平面上一类自相似集的共形维数

党云贵^{1,2}, 文胜友^{1*}

1. 湖北大学应用数学湖北省重点实验室, 武汉 430062;

2. 吕梁学院数学系, 吕梁 033000

E-mail: 563049383@qq.com, sywen_65@163.com

收稿日期: 2019-11-12; 接受日期: 2020-08-10; 网络出版日期: 2020-10-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871200 和 11671189) 和山西省高等学校科技创新项目 (批准号: 2019L0963) 资助项目

摘要 本文证明了平面上一类自相似集的共形维数为 1. 此外还证明了这些自相似集与任何 Hausdorff 维数为 1 的度量空间都不是拟对称等价的. 这表明, 对于这些自相似集而言, 共形维数定义中的下确界不能达到.

关键词 共形维数 拟对称极小集 自相似集

MSC (2020) 主题分类 28A78, 30C62

1 引言

1980 年, Tükia 和 Väisälä^[1] 建立了拟对称映射的基本理论, 它作为一类特殊的映射, 可以保持集合的 Hausdorff 维数, 也可以改变一个集合的 Hausdorff 维数. Pansu^[2] 首次考虑了一个集合在拟对称映射下的像集的 Hausdorff 维数的下确界, 并将这个下确界称为该集合的共形维数. 本文用 $|a - b|$ 表示任何度量空间中两点 a 和 b 之间的距离.

定义 1.1 度量空间 X 的共形维数定义为

$$\dim_C X = \inf\{\dim_H Y : Y \text{ 是与 } X \text{ 拟对称等价的度量空间}\}.$$

若 $\dim_C X = \dim_H X$, 则称 X 为拟对称极小的. 这里称度量空间 X 与 Y 是拟对称等价的, 如果存在一个同胚映射 $f : X \rightarrow Y$ 以及一个同胚映射 $\eta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, 使得对 X 中任意 3 个不同的点 a, b 和 x , 都有

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|f(x) - f(b)|} \leq \eta\left(\frac{|x - a|}{|x - b|}\right).$$

称上面的映射 f 为一个拟对称映射.

英文引用格式: Dang Y G, Wen S Y. Conformal dimension of a class of planar self-similar sets (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 581–590, doi: 10.1360/SSM-2019-0275

根据上面的定义, X 是拟对称极小的度量空间当且仅当对任意将 X 映成度量空间 Y 的拟对称映射 f , 都有

$$\dim_H fX \geq \dim_H X.$$

定义 1.2 一个同胚 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为一个 K -拟共形映射, 如果任给 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{|y-x|=r} |g(y) - g(x)|}{\min_{|y-x|=r} |g(y) - g(x)|} \leq K.$$

众所周知, 当 $n \geq 2$ 时, 一个同胚 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是拟对称的当且仅当它是拟共形的. 因此, 如果 $X \subset \mathbb{R}^n$, 则有

$$\dim_C X \leq \inf\{\dim_H f(X) : f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ 是拟共形映射}\}. \quad (1.1)$$

2000 年, Tyson^[3] 证明了, 对任意 $\alpha \geq 1$, 存在 Hausdorff 维数为 α 的拟对称极小集. 2006 年, Kovalev^[4] 证明了, Hausdorff 维数小于 1 的集的共形维数都等于 0. 2010 年, Hakobyan^[5] 证明了, 直线上存在长度为 0、共形维数为 1 的 Cantor 集.

关于共形维数的计算以及极小集的确定等问题, 已有许多研究成果. Wang 和 Wen^[6] 对于直线上的拟对称极小集给出了较完整的描述. Mackay 和 Tyson^[7] 证明了, 对任意紧集 $Z \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, 乘积集 $[0, 1] \times Z$ 是拟对称极小集. 集 Z 的紧性可减弱为 Borel 可测 (参见文献 [8]). Bishop 和 Tyson^[9] 给出了平面上的一类“天线”集的共形维数. 随后, Tyson 和 Wu^[10] 计算了某些自相似集的共形维数, 例如, 他们证明了 Sierpinski 三角形的共形维数为 1. Keith 和 Laakso^[11] 证明了 Sierpinski 地毯不是拟对称极小集. Tyson^[3] 证明了 Sierpinski 地毯的共形维数严格大于 $3/2$, 但其精确值仍未求得. 因此, 进一步发展共形维数的计算技巧是有意义的.

