曲线

Fig. 5 Relationship between deviatoric stress and axial strain under different confining pressures

3.2 体积应变与轴向应变的关系曲线

根据试验结果得出不同围压下体积应变与轴向应变关系曲线如图6所示。由图6可知:100、200、300 kPa围压下体积应变与轴向应变关系曲线均反映出了不同程度的先剪缩、后剪胀的变化趋势,且围压越小剪胀趋势越明显,其临胀点(剪缩与剪胀的转换点)对

应的轴向应变值随着围压的增大而增大;当轴向应变增大到一定程度之后,体积应变趋于稳定。对于400 kPa围压下体积应变与轴向应变的关系曲线,其剪胀趋势并不明显。

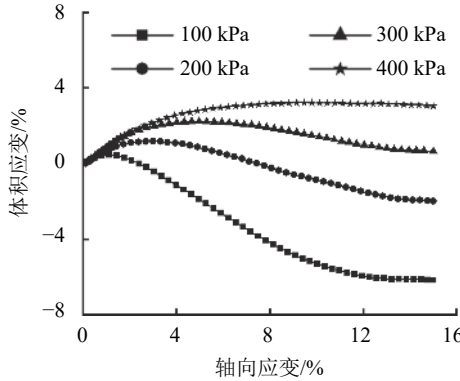


图6 不同围压下体积应变与轴向应变关系曲线

Fig. 6 Relationship between volume strain and axial strain under different confining pressures

3.3 颗粒破碎级配曲线

根据筛分结果得出不同围压下三轴试验前后试样级配曲线如图7所示。由图7可知:随着围压的增大,颗粒破碎越明显,其对应的级配曲线越高,细粒含量相对越多;对比分析可知,各粒组颗粒均发生了不同程度的破碎,尤其是介于0.5~2.0 mm粒径范围内的颗粒含量占比变化幅度最大。

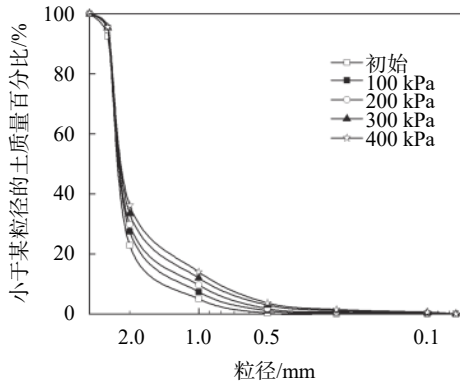


图7 不同围压下试验前后试样级配曲线

Fig. 7 Particle size distribution curves before and after tests under different confining pressures

4 “南水”模型

“南水”模型^[25]采用椭圆函数和幂函数组成的双屈服面,取屈服函数:

$$f_1 = p^2 + r^2 q^2 \quad (1)$$

$$f_2 = \frac{q^x}{p} \quad (2)$$

式中, r 、 x 为屈服面参数, p 为八面体正应力, q 为八面体剪应力。

采用正交流动法则,其弹塑性应力应变关系为:

$$\{\Delta\sigma\} = \mathbf{D}^{\text{ep}} \{\Delta\varepsilon\} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{D}^{\text{ep}}$ 为弹塑性矩阵。

同时,“南水”模型分别采用双曲线和抛物线描述偏应力-轴向应变和体积应变-轴向应变的关系^[25],其切线变形模量 E_t 沿用了Duncan-Chang模型的表达式:

$$E_t = \left(1 - R_f \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi)}{2\sigma_3 \sin \varphi + 2c \cos \varphi}\right)^2 K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \quad (4)$$

式中, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 为偏应力, K 、 n 为试验参数, p_a 为标准大气压, R_f 为破坏比, c 和 φ 分别为材料的黏聚力和内摩擦角。

切线体积比 μ_t 表达式为:

$$\mu_t = 2C_d \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^d \frac{E_i R_p}{\sigma_1 - \sigma_3} \frac{1 - R_d}{R_d} \left(1 - \frac{s}{1 - s} \frac{1 - R_d}{R_d}\right) \quad (5)$$

式中: E_i 为初始模量; R_p 为破坏比; C_d 为围压等于一个标准大气压强时的最大收缩体应变; d 为收缩体应变随围压增加而增加的幂指数; R_d 为发生最大收缩时的偏应力和极限偏应力之比; s 为应力水平,其表达式为:

$$s = (\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)_p \quad (6)$$

式中, $(\sigma_1 - \sigma_3)_p$ 表示峰值偏应力。

由于双曲线和抛物线的限制,该模型不能较好地描述颗粒破碎影响下钙质砂试样的应变软化和剪胀现象,因此需对其进行修正。

5 钙质砂本构模型的修正

5.1 颗粒破碎指标的建立

Tyler等^[26]提出颗粒质量-粒径分形模型如下:

$$\frac{M(\Delta < d)}{M_T} = \left(\frac{d}{d_M}\right)^{3-\alpha} \quad (7)$$

式中, Δ 、 d 均为颗粒直径, $M(\Delta < d)$ 为粒径小于 d 的颗粒质量, M_T 为颗粒总质量, d_M 为最大粒径, α 为分形维数。

将式(7)两边取对数,整理可得:

$$\lg\left(\frac{M(\Delta < d)}{M_T}\right) = (3 - \alpha) \lg\left(\frac{d}{d_M}\right) \quad (8)$$

