中国科学

1985 年 1 月 A 辑 第 1 期

完整三角和的估计

陆鸣皋

(中国科学技术大学数学系，合肥)

摘 要

设 q 是一个正整数，$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0(k\geqslant 3)$ 是一个适合条件 $(a_1,\cdots,a_k,q)=1$ 的整系数多项式，$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi if(x)/q}$. 本文证明了，对素数 p 和 $l\geqslant 1$，有 $|S(p^l,f(x))|\leqslant kp^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}$ 以及 $|S(q,f(x))|\leqslant e^{1.85k}q^{1-\frac{1}{k}}$.

一、引 言

设 q 是一个正整数，$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$ $(k\geqslant 3)$ 是一个适合条件 $(a_1,\cdots,a_k,q)=1$ 的整系数多项式，

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi if(x)/q}. \tag{1.1}$$

本文的目的在于致力于 $S(q,f(x))$ 的上界估计.

对于 q 为素数幂次的情形，1940 年华罗庚[1]首先得到

$$|S(p^l,f(x))|\leqslant k^{2k}p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{1.2}$$

后来，在文献 [2] 中他又证得

$$|S(p^l,f(x))|\leqslant k^3p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{1.3}$$

Нечаев[3] 和陈景润[4]对 (1.3) 式都作了改进. 1975 年，Нечаев[5] 证明了

$$|S(p^l,f(x))|\leqslant k^2p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{1.4}$$

1977 年，陈景润[6]将此结果改进为:

$$|S(p^l,f(x))|\leqslant c(k)p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}, \tag{1.5}$$

其中

$$c(k)=\begin{cases}1, & 对\ p\geqslant(k-1)^{\frac{2k}{k-2}},\\ k^{2/k}, & 对\ (k-1)^{\frac{2k}{k-2}}>p\geqslant(k-1)^{\frac{k}{k-2}},\\ k^{3/k}, & 对\ (k-1)^{\frac{k}{k-2}}>p>k,\\ (k-1)k^{3/k}, & 对\ p\leqslant k.\end{cases} \tag{1.6}$$

本文 1983 年 10 月 12 日收到，1984 年 8 月 20 日收到压缩稿.

本文进一步将这个结果改进为:

定理 1. 设 $k \geqslant 3$ 是一个整数,p 是一个素数,$f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 是适合条件 $(a_1, \cdots, a_k, p) = 1$ 的整系数多项式,那末对 $l \geqslant 1$,

$$p^{-l\left(1-\frac{1}{k}\right)}|S(p^l, f(x))| \leqslant \begin{cases} (k-1)^{\frac{2}{k-1}}, & \text{对 } (k-1)^{\frac{k}{k-2}} > p > (k-1)^{\frac{k}{k-1}}, \\ k^{2/k}, & \text{对 } (k-1)^{\frac{k}{k-1}} \geqslant p > k, \\ k, & \text{对 } p \leqslant k, \end{cases} \tag{1.7}$$

即

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant k p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{1.8}$$

对于任意的自然数 q,华罗庚[1]首先证明

$$|S(q, f(x))| \leqslant c(k, \varepsilon) q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}, \tag{1.9}$$

这里 $c(k, \varepsilon)$ 是与 k, ε 有关的常数; 1953 年, Нечаев[3] 证明了

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{2k} q^{1-\frac{1}{k}}. \tag{1.10}$$

1959 年,陈景润[4]将此结果改进为:

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{3k^2+\frac{6}{k}} q^{1-\frac{1}{k}}, \tag{1.11}$$

1975 年, Нечаев[5] 又得到

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{5k^2/\log k} q^{1-\frac{1}{k}}. \tag{1.12}$$

1977 年,陈景润[6]证明了

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{6.1k} q^{1-\frac{1}{k}}, \tag{1.13}$$

同时, Стечки[7] 得到

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{k+O(k/\log k)} q^{1-\frac{1}{k}}, \tag{1.14}$$

1982 年,作者[8]指出,

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{2.33k} q^{1-\frac{1}{k}}. \tag{1.15}$$

最近,戚鸣皋和丁平[9] 算得

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{2k} q^{1-\frac{1}{k}}, \tag{1.16}$$

现在,作者又将此结果改进为:

定理 2. 设 $k \geqslant 3$ 是一个整数,$f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个适合条件 $(a_1, \cdots, a_k, q) = 1$ 的整系数多项式,那末

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{1.85k} q^{1-\frac{1}{k}}. \tag{1.17}$$

附注 1. 当 $k \geqslant 12$ 时,可算得

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{1.76k} q^{1-\frac{1}{k}}.$$