本文研究平面上的一类自相似集. 使用复数记号, 用 i 表示虚数单位. 设 $0 < \alpha < 1/2$. 设

$$f_1^\alpha(z) = \frac{z}{2}, \quad f_2^\alpha(z) = \frac{z+1}{2}, \quad f_3^\alpha(z) = \frac{1}{2} + \alpha iz, \quad f_4^\alpha(z) = \frac{1}{2} - \alpha iz.$$

由文献 [12, 定理 9.1] 可知, 存在唯一的非空紧集 X_α , 使得

$$X_\alpha = f_1^\alpha(X_\alpha) \cup f_2^\alpha(X_\alpha) \cup f_3^\alpha(X_\alpha) \cup f_4^\alpha(X_\alpha). \quad (1.2)$$

集 X_α 为由迭代函数系 $\{f_1^\alpha, f_2^\alpha, f_3^\alpha, f_4^\alpha\}$ 生成的自相似集且满足开集条件. 实际上, 设 D_α 是以 $0, \frac{1}{2} - i\alpha$, 1 和 $\frac{1}{2} + i\alpha$ 为顶点的开菱形, 则对任意的 $1 \leq k \neq j \leq 4$, 有

$$f_k^\alpha(D_\alpha) \subset D_\alpha \quad \text{且} \quad f_k^\alpha(D_\alpha) \cap f_j^\alpha(D_\alpha) = \emptyset.$$

由文献 [12, 定理 9.3] 可知, $\dim_H X_\alpha = d_\alpha$, 其中 d_α 是方程

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{d_\alpha} + 2\alpha^{d_\alpha} = 1$$

的唯一正数解. 由此可知,

$$\dim_H X_\alpha > 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \dim_H X_\alpha = 1. \quad (1.3)$$

下面给出本文的主要结果.

定理 1.1 任给 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 有

$$\dim_C X_\alpha = 1.$$

由定理 1.1 可知, 任给 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, X_α 不是拟对称极小集. 下面的结果是更强的.

定理 1.2 设 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. 若度量空间 Y 与 X_α 拟对称等价, 则

$$\dim_H Y > 1.$$

应用定理 1.1 和 1.2, 我们可得到下面的推论.

推论 1.1 任给 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, X_α 的共形维数不能达到, 即若度量空间 Y 与 X_α 拟对称等价, 则

$$\dim_H Y > \dim_C X_\alpha.$$

本文余下内容的安排如下: 第 2 节证明定理 1.1. 第 3 节证明定理 1.2.

2 定理 1.1 的证明

本节证明定理 1.1. 用 D_α 表示以 $0, \frac{1}{2} - i\alpha, 1$ 和 $\frac{1}{2} + i\alpha$ 为顶点的闭菱形, 类似定义 D_β . 于是有

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1 i_2 \cdots i_k} f_{i_1}^\alpha \circ f_{i_2}^\alpha \circ \cdots \circ f_{i_k}^\alpha(D_\alpha), \\ X_\beta &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1 i_2 \cdots i_k} f_{i_1}^\beta \circ f_{i_2}^\beta \circ \cdots \circ f_{i_k}^\beta(D_\beta). \end{aligned}$$

上面的并取遍由数字 1、2、3 和 4 构成的 k 项序列.