由式(8)可知, $\lg(M(\Delta < d)/M_T)$ 与 $\lg(d/d_M)$ 关系曲线的斜率为 $3 - \alpha$ 。结合三轴试验结果在双对数坐标中绘出不同围压下的 $\lg(M(\Delta < d)/M_T)$ 与 $\lg(d/d_M)$ 的关系,并进行线性拟合,如图8所示。

根据各线性拟合曲线的斜率计算分形维数,并进行汇总,见表1。

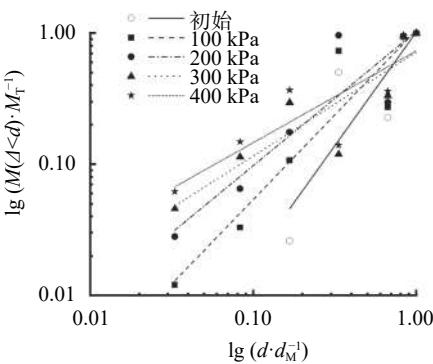


图 8 不同围压下 $\lg(M(\Delta<d)/M_T)$ 与 $\lg(d/d_M)$ 的关系

Fig. 8 Relationship between $\lg(M(\Delta<d)/M_T)$ and $\lg(d/d_M)$ under different confining pressures

表 1 不同围压下钙质砂的分形维数 α 和相对破碎率 B_r

Tab. 1 Fractal dimension α and relative fragmentation rate B_r of calcareous sand under different confining pressures

围压 σ_c /kPa	分形维数 α	相对破碎率 B_r
初始	1.27	—
100	1.71	0.128 8
200	1.98	0.270 9
300	2.21	0.387 4
400	2.30	0.453 9

Einav^[27]在Hardin^[28]提出的相对破碎率 B_r 的计算公式的基础上进行了修正,修正后的相对破碎率 B_r 计算公式为:

$$B_r = \frac{\int_{d_m}^{d_M} (F(d) - F_0(d)) d(\lg d)}{\int_{d_m}^{d_M} (F_u(d) - F_0(d)) d(\lg d)} \quad (9)$$

式中, d_M 为最大粒径, d_m 为最小粒径, $F_0(d)$ 、 $F(d)$ 和 $F_u(d)$ 分别为加载之前、加载当前和极限状态的级配曲线拟合函数。

同时, Einav^[27]还指出,基于分形模型的不同级配曲线线性拟合函数的表达式为:

$$F(d) = \frac{M(\Delta < d)}{M_T} = \frac{d^{3-\alpha} - d_m^{3-\alpha}}{d_M^{3-\alpha} - d_m^{3-\alpha}} \quad (10)$$

当 $d_m = 0$ 时,达到极限状态,由式(10)可得:

$$F_u(d) = \left(\frac{d}{d_M}\right)^{3-D} \quad (11)$$

式中, D 为加载最终级配曲线所对应的分形维数。根据经验值,钙质砂极限破碎状态下的分形维数本文取2.6^[29]。

三轴试验不考虑粒径小于0.075 mm的颗粒,试样中最大粒径为 $d_M = 3.000$ mm,最小粒径为 $d_m = 0.075$ mm。将试验得到的不同级配曲线对应的分形

维数 α 代入式(10),得到加载之前和加载当前的级配曲线拟合函数,再结合式(9)和(11)计算出不同围压下钙质砂的相对破碎率 B_r ,见表1。为进一步确定围压 σ_c 与相对破碎率 B_r 的关系,将表1的数据进行拟合,得到 B_r 与 σ_c/p_a 的关系曲线见图9,其中 $p_a = 101.4$ kPa。

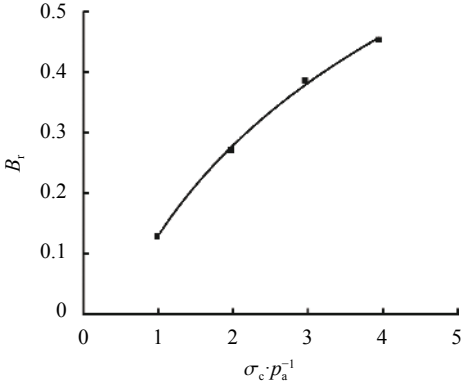


图 9 相对破碎率 B_r 与围压 σ_c 的关系

Fig. 9 Relationship between relative breakage rate B_r and confining pressure σ_c

该曲线的拟合度 $R^2 = 0.998\ 1$,由此得到 (σ_c/p_a) 与 B_r 的函数关系式为:

$$B_r = t \cdot \ln\left(\frac{\sigma_c}{p_a} + z\right) - m \quad (12)$$

式中, m 、 t 、 z 为拟合参数。对于本文所用的钙质砂而言,其拟合参数为 $m = 0.065\ 4$, $t = 0.336\ 5$, $z = 0.789\ 4$ 。