二、基 本 引 理

引理 2.1. 设 $p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$ 是一个素数,则对 $1 \leqslant y \leqslant k-1$, 有

$$p^{\frac{y}{k}} \leqslant y p^{\frac{1}{k}}. \tag{2.1}$$

又设 p 是一个 $\leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-1}}$ 的素数，则对 $2 \leqslant y \leqslant k-1$，

$$p^{\frac{y}{k}} \leqslant y. \tag{2.2}$$

证．不等式(2.1)可见文献[6]中引理5的证明．现证(2.2)式． 若 $k=3$，则由条件 $p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-1}}$ 推出 $p=2$，又此时 $y=2$，所以不等式(2.2)成立．对 $k \geqslant 4$，取 $f_1(y) = y - p^{\frac{y}{k}}$，则 $f_1'(y) = 1 - \frac{\log p}{k} p^{\frac{y}{k}}$，$f_1''(y) = -\left(\frac{\log p}{k}\right)^2 p^{\frac{y}{k}} < 0$．因当 $k \geqslant 5$ 时，$(k-1)^{\frac{k}{k-1}} \leqslant 2^{\frac{k}{2}}$；又当 $k=4$ 时，由 $p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-1}}$ 可知 p 仅能取2和3，故当 $y=2$ 时，有 $p^{1/2} \leqslant 2$．因此，当 $k \geqslant 4$ 时，$f_1(2) \geqslant 0$． 又由 $p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-1}}$，可得 $f_1(k-1) \geqslant 0$，且当 $k \geqslant 4$ 时，$f_1'(2) \geqslant 0$，所以(2.2)式成立．

现设 $e(x) = e^{2\pi i x}$，$e_q(x) = e^{2\pi i x/q}$． 对一个非负整数 σ 和一个整系数多项式 $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$，记号 $p^\sigma \| g(x)$ 表示二个条件 $p^\sigma | (b_n, b_{n-1}, \cdots, b_0)$ 和 $p^{\sigma+1} \nmid (b_n, b_{n-1}, \cdots, b_0)$ 同时成立．

引理 2.2[2]．设 p 是素数，$f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x$ 是适合条件 $p \nmid (a_k, \cdots, a_1)$ 的整系数多项式，且 $p^t \| (k a_k, \cdots, 2a_2, a_1)$． 设 μ 为同余方程

$$f'(x) \equiv 0 (\bmod p^{t+1}), \qquad 0 \leqslant x < p \tag{2.3}$$

之一根．又设 $p^\sigma \| (f(\mu + px) - f(\mu))$，则

$$1 \leqslant \sigma \leqslant k. \tag{2.4}$$

引理 2.3[8]．若 μ_j 为同余方程

$$f'(x) \equiv 0 (\bmod p^{t+1}), \qquad 0 \leqslant x < p$$

的 m_j 重根，$p^{\sigma_j} \| (f(\mu_j + px) - f(\mu_j))$，则

$$2 \leqslant \sigma_j \leqslant m_j + t + 1. \tag{2.5}$$

又设

$$g_{\mu_j}(y) = p^{-\sigma_j}(f(py + \mu_j) - f(\mu_j)) \tag{2.6}$$

及 $p^{t_j} \| g_{\mu_j}'(y)$，那末

$$\sigma_j + t_j \leqslant m_j + t + 1, \tag{2.7}$$

且 $g_{\mu_j}'(y) \equiv 0 (\bmod p^{t_j+1})$ $(0 \leqslant y < p)$ 的解数不超过 m_j．

证明见文献[8]的引理2．

引理 2.4．若 p 为奇素数，则当 $m_j = 1$ 时，必有 $\sigma_j = t + 2$ 及 $t_j = 0$． 若 $p = 2$，则当 $m_j = 1$ 时，必有 $\sigma_j = t + 1$ 及 $t_j = 1$．

证．先设 p 为奇素数，我们有

$f(py + \mu_j) - f(\mu_j) = py f'(\mu_j) + (py)^2 \frac{f''(\mu_j)}{2!} + (py)^3 \frac{f'''(\mu_j)}{3!} + \cdots$ 如果 $m_j = 1$，则 $f''(\mu_j) \not\equiv 0 (\bmod p^{t+1})$，即 $p^{t+2} \| p^2 \frac{f''(\mu_j)}{2!}$． 又 $p^{t+h} | p^h \frac{f^{(h)}(\mu_j)}{(h-1)!}$，而对 $p \geqslant 3$，当 $h \geqslant 3$ 时有 $p^{h-2} \geqslant h$，此即 h 中所含的奇素因子 p 的个数不多于 $h-2$，因此当 $h \geqslant 3$ 时有

$$p^{t+2}\,|\,p^h\frac{f^{(h)}(\mu_j)}{h!},$$

于是显然有 $\sigma_j = t + 2$. 再因为当 p 是奇素数时，$p^{t+2}\| p^2 f''(\mu_j)$，因此 p 不能整除 $g_{\mu_j}'(y)$ 的一次项系数 $p^2 f''(\mu_j)/p^{\sigma_j}$，即 $t_j = 0$.