引理 2.1 存在一个常数 $K \geq 1$ 以及一个从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 上的分片仿射映射序列 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$, 使得

- (1) 对每个 k , g_k 是一个 K -拟共形映射;
- (2) 对每个 k 以及每个 $i_1 i_2 \cdots i_k$, 有

$$g_k(f_{i_1}^\alpha \circ f_{i_2}^\alpha \circ \cdots \circ f_{i_k}^\alpha(D_\alpha)) = f_{i_1}^\beta \circ f_{i_2}^\beta \circ \cdots \circ f_{i_k}^\beta(D_\beta).$$

证明 不妨设 $\alpha > \beta$. 首先, 存在唯一一个可逆的线性变换 $g_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 满足

$$\begin{aligned} g_0(0) &= 0, & g_0\left(\frac{1}{2} - i\alpha\right) &= \frac{1}{2} - i\beta, \\ g_0(1) &= 1, & g_0\left(\frac{1}{2} + i\alpha\right) &= \frac{1}{2} + i\beta. \end{aligned}$$

易知, $g_0(D_\alpha) = D_\beta$, g_0 将 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆映成一个椭圆, g_0 是 K_0 -拟共形映射, 其中 $K_0 = \alpha/\beta$ 为该椭圆的长轴与短轴之比.

注意 $D_\alpha \setminus \bigcup_{j=1}^4 f_j^\alpha(D_\alpha)$ 和 $D_\beta \setminus \bigcup_{j=1}^4 f_j^\beta(D_\beta)$ 都可分解为 8 个三角形, 见图 1. 可构造分片仿射同胚映射 $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 使得 $D_\alpha \setminus \bigcup_{j=1}^4 f_j^\alpha(D_\alpha)$ 的 8 个三角形依次映成 $D_\beta \setminus \bigcup_{j=1}^4 f_j^\beta(D_\beta)$ 的 8 个三角形. 映射 g_1 的具体定义如下:

 图 1 自相似集 X_α (a) 和 X_β (b) 的构造的第一步

$$g_1(z) = \begin{cases} f_j^\beta \circ g_0 \circ (f_j^\alpha)^{-1}(z), & \text{若 } z \in f_j^\alpha(D_\alpha), \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ g_0(z), & \text{若 } z \in \mathbb{R}^2 \setminus D_\alpha, \\ 8 \text{ 个分片仿射变换}, & \text{若 } z \in D_\alpha \setminus \bigcup_{j=1}^4 f_j^\alpha(D_\alpha). \end{cases}$$

用 K_j ($1 \leq j \leq 8$) 表示这 8 个仿射映射的拟共形常数, 令 $K = \max_{0 \leq j \leq 8} K_j$. 易知, g_1 是 K -拟共形映射.

当 $k \geq 2$ 时, 定义 $g_k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 如下:

$$g_k(z) = \begin{cases} f_j^\beta \circ g_{k-1} \circ (f_j^\alpha)^{-1}(z), & \text{若 } z \in f_j^\alpha(D_\alpha), \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ g_1(z), & \text{若 } z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^4 f_j^\alpha(D_\alpha). \end{cases}$$

因为一个拟共形映射复合相似映射不改变其拟共形常数, 可归纳证明: 对每个整数 $k \geq 2$, g_k 是 K -拟共形映射. 这样我们定义了一个 K -拟共形映射序列 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$.

任给 k , 任给由数字 1、2、3 和 4 构成的一个 k 项序列 $i_1 i_2 \cdots i_k$, 依次应用 $g_k, g_{k-1}, \dots, g_1, g_0$ 的定义可得

$$\begin{aligned} & g_k(f_{i_1}^\alpha \circ \cdots \circ f_{i_k}^\alpha(D_\alpha)) \\ &= f_{i_1}^\beta \circ g_{k-1} \circ f_{i_2}^\alpha \circ \cdots \circ f_{i_k}^\alpha(D_\alpha) \\ &= f_{i_1}^\beta \circ f_{i_2}^\beta \circ g_{k-2} \circ f_{i_3}^\alpha \circ \cdots \circ f_{i_k}^\alpha(D_\alpha) \\ &= \cdots \\ &= f_{i_1}^\beta \circ f_{i_2}^\beta \circ \cdots \circ f_{i_k}^\beta \circ g_0(D_\alpha) \\ &= f_{i_1}^\beta \circ \cdots \circ f_{i_k}^\beta(D_\beta). \end{aligned}$$