综上可知:在一定范围内,围压越大,钙质砂的分形维数越大,颗粒的相对破碎率也越大;但当围压增大到一定程度后,颗粒的相对破碎率变化将不再明显。

5.2 颗粒破碎对峰值内摩擦角的影响

常规三轴试验的中、小主应力满足关系式 $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$,且剪切过程中围压 σ_c 始终保持不变。结合试验数据计算出大主应力峰值 σ_{1p} 、围压 σ_c ,见表2。根据莫尔-库仑理论可知,无黏性土在三轴排水剪切中,峰值主应力比 $(\sigma_1/\sigma_3)_p = \sigma_{1p}/\sigma_3$ 与峰值内摩擦角 φ_p 存在如下关系:

$$\varphi_p = \sin^{-1}\left(\frac{(\sigma_1/\sigma_3)_p - 1}{(\sigma_1/\sigma_3)_p + 1}\right) \quad (13)$$

表 2 不同围压下大主应力峰值 σ_{1p} 与峰值内摩擦角 φ_p

Tab. 2 Peak principal stress σ_{1p} and peak internal friction angle φ_p under different confining pressures

围压 σ_c /kPa	大主应力峰值 σ_{1p} /kPa	峰值内摩擦角 $\varphi_p/(^\circ)$
100	636.21	46.75
200	1 055.17	42.95
300	1 469.08	41.36
400	1 750.26	38.90

根据式(13),结合试验数据计算出不同围压下所对应的峰值内摩擦角 φ_p ,见表2。

分析表2可知,在颗粒破碎的影响下,围压越大,剪胀作用逐渐变弱,峰值内摩擦角越小。拟合 $\varphi_p \sim (\sigma_c/p_a)$ 曲线得到峰值内摩擦角与围压的关系,如图10所示。

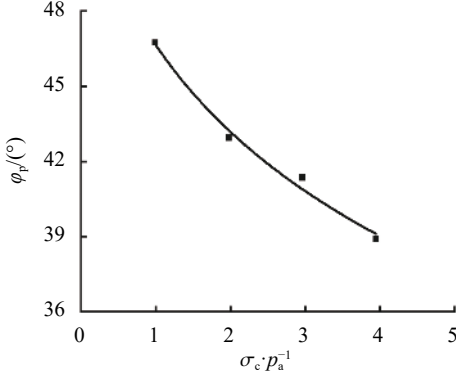


图10 峰值内摩擦角 φ_p 与围压 σ_c 的关系

Fig. 10 Relationship between peak internal friction angle φ_p and confining pressure σ_c

图10中曲线拟合度为 $R^2 = 0.989$,函数关系式为:

$$\varphi_p = \varphi_0 - \varphi_t \ln \left(\frac{\sigma_c}{p_a} + f \right) \quad (14)$$

式中, φ_0 、 φ_t 、 f 均为材料常数。其中: φ_0 为钙质砂接触面之间的摩擦角,由颗粒间咬合作用所产生,取决于钙质砂材料本身,与土体密度无关; φ_t 反映体积变化对内摩擦角的影响; f 反映颗粒重新排列对内摩擦角的影响。对于本文试验中的钙质砂而言,其拟合参数为 $\varphi_0 = 50.6^\circ$, $\varphi_t = 7.5^\circ$, $f = 0.7069$ 。

联立式(12)和(14),整理可得基于分形理论考虑颗粒破碎的峰值内摩擦角计算公式为:

$$\varphi_p = \varphi_0 - \varphi_t \ln \left(e^{\frac{m+\beta t}{t}} - \beta \right) \quad (15)$$

式中, m 、 t 、 β 均为材料常数,反映了考虑颗粒破碎后其重新排列对内摩擦角的影响,可由常规三轴试验获取。对于本文试验中的钙质砂而言,其材料常数分别为 $m = 0.6543$, $t = 0.3365$, $\beta = 0.0825$ 。

同时,根据式(15)进一步分析可知,当颗粒无破碎时,初始峰值内摩擦角为 $\varphi_0 - \varphi_t \ln(e^{m/t} + \beta)$,随着颗粒破碎程度的增大,峰值内摩擦角逐渐减小。

5.3 “南水”模型修正

5.3.1 切线变形模量

为准确反映存在颗粒破碎的钙质砂的应变软化现象,采用沈珠江^[30]提出的驼峰曲线描述应变软化,进而建立考虑颗粒破碎的本构模型。本文所采用归一化后的驼峰曲线表达式为:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{p_a} = \frac{\varepsilon_1(a + l\varepsilon_1)}{(a + b\varepsilon_1)^2} \quad (16)$$

式中, a 、 b 、 l 为试验常数, ε_1 为轴向应变。

在常规三轴试验中,由于 $\partial\sigma_2 = \partial\sigma_3$,所以结合式(16)可知切线变形模量为:

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial\varepsilon_1} = p_a \cdot \frac{a[a + (2l - b)\varepsilon_1]}{(a + b\varepsilon_1)^3} \quad (17)$$