若 $p = 2$，我们有

$$f(2y+\mu_j) - f(\mu_j) = 2yf'(\mu_j) + (2y)^2 f''(\mu_j)/2! + (2y)^3\frac{f'''(\mu_j)}{3!} + \cdots.$$

由于 $m_j = 1$，故 $f''(\mu_j) \not\equiv 0 \pmod{2^{t+1}}$，而 $2^t | f''(\mu_j)$，所以 $2^{t+1}\| 2^2\frac{f''(\mu_j)}{2!}$. 又显然有 $2^{t+h}\,|\,2^h\frac{f^{(h)}(\mu_j)}{(h-1)!}$. 当 $h \geqslant 3$ 时，我们有 $2^{h-1} \geqslant h$，即 h 中所含因子 2 的个数不多于 $h-1$，故当 $h \geqslant 3$ 时，$2^{t+1}\,|\,2^h\frac{f^{(h)}(\mu_j)}{h!}$. 因此，$\sigma_j = t + 1$. 又当 $m_j = 1$ 时，$2^{t+2}\| 2^2 f''(\mu_j)$，从而推出 $2\| g_{\mu_j}'(y)$，所以此时 $t_j = 1$.

引理 2.5. 若 $t = 0$，则

$$\begin{aligned} g_{\mu_j}(y) &\equiv p^{-\sigma_j}\left(pyf'(\mu_j) + (py)^2\frac{f''(\mu_j)}{2!} + \cdots + (py)^{m_j+1}\frac{f^{(m_j+1)}(\mu_j)}{(m_j+1)!}\right) \\ &= g_1(y) \pmod{p}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

现设 $m_j = 1$ 及 $t \geqslant 1$，则当 $p \geqslant 5$ 时，

$$g_{\mu_j}(y) \equiv p^{-\sigma_j}\left(pyf'(\mu_j) + (py)^2\frac{f''(\mu_j)}{2!}\right) = g_2(y) \pmod{p}, \tag{2.10}$$

当 $p = 3$ 时，

$$g_{\mu_j}(y) \equiv 3^{-\sigma_j}\left(3yf'(\mu_j) + (3y)^2\frac{f''(\mu_j)}{2!} + (3y)^3\frac{f'''(\mu_j)}{3!}\right) = g_3(y) \pmod{3}; \tag{2.11}$$

当 $p = 2$ 时，

$$g_{\mu_j}(y) \equiv 2^{-\sigma_j}(2y)^2\frac{f''(\mu_j)}{2!} \pmod{2}. \tag{2.12}$$

证. 若 $t = 0$，则由引理 2.3，$\sigma_j \leqslant m_j + 1$. 但当 $h > m_j + 1$ 时，$g_{\mu_j}(y)$ 中 y^h 的系数 $p^{h-\sigma_j}\frac{f^{(h)}(\mu_j)}{h!}$ 皆能被 p 整除，因此 (2.9) 式成立.

由引理 2.4，对奇素数 p，当 $m_j = 1$ 时，$\sigma_j = t + 2$. 如果 $p \geqslant 5$，则当 $h \geqslant 3$ 时，$p^{h-2} > h$，即 h 中所含的素因子 p 的个数不多于 $h - 3$ 个. 因此，当 $h \geqslant 3$ 时，$p^{t+3}\,|\,p^h\frac{f^{(h)}(\mu_j)}{h!}$，即 (2.10) 式成立. 而如果 $p = 3$，则当 $h \geqslant 4$ 时，$3^{h-2} > h$，即 h 中所含因子 3 的个数不多于 $h - 3$ 个，故当 $h \geqslant 4$ 时，$3^{t+3}\left|\,3^h\frac{f^{(h)}(\mu_j)}{h!}\right.$，因此 (2.11) 式成立. 再由引理 2.4，若 $p = 2$，则当 $m_j = 1$ 时，$\sigma_j = t + 1$. 而当 $h \geqslant 4$ 时，$2^{h-2} \geqslant h$. 故当 $h \geqslant 4$ 时，$2^{t+2}\left|\,\frac{2^h}{h}\frac{f^{(h)}(\mu_j)}{(h-1)!}\right.$，又

$2^{t+2} \Big| 2^3 \dfrac{f'''(\mu_j)}{3!}$，所以 (2.12) 式成立.

引理 2.6[10,11]. 设 k 次整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 适合条件 $p \nmid (a_1, \cdots, a_k)$，且 $p > k$，那末

$$|S(p, f(x))| \leqslant (k-1)\sqrt{p}. \tag{2.13}$$

以下我们总设 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r$ 是同余方程 $f'(x) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$ 的 mod p 的不同零点，$m_1, m_2, \cdots, m_r$ ($m_j \geqslant 1$) 分别是它们的重数,并记 $m = m_1 + \cdots + m_r$，显然 $m \leqslant k-1$.

引理 2.7[2]. 设

$$S_{\mu_j, p^l} = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv \mu_j (\mathrm{mod}\, p)}}^{p^l} e_{p^l}(f(x)), \tag{2.14}$$

则

$$|S_{\mu_j, p^l}| \begin{cases} = p^{\sigma_j - 1} |S(p^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))|, & l > \sigma_j, \\ \leqslant p^{l-1}, & l \leqslant \sigma_j, \end{cases} \tag{2.15}$$

引理 2.8[2,9]. 对任何适合条件 $p \nmid (a_1, \cdots, a_k)$ 和 $p^t \| f'(x)$ 的整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$，当 $l \geqslant 2(t+1)$ 时,都有

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant \sum_{j=1}^{r} |S_{\mu_j, p^l}|. \tag{2.16}$$

若 p 是一个奇素数，则对任何适合条件 $p \nmid (a_1, \cdots, a_k)$ 和 $p^t \| f'(x)$，$t \geqslant 1$ 的整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$，当 $l = 2t+1$ 时,也有 (2.16) 式成立. 若 $p = 2$，则对任何适合条件 $2 \nmid (a_1, \cdots, a_k)$ 和 $2^t \| f'(x)$，$t \geqslant 2$ 的整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$，当 $l = 2t+1$ 时, (2.16) 成立.