证毕. □

引理 2.2 任给 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$, 存在拟共形映射 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 使得

$$g(X_\alpha) = X_\beta.$$

证明 给定 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$. 设 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ 是引理 2.1 中从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的 K -拟共形映射序列. 下面证明该序列 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ 逐点收敛. 事实上, 若 $z \in \mathbb{R}^2 \setminus X_\alpha$, 由 g_k 的构造知, 序列 $\{g_k(z)\}_{k=0}^\infty$ 是最终常值序

列, 即从某项开始后面的项都相等, 从而 $\{g_k(z)\}_{k=0}^\infty$ 收敛. 若 $z \in X_\alpha$, 由自相似集 X_α 的构造知, 存在由数字 1、2、3 和 4 构成的一个无限序列 $i_1 i_2 \cdots$, 使得

$$z = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_{i_1}^\alpha \circ f_{i_2}^\alpha \circ \cdots \circ f_{i_k}^\alpha(D_\alpha).$$

据此, 结合引理 2.1(2) 可知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(z) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_{i_1}^\beta \circ f_{i_2}^\beta \circ \cdots \circ f_{i_k}^\beta(D_\beta).$$

这证明了 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ 逐点收敛. 设 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ 的极限函数为 g , 可见 $g(X_\alpha) = X_\beta$. 最后, 由文献 [13, 定理 37.3] (若 K -拟共形映射序列逐点收敛, 则极限为常值映射或 K -拟共形映射) 可知, g 是 K -拟共形映射. $\square$

定理 1.1 的证明 因为 X_α 是连通集且 $\dim_H X_\alpha > 1$, X_α 的拟对称像都是连通集, 所以,

$$\dim_C X_\alpha \geq 1.$$

另一方面, 由引理 2.2 知, 任给 $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, X_α 与 X_β 是拟对称等价的, 结合 (1.1) 和 (1.3) 可得

$$\dim_C X_\alpha \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} \dim_H X_\beta = 1.$$

综上, $\dim_C X_\alpha = 1$. $\square$

3 定理 1.2 的证明

本节用 X 表示自相似集 $X_{1/4}$. 它是迭代函数系统

$$f_1(z) = \frac{z}{2}, \quad f_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2}, \quad f_3(z) = \frac{1}{2} + \frac{iz}{4}, \quad f_4(z) = \frac{1}{2} - \frac{iz}{4}$$

的不变集. 对每个正整数 k , 用 $\{1, 2, 3, 4\}^k$ 表示由数字 1、2、3 和 4 构成的 k 项序列 $i_1 i_2 \cdots i_k$ 的集. 当 $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_k$ 时, 记 $f_\sigma = f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}$, $X_\sigma = f_\sigma(X)$, 称 X_σ 为 X 的一个 k 级复制. 用 D 表示以 0 、 $1/2 - i/4$ 、 1 和 $1/2 + i/4$ 为顶点的闭菱形, 它等于 X 的凸包. 记 $D_\sigma = f_\sigma(D)$.

3.1 证明思路

设 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. 设度量空间 X_α 与 Y 拟对称等价, 要证 $\dim_H Y > 1$. 不妨设 $\alpha = 1/4$, 因为引理 2.2 已证明了 X_α 与 $X_{1/4}$ 拟共形等价.

设 $g: X \rightarrow Y$ 是 η -拟对称同胚映射. 我们将证明存在 $s > 1$ 以及 X 上一个概率测度 μ , 使得对于每个 k 以及每个 $\sigma \in \{1, 2, 3, 4\}^k$, 有

$$\mu(X_\sigma) \leq C|g(X_\sigma)|^s.$$

上面的测度 μ 在映射 g 下的像测度 $\nu := \mu \circ g^{-1}$ 是 Y 上一个概率测度. 我们将证明测度 ν 满足条件: 对于所有球 $B(y, r) \subset Y$, 有

$$\nu(B(y, r)) \leq Cr^s. \quad (3.1)$$

据此, 利用质量分布原理即得 $\dim_H Y \geq s$.