在试验的起始点, $\varepsilon_1 = 0$,此时 $E_t = E_i$,则有:

$$E_i = \frac{p_a}{a} \quad (18)$$

Janbu^[31]于1963年提出土在三轴试验中初始模量 E_i 与围压 σ_c 之间的关系式可表示为:

$$E_i = K p_a \left(\frac{\sigma_c}{p_a} \right)^n \quad (19)$$

式中, K 与 n 为试验常数。

联立式(18)和(19)可知:

$$a = \frac{1}{K \left(\frac{\sigma_c}{p_a} \right)^n} \quad (20)$$

当切线模量 $E_t = 0$ 时,轴向应变为峰值轴向应变。由式(20)可知,试验常数 $a > 0$,根据式(17)计算可得峰值轴向应变 ε_{1p} 为:

$$\varepsilon_{1p} = \frac{a}{b - 2l} \quad (21)$$

令式(16)中的 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1p}$,即可得峰值偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_p$ 为:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_p = \frac{p_a}{4(b - l)} \quad (22)$$

即:

$$l = b - \frac{p_a}{4(\sigma_1 - \sigma_3)_p} \quad (23)$$

由式(16)可知,若轴向应变 $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$,可得极限偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 为:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = p_a \cdot \frac{l}{b^2} \quad (24)$$

定义破坏比 R_p 为:

$$R_p = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_p}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (25)$$

将式(22)和(24)代入式(25)可得:

$$R_p = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_p}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} = \frac{b^2}{4l(b - l)} \quad (26)$$

联立式(23)和(26),建立关于试验常数 b 的一元二次方程:

$$b^2 - \frac{p_a R_p}{(\sigma_1 - \sigma_3)_p} b + \frac{p_a R_p}{4(\sigma_1 - \sigma_3)_p^2} = 0 \quad (27)$$

当存在应变软化时, $(\sigma_1 - \sigma_3)_p > (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$,即 $R_p > 1$,此时一元二次方程的求根判别式为 $\Delta = (R_p^2 - R_p)/$

$(\sigma_1 - \sigma_3)_p^2 > 0$, 方程有解。根据求根公式可得:

$$b = p_a \cdot \frac{R_p \pm \sqrt{R_p^2 - R_p}}{2(\sigma_1 - \sigma_3)_p} \quad (28)$$

为进一步确定式(28)中正负号的取舍, 判别如下:

1) 由于 $(\sigma_1 - \sigma_3)_p > 0$, 代入式(22), 可知 $b > l$ 。结合式(23)和(28)化简可得 $p_a/[4(\sigma_1 - \sigma_3)_p] > 0$, 显然成立, 故此判别条件下, 式(28)无论取正号或负号均可。

2) 由于 $\varepsilon_{1p} > 0$, 且根据式(18)可知 $a > 0$, 故代入式(21)得 $b > 2l$ 。由此结合式(23)和(28)及 $(\sigma_1 - \sigma_3)_p > 0$ 进行讨论:

a. 当式(28)取正号时, 化简不等式得 $R_p < 1$, 此时不存在应变软化现象;

b. 当式(28)取负号时, 化简不等式得 $R_p > 1$, 此时存在应变软化现象。

3) 由于 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} > 0$, 代入式(24)可知 $l > 0$ 。由此结合式(23)和(28)及 $(\sigma_1 - \sigma_3)_p > 0$ 进行讨论:

a. 当式(28)取正号时, 化简不等式得 $0 > 1$, 不等式不存在, 故舍去;

$$E_t = \frac{64\sigma_c^3 \sin^3 \varphi_p K p_a^2 \left(\frac{\sigma_c}{p_a}\right)^n + 16\sigma_c^2 \sin^2 \varphi_p (1 - \sin \varphi_p) K^2 p_a^3 \left(\frac{\sigma_c}{p_a}\right)^{2n} \left(R_p - \sqrt{R_p^2 - R_p} - 1\right) \varepsilon_1}{\left[4\sigma_c \sin \varphi_p + (1 - \sin \varphi_p) K p_a \left(\frac{\sigma_c}{p_a}\right)^n \left(R_p - \sqrt{R_p^2 - R_p}\right) \varepsilon_1\right]^3} \quad (32)$$

该切线变形模量适用于存在应变软化的无黏性土, 所包含的3个材料常数 K 、 n 、 R_p 可通过常规三轴试验获得; 公式中峰值内摩擦角 φ_p 可由式(15)计算得出, 包含了 φ_0 、 φ_t 、 m 、 t 、 β 这5个材料常数, 均可由常规三轴试验获得。由试验数据按式(16)进行拟合得到不同围压下的试验常数, 利用式(18)计算出 E_t , 见表3。

表 3 不同围压下试验常数及 E_t 的取值

Tab. 3 Values of test constants and E_t under different confining pressures

围压 σ_c /kPa	a	b	l	E_t
100	0.001 41	0.048 67	0.001 44	$709.22p_a$
200	0.001 33	0.031 42	0.000 96	$751.88p_a$
300	0.001 29	0.023 64	0.000 74	$775.19p_a$
400	0.001 22	0.019 57	0.000 59	$819.67p_a$

绘制 $\lg(E_t/p_a)$ 与 $\lg(\sigma_c/p_a)$ 的关系图, 可知二者近似呈线性关系, 如图11所示。用线性函数拟合得到截距和斜率, 即 $\lg K$ 和 n 。本文试验所用钙质砂 $K = 706.50$, $n = 0.0985$, 拟合度 $R^2 = 0.9611$ 。