引理 2.9. 设 $k \geqslant 3$ 是一个整数, p 是一个素数适合 $k < p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-1}}$，则对任何适合条件 $p \nmid (a_1, \cdots, a_k)$ 的整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$，当 $l \geqslant 1$ 时,

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant (k-1) p^{\frac{2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{2.17}$$

证. 对 $l = 1$，由 $p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-1}}$，

$$|S(p, f(x))| \leqslant p = p^{1-\frac{1}{k}} p^{\frac{2}{k}-1} p^{1-\frac{1}{k}} \leqslant (k-1) p^{\frac{2}{k}-1} p^{1-\frac{1}{k}}.$$

对 $l \geqslant 2$，我们用数学归纳法证明

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant m p^{\frac{2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{2.18}$$

首先,当 $l = 2$ 时,由引理 2.7 和引理 2.8,

$$|S(p^2, f(x))| \leqslant rp = rp^{\frac{2}{k}-1} p^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m p^{\frac{2}{k}-1} p^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

现假定命题对区间 $[2, l-1]$ 中的自然数皆成立. 当 $l \geqslant 3$ 时,分几种情形讨论:

1) $l \leqslant \sigma_j$，这时由引理 2.7, 引理 2.1 和引理 2.3,

$$|S_{\mu_j, p^l}| \leqslant p^{l-1} \leqslant p^{\frac{\sigma_j}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant p^{\frac{m_j+1}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

2) $l = \sigma_j + 1$，由引理 2.5, 引理 2.6 和引理 2.7,

$$|S_{\mu_j,p^l}| = p^{\sigma_j-1}|S(p, g_{\mu_j}(y))| = p^{\sigma_j-1}|S(p, g_1(y))| \leqslant p^{\sigma_j-1}\cdot m_j p^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $m_j \leqslant \frac{k}{2}$，那末由 $\sigma_j \leqslant m_j + 1$，

$$|S_{\mu_j,p^l}| \leqslant m_j p^{\frac{\sigma_j+1}{k}-\frac{3}{2}} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{m_j+2}{k}-\frac{3}{2}} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

如果 $m_j > \frac{k}{2}$，则 $m_j \geqslant 2$，于是由引理 2.1，

$$|S_{\mu_j,p^l}| \leqslant p^{l-1} \leqslant p^{\frac{m_j+2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

3）$l - \sigma_j \geqslant 2$，此时由归纳假设及引理 2.2，2.3，

$$|S_{\mu_j,p^l}| = p^{\sigma_j-1}|S(p^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant p^{\sigma_j-1} m_j p^{\frac{2}{k}-1} p^{(l-\sigma_j)\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

由引理 2.8，即得（2.18）式．因此引理 2.9 得证．

三、$k=3$，$p\leqslant k$ 的情形

这时仅能取 $p = 2$ 和 3，以及 $t \leqslant 1$，$t_1 \leqslant 1$．

令 $H_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$ 是有理数域上的多项式．如果有一整数 q，使

$$e^{2\pi i H_k(x+q)} = e^{2\pi i H_k(x)},$$

则称 q 为 $H_k(x)$ 的周期，而把 $H_k(x)$ 的最小正周期称为 $H_k(x)$ 的阶．现以 $B_k(q)$ 记周期为 q 的 k 次有理系数多项式全体，而 $B_k^*(q)$ 为阶是 q 的 k 次有理系数多项式全体．

引理 3.1[12]．若记

$$M_k(q) = \max_{H(x)\in B_k^*(q)} \left|\frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i H(x)}\right|, \tag{3.1}$$

则

$$M_2(q) \leqslant q^{-\frac{1}{2}}, \qquad M_3(q) \leqslant q^{-0.1142}. \tag{3.2}$$

引理 3.2．设三次整系数多项式 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ 适合条件 $3\nmid(a_1, a_2, a_3)$ 及 $3\|(3a_3, 2a_2, a_1)$，那末

$$|S(3^2, f(x))| \leqslant 3^{2-0.1142} \leqslant 2\cdot 3^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{3}-1}3^{2(1-\frac{1}{3})}. \tag{3.3}$$

证．由条件 $3\nmid(a_1, a_2, a_3)$ 及 $3\|(3a_3, 2a_2, a_1)$ 可推出 $3|a_1$，$3|a_2$ 及 $3\nmid a_3$，于是对任意整数 x，

$$e\left(\frac{a_3}{9}(x+3)^3 + \frac{a_2}{9}(x+3)^2 + \frac{a_1}{9}(x+3)\right) = e\left(\frac{a_3}{9}x^3 + \frac{a_2}{9}x^2 + \frac{a_1}{9}x\right).$$