注意, 常数 $s > 1$ 的存在性、测度 μ 的构造以及像测度 ν 的定义与性质都依赖于给定的拟对称映射 g . 后面证明中的映射 g 指的都是这个映射.

3.2 常数 $s > 1$ 的存在性

对于 $\sigma \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{1, 2, 3, 4\}^k$, 记 $d_\sigma = |g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1))|$.

引理 3.1 存在常数 $s > 1$, 使得对于每个 k 以及每个 $i_1 i_2 \cdots i_k \in \{1, 2, 3, 4\}^k$, 有

$$\sum_{i=1}^4 d_{\sigma i}^s > d_\sigma^s.$$

证明 给定 k 及 $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_k \in \{1, 2, 3, 4\}^k$, 由 f_1 、 f_2 、 f_3 和 f_4 的定义有

$$\begin{aligned} d_{\sigma 1} &= |g(f_\sigma(f_1(0))) - g(f_\sigma(f_1(1)))| = \left| g(f_\sigma(0)) - g\left(f_\sigma\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right|, \\ d_{\sigma 2} &= |g(f_\sigma(f_2(0))) - g(f_\sigma(f_2(1)))| = \left| g\left(f_\sigma\left(\frac{1}{2}\right)\right) - g(f_\sigma(1)) \right|, \\ d_{\sigma 3} &= |g(f_\sigma(f_3(0))) - g(f_\sigma(f_3(1)))| = \left| g\left(f_\sigma\left(\frac{1}{2}\right)\right) - g\left(f_\sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)\right) \right|, \\ d_{\sigma 4} &= |g(f_\sigma(f_4(0))) - g(f_\sigma(f_4(1)))| = \left| g\left(f_\sigma\left(\frac{1}{2}\right)\right) - g\left(f_\sigma\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4}\right)\right) \right|. \end{aligned}$$

据此, 由三角不等式得

$$d_{\sigma 1} + d_{\sigma 2} \geq d_\sigma. \quad (3.2)$$

由 g 的拟对称性得

$$\begin{aligned} \frac{d_{\sigma 3}}{d_\sigma} &= \frac{|g(f_\sigma(1/2)) - g(f_\sigma(1/2 + i/4))|}{|g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1))|} \\ &\leq \frac{|g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1/2))|}{|g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1))|} + \frac{|g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1/2 + i/4))|}{|g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1))|} \\ &\leq \eta \left(\frac{|f_\sigma(0) - f_\sigma(1/2)|}{|f_\sigma(0) - f_\sigma(1)|} \right) + \eta \left(\frac{|f_\sigma(0) - f_\sigma(1/2 + i/4)|}{|f_\sigma(0) - f_\sigma(1)|} \right) \\ &\leq \eta \left(\frac{1}{2} \right) + \eta \left(\left| \frac{1}{2} + \frac{i}{4} \right| \right) \\ &\leq 2\eta(1). \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} \frac{d_\sigma}{d_{\sigma 3}} &= \frac{|g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1))|}{|g(f_\sigma(1/2)) - g(f_\sigma(1/2 + i/4))|} \\ &\leq \frac{|g(f_\sigma(0)) - g(f_\sigma(1/2))| + |g(f_\sigma(1/2)) - g(f_\sigma(1))|}{|g(f_\sigma(1/2)) - g(f_\sigma(1/2 + i/4))|} \\ &\leq 2\eta(2). \end{aligned}$$

因此 $d_{\sigma 3} \simeq d_{\sigma}$. 同理可得 $d_{\sigma 4} \simeq d_{\sigma}$. 因此, 由 (3.2) 可知, 存在常数 $M > 0$ (仅与 η 有关), 使得

$$\sum_{i=1}^4 d_{\sigma i} \geq (1+M)d_{\sigma}.$$

从而存在仅与 η 有关的常数 $s > 1$, 使得 $\sum_{i=1}^4 d_{\sigma i}^s > d_{\sigma}^s$ 成立. $\square$