根据表3数据, 利用式(24)计算出 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$, 结合表2数据和破坏比 R_p 的定义计算出不同围压下的破坏比 R_p , 如表4所示。忽略其微小变化, 取平均值得到适用于本文钙质砂的破坏比 $R_p = 8.68$ 。

b. 当式(28)取负号时, 化简不等式得 $1 > 0$, 此时不等式恒成立。

综上所述, 当且仅当式(28)取负号时能同时满足上述3个条件, 且能够准确反映存在的应变软化现象, 因此:

$$b = p_a \cdot \frac{R_p - \sqrt{R_p^2 - R_p}}{2(\sigma_1 - \sigma_3)_p} \quad (29)$$

联立式(23)和(29)可得:

$$l = p_a \cdot \frac{2R_p - 2\sqrt{R_p^2 - R_p} - 1}{4(\sigma_1 - \sigma_3)_p} \quad (30)$$

根据莫尔-库仑强度准则, 对于无黏性土而言, 黏聚力 $c = 0$, 此时有:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_p = \frac{2\sigma_3 \sin \varphi_p}{1 - \sin \varphi_p} \quad (31)$$

将式(20)、(29)、(30)和(31)联立代入式(17), 得到切线变形模量如下:

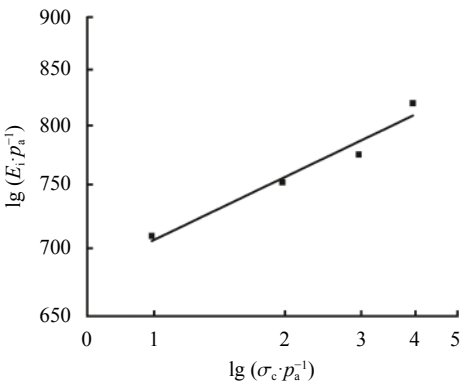


图 11 $\lg(E_t \cdot p_a^{-1})$ 与 $\lg(\sigma_c \cdot p_a^{-1})$ 的关系

Fig. 11 Relationship between $\lg(E_t \cdot p_a^{-1})$ and $\lg(\sigma_c \cdot p_a^{-1})$

表 4 不同围压下极限偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 和破坏比 R_p 取值

Tab. 4 Values of ultimate deviatoric stress $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ and failure ratio under different confining pressures

围压 σ_c /kPa	$(\sigma_1 - \sigma_3)_p$ /kPa	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ /kPa	R_p
100	536.21	61.64	8.70
200	855.17	98.60	8.67
300	1 169.08	134.27	8.71
400	1 350.26	156.21	8.64

5.3.2 切线体积比

为更加准确地描述钙质砂的剪胀特性, 采用分段函数对“南水”模型中的切线体积比进行修正。

当轴向应变 $\varepsilon_{1p} \leq \varepsilon_{1p}$ 时, 有:

$$\mu_t = \mu_{t0} \left(1 - \left(\frac{R}{M_c} \right)^\gamma \right) \quad (33)$$

式中: μ_{t0} 为材料常数, 表示初始切线体积比; R 为应力比, 对于常规三轴试验满足 $R=q/p=3(\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1+2\sigma_3)$; γ 为材料常数, 反映了应力比大小对剪胀性的影响; 峰值轴向应变 ε_{1p} 可由式(21)结合表3计算得出; M_c 为临胀应力比, 由式(34)确定:

$$M_c = \frac{6 \sin \varphi_c}{3 - \sin \varphi_c} \quad (34)$$

式中, φ_c 为临胀摩擦角。根据莫尔-库仑理论可知, φ_c 由式(35)进行计算:

$$\varphi_c = \arcsin \left(\frac{\sigma_{1c} - \sigma_3}{\sigma_{1c} + \sigma_3} \right) \quad (35)$$

式中, σ_{1c} 为围压为 σ_c 时临胀状态对应的大主应力值。当轴向应变 $\varepsilon_1 > \varepsilon_{1p}$ 时, 有:

$$\mu_t = \left(A \cdot e^{(\sigma_c/\tau_{pa})} - \delta \right) \left(\frac{R}{M_c} \right)^\gamma \quad (36)$$

式中, A 、 τ 、 δ 均为材料常数, 反映了围压对剪胀性的影响。

结合三轴试验数据, 由式(34)和(35)计算出不同围压对应的临胀摩擦角 φ_c 和临胀应力比 M_c , 见表5。

表 5 不同围压下临胀摩擦角 φ_c 和临胀应力比 M_c 的取值

Tab. 5 Values of critical expansion friction angle φ_c and critical expansion stress ratio M_c under different confining pressures

围压 σ_c/kPa	临胀大主应力 σ_{1c}/kPa	临胀摩擦角 $\varphi_c/^\circ$	临胀应力比 M_c
100	480.04	40.93	1.68
200	998.46	41.78	1.71
300	1 459.80	41.23	1.69
400	1 692.57	38.15	1.56