又$3\nmid(a_3 + a_2 + a_1)$，所以 $\frac{1}{9}f(x)$ 的阶不能是 1，即 $\frac{1}{9}f(x)$ 的阶是 3，所以由引理 3.1

$$|S(3^2, f(x))| = 3\left|\sum_{x=1}^{3} e\left(\frac{f(x)}{9}\right)\right| \leqslant 3^{2-0.1142} \leqslant 2\cdot 3^{2(1-\frac{1}{3})}.$$

引理 3.3．设三次整系数多项式 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 适合条件 $3\nmid(a_1, a_2, a_3)$，则当 $l \geqslant 1$ 时，有

$$|S(3^l, f(x))| \leqslant 2\cdot 3^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{3}-1}3^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

证. $l=1$ 时(3.4)式成立. 当 $l=2$ 时，若 $t=0$ 和 $t=1$ 分别由引理 2.8 和引理 3.2 推知(3.4)式成立.

现对 $l \geqslant 3$，用数学归纳法证明

$$|S(3^l, f(x))| \leqslant m 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})}. \tag{3.5}$$

当 $l=3$ 时，若 $t=0$，则 $3 \geqslant 2(t+1)$；若 $t=1$，则 $3=2t+1$，故由引理 2.8 得

$$|S(3^3, f(x))| \leqslant r 3^2 \leqslant m \cdot 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{3(1-\frac{1}{3})}.$$

现假定命题对区间 $[3, l-1]$ 中的自然数皆成立. 当 $l \geqslant 4$ 时，分以下几种情形讨论:

1) 由引理 2.2，$\sigma_j \leqslant 3$，故 $l \leqslant \sigma_j$ 的情形不发生.

2) $1 \leqslant l-\sigma_j \leqslant 2t_j$，此时 $t_j=1$. 由引理 2.4，必有 $m_j=2$. 于是当 $l-\sigma_j=1$ 时，

$$|S_{\mu_j, 3^l}| \leqslant 3^{l-1} = 3^{\frac{\sigma_j+1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant 3^{\frac{1}{3}} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

而当 $l-\sigma_j=2$ 时，由引理 3.2 及(2.7)式，有

$$\begin{aligned}|S_{\mu_j, 3^l}| &= 3^{\sigma_j-1}|S(3^2, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 3^{\sigma_j+1-0.1142} \leqslant 3^{\frac{m_j+t+2}{3}-1.1142} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \\ &\leqslant 3^{\frac{2}{3}-0.1142} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})}.\end{aligned}$$

3) $l-\sigma_j=2t_j+1$. 若 $m_j=1$，则由引理 2.4，$\sigma_j=t+2$，$t_j=0$. 如果 $t=1$，那末 $\sigma_j=3$，此时对所有的整数 y，我们有

$$\begin{aligned}g_{\mu_j}(y) &= a_3 y^3 + \frac{f''(\mu_j)}{6} y^2 + \frac{f'(\mu_j)}{3^2} y \equiv \frac{f''(\mu_j)}{6} y^2 + \left(a_3 + \frac{f'(\mu_j)}{3^2} y\right) \\ &= g_4(y) \pmod 3.\end{aligned}$$

因此由引理 2.6 $\left(\frac{f''(\mu_j)}{6} \not\equiv 0 \pmod 3\right)$,

$$\begin{aligned}|S_{\mu_j, 3^l}| &= 3^{\sigma_j-1}|S(3, g_{\mu_j}(y))| = 3^{\sigma_j-1}|S(3, g_4(y))| \leqslant 3^{\sigma_j-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{l}{3}-\frac{3}{2}} 3^{l(1-\frac{1}{3})} = 3^{\frac{\sigma_j+1}{3}-\frac{3}{2}} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})}.\end{aligned}$$

而当 $t=0$ 时，由引理 2.5 和引理 2.6，及 $\sigma_j \leqslant 3$，

$$\begin{aligned}|S_{\mu_j, 3^l}| &= 3^{\sigma_j-1}|S(3, g_{\mu_j}(y))| = 3^{\sigma_j-1}|S(3, g_1(y))| \leqslant 3^{\sigma_j-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{\sigma_j+1}{3}-\frac{3}{2}} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})}.\end{aligned}$$

若 $m_j=2$，$t_j=0$，则由引理 2.2，有

$$|S_{\mu_j, 3^l}| \leqslant 3^{l-1} = 3^{\frac{\sigma_j+1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant 3^{\frac{1}{3}} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})};$$

若 $m_j=2$，$t_j=1$，则由引理 2.8 及 $\sigma_j \leqslant 3$，有

$$\begin{aligned}|S_{\mu_j, 3^l}| &= 3^{\sigma_j-1}|S(3^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 3^{\sigma_j-1} m_j 3^{l-\sigma_j-1} \\ &= m_j 3^{\frac{\sigma_j+2t_j+1}{3}-2} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})}.\end{aligned}$$