3.3 X 上概率测度 μ 的定义与性质

给定 k 及 $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_k \in \{1, 2, 3, 4\}^k$, 记 $\sigma^* = i_1 i_2 \cdots i_{k-1}$. 利用上述 $s > 1$, 定义 X 上一个概率测度 μ 满足

$$\mu(X) = 1, \quad \mu(X_{\sigma}) = \frac{d_{\sigma}^s}{\sum_{j=1}^4 d_{\sigma^* j}^s} \mu(X_{\sigma^*}),$$

这里当 σ 的长度为 1 时, $X_{\sigma^*} = X$. 这个概率测度具有以下重要性质.

引理 3.2 存在仅与 η 有关的常数 C , 使得对每个 k 以及每个 $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_k \in \{1, 2, 3, 4\}^k$, 有

$$\mu(X_{\sigma}) \leq C d_{\sigma}^s.$$

证明 给定 k 及 $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_k \in \{1, 2, 3, 4\}^k$, 由引理 3.1 及测度 μ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \frac{\mu(X_{\sigma})}{d_{\sigma}^s} &= \frac{\mu(X_{\sigma^*})}{\sum_{j=1}^4 d_{\sigma^* j}^s} = \frac{\mu(X_{\sigma^{**}})}{\sum_{j=1}^4 d_{\sigma^{**} j}^s} \frac{d_{\sigma^*}^s}{\sum_{j=1}^4 d_{\sigma^* j}^s} \\ &\leq \frac{\mu(X_{\sigma^{**}})}{\sum_{j=1}^4 d_{\sigma^{**} j}^s} \leq \cdots \leq \frac{\mu(X)}{\sum_{j=1}^4 d_j^s} = \frac{1}{\sum_{j=1}^4 d_j^s}. \end{aligned}$$

取 $C = (\sum_{j=1}^4 d_j^s)^{-1}$ 即可. $\square$

3.4 测度 μ 的像测度 ν 满足 (3.1)

由拟对称性的定义知, η -拟对称同胚映射 g 的逆 g^{-1} 是 $1/\eta^{-1}(t^{-1})$ -拟对称映射. 由 g^{-1} 的拟对称性知, 对每个 $b \in Y$, 有

$$B(g^{-1}y, \eta^{-1}(1)|g^{-1}y - g^{-1}b|) \subseteq g^{-1}(B(y, |y - b|)) \subseteq B\left(g^{-1}y, \frac{|g^{-1}y - g^{-1}b|}{\eta^{-1}(1)}\right).$$

设 $B(y, r)$ 是 Y 中的球, $0 < r < |Y|/2$. 因为 X 是连通的, 所以 Y 是连通的, 从而存在 $b \in Y$ 使得 $|y - b| = r$. 记 $x = g^{-1}y$, $r_1 = \eta^{-1}(1)|g^{-1}y - g^{-1}b|$, $t = (\eta^{-1}(1))^{-2}$. 这样由上述包含关系得

$$B(x, r_1) \subseteq g^{-1}(B(y, r)) \subseteq B(x, tr_1). \quad (3.3)$$

定义

$$\mathcal{G} := \left\{ \sigma : |D_{\sigma}| \leq r_1 < |D_{\sigma^*}|, D_{\sigma} \cap g^{-1}(B(y, r)) \neq \emptyset, \sigma \in \bigcup_{k \geq 1} \{1, 2, 3, 4\}^k \right\},$$

这里 D 是以 0 , $1/2 - i/4$, 1 和 $1/2 + i/4$ 为顶点的闭菱形, $D_{\sigma} = f_{\sigma}(D)$. 我们有如下结果.

引理 3.3 存在仅与 η 有关的正常数 N , 使得 $\sharp \mathcal{G} \leq N$, 这里 $\sharp \mathcal{G}$ 表示集 $\mathcal{G}$ 中元素的个数.