利用修正的切线体积比公式拟合不同围压下 μ_t 与 R/M_c 的关系如图12所示。

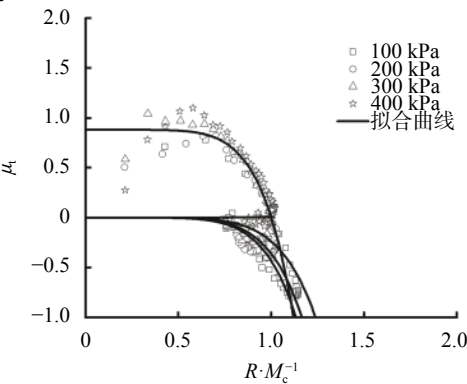


图 12 不同围压下 μ_t 与 R/M_c 的关系

Fig. 12 Relationship between μ_t and R/M_c under different confining pressures

由以上可以得到, 本文所用的钙质砂的材料常数 μ_{t0} 、 γ 、 A 、 τ 和 δ 分别为0.880 3、6.713 0、0.040 0、1.546 7和0.507 4, 拟合度为 $R^2=0.981 4$ 。当 $R=M_c$ 时, 为临胀转折点, 此时 $\mu_t=0$, 而且不论围压如何, 当轴向应变足够大时, 最终切线体积比趋近于0, 达到极限体积应变。

综上可知, 作者建立的基于分形理论的考虑颗粒破碎的钙质砂本构模型一共有 K 、 n 、 R_p 、 φ_0 、 φ_t 、 m 、 t 、 β 、 μ_{t0} 、 γ 、 A 、 τ 和 δ 共13个材料常数。

6 数值模拟

将修正的本构模型利用Fortran语言汇编程序, 结合三轴试验测得的材料常数进行模拟, 将模拟结果与试验结果进行对比, 如图13所示。同时结合蔡正银等[20]文献中另一密实度、另一级配钙质砂三轴试验数据, 对所建立模型进行推广验证, 结果如图14所示。

分析图13和14的对比验证结果可知, 采用作者修正的基于分形理论考虑颗粒破碎的本构模型能够较好地反映不同围压下, 某一密实度、某一级配钙质砂试样的应变软化和剪胀性, 而且材料常数简明易求, 与三轴试验结果较为吻合, 具有一定的合理性和准确性。

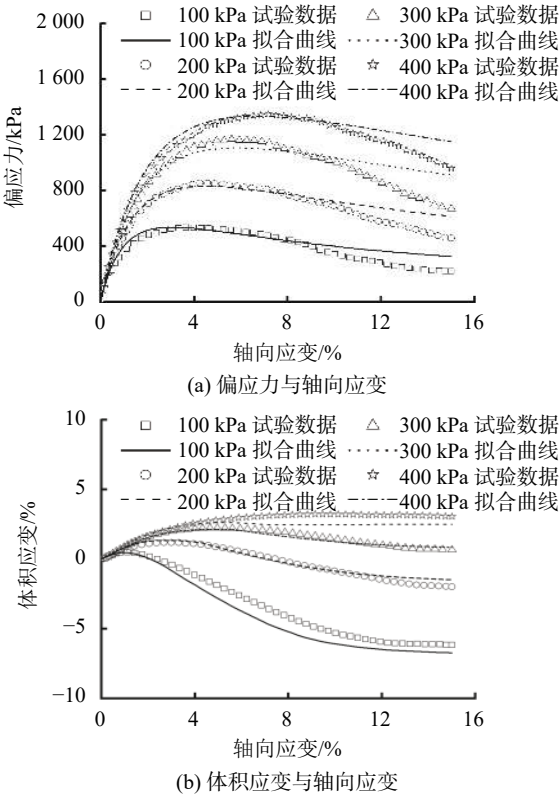


图 13 模拟结果与试验结果对比

Fig. 13 Comparison between simulation results and experimental results

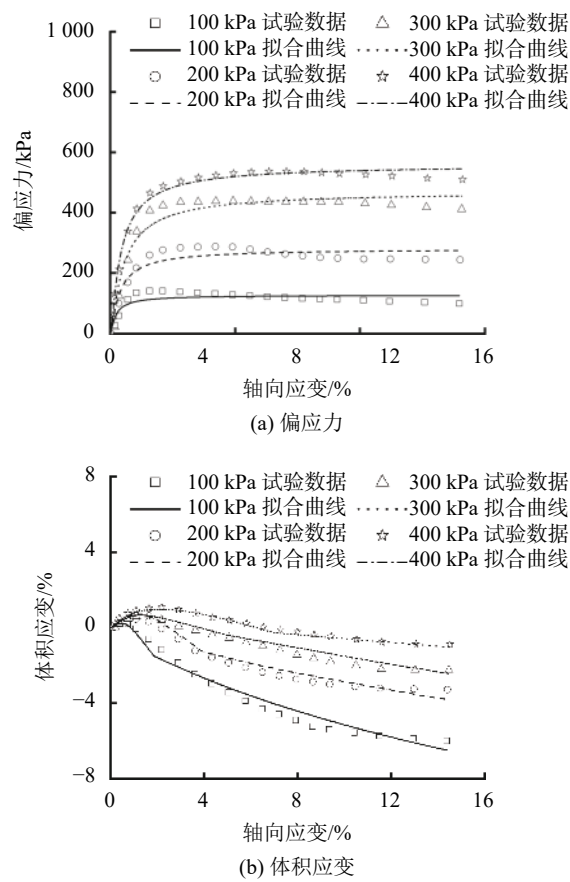


图 14 模型推广验证结果

Fig. 14 Results of model extension validation

7 结 论

结合三轴试验结果对“南水”模型中的切线变形模量和切线体积比进行修正，并基于分形理论引入颗粒破碎指标描述颗粒破碎影响下钙质砂存在的剪胀性和应变软化现象，通过汇编程序进行模拟对比分析，得出如下结论：