4) $2(t_j+1) \leqslant l-\sigma_j \leqslant 3$. 此时由引理 2.8 及 $\sigma_j \leqslant 3$ 得到

$$|S_{\mu_j, 3^l}| = 3^{\sigma_j-1}|S(3^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant m_j 3^{\frac{l}{3}-2} 3^{l(1-\frac{1}{3})}$$

$$\leqslant m_j 3^{\frac{\sigma_j+3}{3}-2} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

5) $l-\sigma_j \geqslant 4$. 此时由归纳假设及引理 2.2, 2.3, 有

$$|S_{\mu_j,3^l}| = 3^{\sigma_j-1}|S(3^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 3^{\sigma_j-1} m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{3})}$$

$$= m_j 3^{\frac{\sigma_j}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}-1} 3^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

再由引理 2.8, 即得 (3.5) 式, 故引理 3.3 得证.

引理 3.4. 设三次整系数多项式 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x$ 适合条件 $2\nmid(a_1, a_2, a_3)$ 及 $2\|(3a_3, 2a_2, a_1)$, 那末当 $m \geqslant 1$ 时,

$$|S(2^3, f(x))| \leqslant m 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{3(1-\frac{1}{3})}. \tag{3.6}$$

证. 由 $2\nmid(a_1, a_2, a_3)$ 及 $2\|(3a_3, 2a_2, a_1)$ 可知 $2|a_3$, $2|a_1$ 和 $2\nmid a_2$. 由于

$$f''(y) = 6a_3y + 2a_2,$$

所以取 $x=y+2z$, $y=1, 2$; $z=0, 1, 2, 3$, 得到

$$|S(2^3, f(x))| = \left|\sum_{y=1}^{2} e_{2^3}(f(y)) \sum_{z=0}^{3} e_2\left(z\frac{f'(y)}{2} + z^2(3a_3y+a_2)\right)\right|$$

$$= 2\left|\sum_{y=1}^{2} e_{2^3}(f(y)) \sum_{z=0}^{1} e_2\left(\left(\frac{f'(y)}{2}+1\right)z\right)\right|$$

$$= 4\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{\substack{y=1\\ y\not\equiv\mu_j(\mathrm{mod}\,2)}}^{2} e_{2^3}(f(y))\right|.$$

若 $r=1$, 则

$$|S(2^3, f(x))| = 4 \leqslant m 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{3(1-\frac{1}{3})}.$$

而若 $r=2$, 则 $|S(2^3, f(x))|=0$, 由此即得引理 3.4.

引理 3.5. 设三次整系数多项式 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x$ 适合条件 $2\nmid(a_1, a_2, a_3)$, 则当 $l \geqslant 1$ 时, 有

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant 2\cdot 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})}. \tag{3.7}$$

证. 当 $l \leqslant 3$ 时,

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant 2^l = 2^{\frac{l}{3}} 2^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant 2\cdot 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

现对 $l \geqslant 4$, 用数学归纳法证明

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant m 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})}. \tag{3.8}$$

当 $l=4$ 时, 因 $2(t+1) \leqslant 4$, 故由引理 2.8 得

$$|S(2^4, f(x))| \leqslant \sum_{j=1}^{r} |S_{\mu_j,2^4}|. \tag{3.9}$$

若 $m_j=1$, 则由引理 2.4, $\sigma_j=t+1$, $t_j=1$. 又由 (2.5) 式及 $t \leqslant 1$, 得出 $\sigma_j=2$, $t=1$. 由此及 $2\nmid(a_1, a_2, a_3)$ 可得 $2|a_3$, $2|a_1$, 和 $2\nmid a_2$. 于是,

$$g_{\mu_j}(y) = 2a_3y^3 + \frac{f''(\mu_j)}{2}y^2 + \frac{f'(\mu_j)}{2}y \equiv \frac{f''(\mu_j)}{2}y^2 + \frac{f'(\mu_j)}{2}y$$

$$= g_5(y)(\mathrm{mod}\,4),$$

而 $2 \times \frac{f''(\mu_j)}{2}$，$2 \left| \frac{f'(\mu_j)}{2} \right.$，因此，

$$g_5(y+2) \equiv g_5(y) \pmod 4, \qquad g_5(0) \not\equiv g_5(1) \pmod 4,$$

即 $\frac{1}{4} g_5(y)$ 的阶为 2. 由引理 3.1（也可直接算得）

$$|S_{\mu_j,2^4}| = 2|S(2^2, g_{\mu_j}(y))| = 2|S(2^2, g_5(y))| \leqslant 2^3 M_2(2)$$
$$\leqslant 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}} 2^{4(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{4(1-\frac{1}{3})}.$$

若 $m_j = 2$，则显然有

$$|S_{\mu_j,2^4}| \leqslant 2^3 = 2^{\frac{4}{3}-1} 2^{4(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{4(1-\frac{1}{3})}.$$

由此，由 (3.9) 式可知当 $l = 4$ 时命题成立.