证明 设 $\sigma \in \mathcal{G}$, 则 $r_1/4 \leq |D_\sigma| \leq r_1$, 从而 $A(D_\sigma) \geq r_1^2/64$, 这里 $A(D_\sigma)$ 表示 D_σ 的面积. 因为

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{G}} D_\sigma \subseteq B(x, (1+t)r_1)$$

且上面并集中两个不同的菱形至多只有一个交点, 比较面积得

$$\#\mathcal{G} \frac{r_1^2}{64} \leq \pi(1+t)^2 r_1^2.$$

因此,

$$\#\mathcal{G} \leq 64\pi(1+t)^2.$$

取 $N = 64\pi(1+t)^2$ 即可, 这里, 因为 t 仅依赖于 η , 可见 N 仅依赖于 η . □

引理 3.4 存在仅与 η 有关的常数 C , 使得对任意 $\tau, \omega \in \mathcal{G}$, 有 $d_\tau \leq C d_\omega$.

证明 给定 $\tau, \omega \in \mathcal{G}$. 由 $\mathcal{G}$ 的定义以及 (3.3) 知,

$$d(D_\tau, D_\omega) \leq 2tr_1. \quad (3.4)$$

一方面, 由迭代函数系的选取以及 $\mathcal{G}$ 的定义可得

$$|D_\tau| \leq r_1 < |D_{\omega^*}| \leq 4|D_\omega|.$$

同理有

$$|D_\omega| \leq r_1 < |D_{\tau^*}| \leq 4|D_\tau|.$$

因此,

$$\frac{1}{4} < \frac{|D_\tau|}{|D_\omega|} < 4.$$

接下来, 不妨设 $|D_\tau| \leq |D_\omega|$. 由上式以及 X 的构造中的基本菱形的大小关系即得

$$|D_\omega| = |D_\tau| \quad \text{或} \quad |D_\omega| = 2|D_\tau|. \quad (3.5)$$

另一方面, 由 X 的构造, X 中存在连接 D_τ 和 D_ω 的简单折线 γ , 折线 γ 中的线段或者是水平的或者是竖直的, 使得折线 γ 的长度满足

$$\ell(\gamma) \leq 6d(D_\tau, D_\omega).$$

进而, 存在 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{1, 2, 3, 4\}^k$, 使得菱形列 $D_\tau, D_{\sigma_1}, \dots, D_{\sigma_{n-1}}, D_\omega$ 满足: 相邻两个菱形恰好有一个交点, 不相邻的两个菱形不交, 且折线 γ 由这些菱形的直径连接而成. 此外, 由 (3.5) 以及 X 的构造, 不妨设这些菱形满足条件: 对任意 $1 \leq j \leq n-1$, 有

$$|D_{\sigma_j}| = |D_\tau|.$$

注意这里 σ_j 不一定属于 $\mathcal{G}$. 在这个假设下, 结合 (3.4) 和 (3.5) 可得

$$\frac{(n-1)r_1}{4} \leq (n-1)|D_\tau| = \ell(\gamma) \leq 12tr_1.$$

因此 $n \leq 48t + 1$, 从而 n 仅依赖于 η .

现在, 由 g 的拟对称性和 d_σ 的定义, 可得

$$d_\tau \leq \eta(1)d_{\sigma_1}, \quad d_{\sigma_1} \leq \eta(1)d_{\sigma_2}, \quad \dots, \quad d_{\sigma_{n-2}} \leq \eta(1)d_{\sigma_{n-1}}, \quad d_{\sigma_{n-1}} \leq \eta(1)d_\omega.$$

由于上面已证 n 仅依赖于 η , 故存在仅与 η 有关的常数 $C > 0$, 使得 $d_\tau \leq C d_\omega$ 成立. □

下面证明测度 μ 的像测度 ν 满足条件 (3.1). 由 (3.3) 及 $\mathcal{G}$ 的定义, 可得

$$B(x, r_1) \subseteq g^{-1}(B(y, r)) \subseteq \bigcup_{\sigma \in \mathcal{G}} (D_\sigma \cap X) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{G}} X_\sigma. \quad (3.6)$$