- 1)随着围压的增大，颗粒破碎越明显，其对应的级配曲线越高，细粒含量相对越大，尤其介于0.5~2.0 mm粒径范围内的颗粒含量占比变化幅度最大。采用相对破碎率描述钙质砂的破碎程度，并基于分形理论建立了受围压影响下钙质砂颗粒破碎的函数关系式。
- 2)基于莫尔-库仑理论，引入颗粒破碎指标，建立峰值内摩擦角与其的关系式。当颗粒无破碎时，存在初始峰值内摩擦角；随着颗粒的破碎程度的增大，峰值内摩擦角逐渐减小。
- 3)基于峰值内摩擦角与颗粒破碎指标的关系式，采用驼峰曲线及分段函数对“南水”模型中的切线变形模量及切线体积比进行修正，修正后的模型能够较好地描述颗粒破碎影响下的钙质砂应变软化现象和剪胀特性。

4)本文修正的本构模型材料常数意义明确，仅通过常规三轴试验即可得到能够描述颗粒破碎影响下钙质砂剪胀性和应变软化现象的本构关系参数，且通过模型推广验证可知具有一定的参考价值。

参考文献：

[1] Liu Xiaodong,Sun Liguang,Cheng Zhongqi,et al.Paleoenvironmental implications of the guano phosphatic cementation on Dongdao Island in the South China Sea[J].*Marine Geology*,2007,247(1):1-16.

[2] Wang Ren,Wu Wenjuan.Exploration and research on engineering geological properties of coral reefs—Engaged in coral reef research for 30 years[J].*Journal of Engineering Geology*,2019,27(1):202-207.[汪稔,吴文娟.珊瑚礁岩土工程地质的探索与研究——从事珊瑚礁研究30年[J].*工程地质学报*,2019,27(1):202-207.]

[3] Manal S,Hussein E,Shehab A.Static and cyclic behavior of north coast calcareous sand in Egypt[J].*Soil Dynamics and Earthquake Engineering*,2013,55:83-91.

[4] Ata A,Salem T N,Hassan R.Geotechnical characterization of the calcareous sand in northern coast of Egypt[J].*Ain Shams Engineering Journal*,2018,9(4):3381-3390.

[5] Davor P,Marijan K,Igor V,et al.Topography controlling the wind regime on the karstic coast:Late Pleistocene coastal calcareous sands of eastern mid-Adriatic,Croatia[J].*Facies*,2014,60(4):843-863.

[6] Zhu Changqi,Wang Xinzh,Chen Haiyang,et al.Experimental microscopic study of inner pores of calcareous sand[J].*Materials Research Innovations*,2014,18(Supp2):207-214.

[7] Wang Xinzh,Wang Xing,Jin Zongchuan,et al.Investigation of engineering characteristics of calcareous soils from fringing reef[J].*Ocean Engineering*,2017,134:77-86.

[8] Jiang Lu,Fan Jianhua,Wang Zhengjin,et al.Mechanical property of calcareous sand under action of compaction[J].*Global Geology*,2015,18(3):183-187.

[9] Shen Yang,Zhu Yinghao,Liu Hanlong,et al.Macro-meso effects of gradation and particle morphology on the compressibility characteristics of calcareous sand[J].*Bulletin of Engineering Geology and the Environment*,2018,77(3):1047-1055.

[10] Wang Xinzh,Jiao Yuyong,Wang Ren,et al.Engineering characteristics of the calcareous sand in Nansha Islands, South China Sea[J].*Engineering Geology*,2011,120(1):40-47.

[11] Wang Yiqun,Hong Yi,Guo Zhen,et al.Micro-and macro-mechanical behavior of crushable calcareous sand in South China Sea[J].*Rock and Soil Mechanics*,2018,39(1):199-206.[汪轶群,洪义,国振,等.南海钙质砂宏观破碎力学特性[J].*岩土力学*,2018,39(1):199-206.]