现假定命题对区间 $[4, l-1]$ 中的自然数皆成立. 当 $l \geqslant 5$ 时，分以下几种情形讨论.

1）因 $\sigma_j \leqslant 3$，所以 $l \leqslant \sigma_j + 1$ 的情形不会发生.

2）$l - \sigma_j = 2$，若 $m_j = 1$，则由引理 2.4，$\sigma_j = t + 1 \leqslant 2$，即 $l \leqslant 4$，这种情形现也不会发生. 若 $m_j = 2$，则

$$|S_{\mu_j,2^l}| \leqslant 2^{l-1} = 2^{\frac{\sigma_j+2}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

3）$l - \sigma_j = 3$，若 $m_j = 1$，则由引理 2.4，$\sigma_j = t + 1$，$t_j = 1$. 因此，

$$g'_{\mu_j}(y) \equiv \frac{f'(\mu_j)}{2^t} + 2 \frac{f''(\mu_j)}{2^t} y \pmod 4.$$

由于 $2 \nmid \frac{f''(\mu_j)}{2^t}$，$2 \left| \frac{f'(\mu_j)}{2^t} \right.$，所以 $g'_{\mu_j}(y) \equiv 0 \pmod 4$ 恰有一解，于是由引理 3.4 和引理 2.2，

$$|S_{\mu_j,2^l}| = 2^{\sigma_j-1} |S(2^3, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 2^{\sigma_j-1} m_j 2^2 \leqslant m_j 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

若 $m_j = 2$，由 $\sigma_j \leqslant 3$ 有

$$|S_{\mu_j,2^l}| \leqslant 2^{l-1} = 2^{\frac{\sigma_j+3}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})} \leqslant m_j 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})}.$$

4）$l - \sigma_j \geqslant 4$. 这时由归纳假设及引理 2.2，

$$|S_{\mu_j,2^l}| = 2^{\sigma_j-1} |S(2^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 2^{\sigma_j-1} m_j 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{3})}$$
$$\leqslant m_j 2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}-1} 2^{l(1-\frac{1}{3})},$$

再由引理 2.8，(3.8) 式成立. 因此引理 3.5 得证.

四、$k \geqslant 4$, $p \leqslant k$ 的情形

现设 $t(p) = \left[\frac{\log k}{\log p} \right]$. 显然，$t$，$t_j \leqslant t(p)$ 及 $t(2) \geqslant 2$.

引理 4.1. 若 $m_j = 1$，则

$$|S(2^3, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 2^2. \tag{4.1}$$

证. 由引理 2.4，此时 $\sigma_j = t + 1$，$t_j = 1$. 于是

$$g'_{\mu_j}(y) \equiv \frac{f'(\mu_j)}{2^t} + 2 \frac{f''(\mu_j)}{2^t} y \pmod 4, \qquad g''_{\mu_j}(y) \equiv \frac{f''(\mu_j)}{2^t} \cdot 2 \pmod 4$$

及取 $y = x + 2z$, $x = 1, 2$; $z = 0, 1, 2, 3$,

$$|S(2^3, g_{\mu_j}(y))| = \left|\sum_{x=1}^{2} e_{2^3}(g_{\mu_j}(x)) \sum_{z=0}^{3} e_2\left(\frac{g'_{\mu_j}(x)}{2} z + \frac{g''_{\mu_j}(x)}{2} z^2\right)\right|$$

$$= 2\left|\sum_{x=1}^{2} e_{2^3}(g_{\mu_j}(x)) \sum_{z=0}^{1} e_2\left(\left(\frac{f'(\mu_j)}{2^{t+1}} + \frac{f''(\mu_j)}{2^t} x\right) z + \frac{f''(\mu_j)}{2^t} z^2\right)\right|$$

$$= 2\left|\sum_{x=1}^{2} e_{2^3}(g_{\mu_j}(x)) \sum_{z=0}^{1} e_2\left(\left(\frac{f'(\mu_j)}{2^{t+1}} + \frac{f''(\mu_j)}{2^t} + \frac{f''(\mu_j)}{2^t} x\right) z\right)\right|.$$

因 $\frac{f''(\mu_j)}{2^t} \not\equiv 0 (\bmod 2)$，所以

$$\frac{f''(\mu_j)}{2^t} x + \left(\frac{f'(\mu_j)}{2^{t+1}} + \frac{f''(\mu_j)}{2^t}\right) \equiv 0 \ (\bmod\ 2)$$

恰有一解，因此引理 4.1 得证.