选取 $\tau \in \mathcal{G}$, 使得 $x \in X_\tau$. 因为 $|X_\tau| \leq r_1$, 所以 $X_\tau \subseteq B(x, r_1)$, 从而由上述第一个包含关系得到 $g(X_\tau) \subseteq B(y, r)$. 则有

$$|g(X_\tau)| \leq 2r. \quad (3.7)$$

另一方面, 由拟对称映射的性质 (参见文献 [14, 命题 10.8]) 得

$$\frac{|g(f_\tau(0)) - g(f_\tau(1))|}{|g(X_\tau)|} \leq \eta \left(\frac{2|f_\tau(0) - f_\tau(1)|}{|X_\tau|} \right) \leq \eta(2).$$

因此,

$$d_\tau \leq \eta(2)|g(X_\tau)|. \quad (3.8)$$

最后, 应用 (3.6)–(3.8) 和引理 3.2–3.4 知, 存在仅与 η 有关的常数 $C > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \nu(B(y, r)) &= \mu \circ g^{-1}(B(y, r)) \leq \mu \left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{G}} X_\sigma \right) \leq \# \mathcal{G} \max_{\sigma \in \mathcal{G}} \mu(X_\sigma) \\ &\leq C_1 \max_{\sigma \in \mathcal{G}} d_\sigma^s \leq C_2 d_\tau^s \leq C_3 |g(X_\tau)|^s \leq Cr^s. \end{aligned}$$

于是, 由质量分布原理可知,

$$\dim_H g(X) \geq s > 1.$$

至此, 我们证明了定理 1.2.

致谢 作者对审稿人的细致审阅及建议表示感谢.

参考文献

- 1 Tukia P, Väisälä J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1980, 5: 97–114
- 2 Pansu P. Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1989, 14: 177–212
- 3 Tyson J T. Sets of minimal Hausdorff dimension for quasiconformal maps. *Proc Amer Math Soc*, 2000, 128: 3361–3367
- 4 Kovalev L V. Conformal dimension does not assume values between 0 and 1. *Duke Math J*, 2006, 134: 1–13
- 5 Hakobyan H. Conformal dimension: Cantor sets and Fuglede modulus. *Int Math Res Not IMRN*, 2010, 2010: 87–111
- 6 Wang W, Wen S Y. On quasisymmetric minimality of Cantor sets. *Topology Appl*, 2014, 178: 300–314
- 7 Mackay J M, Tyson J T. Conformal Dimension—Theory and Application. *University Lecture Series*, vol. 54. Providence: Amer Math Soc, 2010
- 8 Dang Y G, Wen S Y. Quasisymmetric minimality of sets of Tyson type and graphs of Borel functions. Preprint, 2019
- 9 Bishop C J, Tyson J T. Conformal dimension of the antenna set. *Proc Amer Math Soc*, 2001, 129: 3631–3636
- 10 Tyson J T, Wu J M. Quasiconformal dimensions of self-similar fractals. *Rev Mat Iberoam*, 2006, 22: 205–258
- 11 Keith S, Laakso T. Conformal Assouad dimension and modulus. *Geom Funct Anal*, 2004, 14: 1278–1321
- 12 Falconer K J. *Fractal Geometry—Mathematical Foundations and Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1990
- 13 Väisälä J. *Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 229. New York: Springer-Verlag, 1971
- 14 Heinonen J. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. Universitext. New York: Springer-Verlag, 2001

Conformal dimension of a class of planar self-similar sets

Yungui Dang & Shengyou Wen

Abstract In this paper, we prove that the conformal dimension of a class of planar self-similar sets is 1. In addition, we prove that these self-similar sets are not quasisymmetrically equivalent to any metric space of Hausdorff dimension 1. This shows that the infimum in the definition of the conformal dimension cannot be attained for these self-similar sets.

Keywords conformal dimension, quasisymmetrically minimal set, self-similar set

MSC(2020) 28A78, 30C62

doi: 10.1360/SSM-2019-0275