- [12] Wei Houzhen,Zhao Tao,He Jianqiao,et al.Evolution of particle breakage for calcareous sands during ring shear tests[J].*International Journal of Geomechanics*,2018,18(2): 04017153.
- [13] Wu Yang,Cui Jie,Li Neng,et al.Experimental study on the mechanical behavior and particle breakage characteristics of hydraulic filled coral sand on a coral reef island in the South China Sea[J].*Rock and Soil Mechanics*,2020,41(10):3181–3191.[吴杨,崔杰,李能,等.岛礁吹填珊瑚砂力学行为与颗粒破碎特性试验研究[J].*岩土力学*,2020,41(10):3181–3191.]
- [14] Impe V,William F.Some fundamental issues and examples of geo-engineering challenges caused by crushable sands[J].*Indian Geotechnical Journal*,2016,46(4):335–353.
- [15] Daouadji A,Hicher P Y,Rahma A.An elastoplastic model for granular materials taking into account grain breakage[J].*European Journal of Mechanics*,2001,20(1):113–137.
- [16] Sun Jizhu,Luo Xinwen.Study on a two-yield surface model with consideration of state-dependent dilatancy for calcareous sand[J].*Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*,2006,25(10):2145–2149.[孙吉主,罗新文.考虑剪胀性与状态相关的钙质砂双屈服面模型研究[J].*岩石力学与工程学报*,2006,25(10):2145–2149.]
- [17] Sun Yifei,Chen Cheng.Fractional order creep model for coral sand[J].*Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2019,23(4):465–476.
- [18] Hu Bo.Study on mechanical properties and constitutive model of calcareous sand granules under triaxial conditions[D].Wuhan:Wuhan Institute of Geotechnical Mechanics,Chinese Academy of Sciences,2008.[胡波.三轴条件下钙质砂颗粒破碎力学性质与本构模型研究[D].武汉:中国科学院武汉岩土力学研究所,2008.]
- [19] Wang Yasong,Ma Linjian,Wang Mingyang,et al.A creep constitutive model incorporating deformation mechanisms for crushable calcareous sand[J].*Arabian Journal of Geosciences*, 2018,11(2018):623–630.
- [20] Cai Zhengyin,Hou Heying,Zhang Jinxun,et al.Critical state and constitutive model for coral sand considering particle breakage[J].*Chinese Journal of Geotechnical Engineering*,2019, 41(6):989–995.[蔡正银,侯贺营,张晋勋,等.考虑颗粒破碎影响的珊瑚砂临界状态与本构模型研究[J].*岩土工程学报*,2019,41(6):989–995.]
- [21] Wen Changping,Wang Jiejun.Stress-strain characteristics of bioenzyme-treated expansive soil based on SHEN Zhujiang's elasto-plastic model with double yield surfaces[J].*Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*,2018, 37(4):1011–1019.[文畅平,王解军.基于南水模型的生物酶改良膨胀土应力-应变关系研究[J].*岩石力学与工程学报*,2018,37(4):1011–1019.]
- [22] Gu Jianxiao,Yang Junyan,Wang Yong,et al.Simulation of carbonate sand with triaxial tests data based on modified model of South water double yield surface[J].*Rock and Soil Mechanics*,2019,40(12):4597–4606.[谷建晓,杨钧岩,王勇,等.基于南水模型的钙质砂应力-应变关系模拟[J].*岩土力学*,2019,40(12):4597–4606.]
- [23] Cui Xiang,Hu Mingjian,Zhu Changqi,et al.Study on the microscopic characteristics of three-dimensional pores in coral sand[J].*Rock and Soil Mechanics*,2020,41(11):3632–3640.[崔翔,胡明鉴,朱长歧,等.珊瑚砂三维孔隙微观特性研究[J].*岩土力学*,2020,41(11):3632–3640.]
- [24] Wang Xinzhi,Wang Xing,Weng Yiling,et al.Characteristics of dry density of calcareous sand and its testing methods[J].*Rock and Soil Mechanics*,2016,37(Supp2):316–322.[王新志,王星,翁贻令,等.钙质砂的干密度特征及其试验方法研究[J].*岩土力学*,2016,37(增刊2):316–322.]
- [25] 沈珠江.土体应力应变分析的一种新模型[C]//第五届土力学及基础工程学术讨论会论文集.北京:中国建筑工业出版社,1990:101–105.
- [26] Tyler S W,Wheatcraft S W.Fractal scaling of soil particle size distributions:Analysis and limitations[J].*Soil Science Society of America Journal*,1992,56(20):362–369.
- [27] Einav I.Breakage mechanics—Part I:Theory[J].*Journal of the Mechanics and Physics of Solids*,2007,55:1274–1297.
- [28] Hardin B O.Crushing of soil particles[J].*Journal of Geotechnical Engineering*,1985,111(10):1177–1192.
- [29] Coop M R,Sorensen K K,Bodas Freitas T,et al.Particle breakage during shearing of a carbonate sand[J].*Geotechnique*,2004,54(3):157–163.
- [30] Shen Zhujiang.A nonlinear dilatant stress-strain model for soil and rock material[J].*Hydro-Science and Engineering*, 1986(4):1–14.[沈珠江.考虑剪胀性的土和石料的非线性应力应变模式[J].*水利水运科学研究*,1986(4):1–14.]
- [31] Janbu N.Soil compressibility as determined by odometer and triaxial tests[C]//European Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering.Wiesbaden,1963:19–25.

(编辑 李轶楠)

引用格式: Hou Heying,Pan Zhuojie,Jiang Pengming.Double yield surface model of calcareous sand considering particle breakage[J].*Advanced Engineering Sciences*,2021,53(6):132–141.[侯贺营,潘卓杰,姜朋明.考虑颗粒破碎的钙质砂双屈服面模型[J].*工程科学与技术*,2021,53(6):132–141.]