引理 4.2. $k(\geqslant 4)$ 次整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x$ 适合条件 $2 \nmid (a_1, \cdots, a_k)$，则对 $l \geqslant 1$，有

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant (k-1) 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{4.2}$$

证. 对 $l \leqslant 2t(2)$,

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant 2^l \leqslant 2^{\frac{2t(2)}{k}} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant (k-1) 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

现对 $l \geqslant 2t(2)+1$，用数学归纳法证明对任何适合引理条件的 k 次多项式 $f(x)$,

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant m 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{4.3}$$

首先，当 $l = 2t(2)+1$ 时，若 $t < t(2)$，则 $2t(2)+1 \geqslant 2(t+1)$，否则 $t = t(2) \geqslant 2$，于是由引理 2.8,

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant r 2^{l-1} \leqslant m 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

现假定命题对区间 $[2t(2)+1, l-1]$ 中的自然数皆成立. 当 $l > 2t(2)+1$ 时，分以下几种情形讨论

1) $l \leqslant \sigma_j$，此时由引理 2.3，引理 2.1 及 $t(2) \geqslant 2$

$$|S_{\mu_j, 2^l}| \leqslant 2^{l-1} \leqslant 2^{\frac{\sigma_j}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant 2^{\frac{m_j+t+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j 2^{\frac{t+2}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$\leqslant m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

2) $1 \leqslant l - \sigma_j \leqslant 2t_j$. 若 $m_j = 1$，则 $\sigma_j = t+1$, $t_j = 1$. 于是

$$|S_{\mu_j, 2^l}| \leqslant 2^{l-1} \leqslant 2^{\frac{\sigma_j+2t_j}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} = 2^{\frac{t+3}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)},$$

而若 $m_j \geqslant 2$，则由引理 2.3 和 (2.2) 式，及 $t_j \leqslant t(2)$

$$|S_{\mu_j, 2^l}| \leqslant 2^{\frac{\sigma_j+2t_j}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant 2^{\frac{m_j+t+t_j+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

3) $l - \sigma_j = 2t_j + 1$. 若 $m_j = 1$，则 $t_j = 1$，由引理 4.1

$$|S_{\mu_j, 2^l}| = 2^{\sigma_j - 1} |S(2^3, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 2^{\sigma_j+1} = 2^{\frac{\sigma_j+3}{k}-2} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)},$$

而若 $m_j \geqslant 2$，则由引理 2.3 及 $\sigma_j \leqslant k$，

$$|S_{\mu_j,2^l}| \leqslant 2^{l-1} \leqslant 2^{\frac{2t_j+1}{k}-1} \cdot 2 \cdot 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1}\, 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

4) $2(t_j+1) \leqslant l-\sigma_j \leqslant 2t(2)+1$. 此时由引理 2.8，2.2，

$$|S_{\mu_j,2^l}| = 2^{\sigma_j-1}|S(2^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 2^{\sigma_j-1} m_j 2^{l-\sigma_j-1} \leqslant m_j 2^{\frac{\sigma_j+2t(2)+1}{k}-2}\, 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$\leqslant m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1}\, 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

5) $l-\sigma_j \geqslant 2(t(2)+1)$，此时由归纳假设及 $\sigma_j \leqslant k$，有

$$|S_{\mu_j,2^l}| = 2^{\sigma_j-1}|S(2^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant 2^{\sigma_j-1} m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1}\, 2^{(l-\sigma_j)\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$\leqslant m_j 2^{\frac{2t(2)+1}{k}-1}\, 2^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

因 $l \geqslant 2(t(2)+1) \geqslant 2(t+1)$，故由引理 2.8，(4.3) 式对 $l \geqslant 2t(2)+1$ 皆成立，即引理 4.2 得证.

引理 4.3. 设 $p \leqslant k$ 是奇素数，则对适合条件 $p \nmid (a_k, \cdots, a_1)$ 的整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x$，当 $l \geqslant 1$ 时有

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant (k-1) p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{4.4}$$

证. 对 $l \leqslant 2t(p)$，因 $k \geqslant 4$ 时，$k^{\frac{k-1}{k}} \leqslant k-1$，故

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant p^l \leqslant p^{\frac{2t(p)}{k}}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} = p^{1-\frac{1}{k}}\, p^{\frac{2t(p)}{k}}\, p^{\frac{1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$\leqslant k^{\frac{k-1}{k}}\, p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant (k-1) p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

现对 $l \geqslant 2t(p)+1$ 用数学归纳法证明对任何适合引理条件的 k 次多项式 $f(x)$，

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant m p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}. \tag{4.5}$$

首先，当 $l = 2t(p)+1$ 时，若 $t < t(p)$，则 $2t(p)+1 \geqslant 2(t+1)$；否则 $t = t(p) \geqslant 1$. 于是由引理 2.8，

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant r p^{l-1} = r p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

现假定命题对区间 $[2t(p)+1, l-1]$ 中的自然数皆成立. 而当 $l > 2t(p)+1$ 时，分以下几种情形讨论.

1) $l \leqslant \sigma_j$. 此时由引理 2.3 和引理 2.1，$t(p) \geqslant 1$，

$$|S_{\mu_j,p^l}| \leqslant p^{l-1} \leqslant p^{\frac{\sigma_j}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant p^{\frac{m_j+t+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{t+2}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$\leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

2) $1 \leqslant l-\sigma_j \leqslant 2t_j$，此时 $t_j \geqslant 1$，由引理 2.4，必有 $m_j \geqslant 2$. 于是由引理 2.3 和 (2.2) 式，$t_j \leqslant t(p)$，

$$|S_{\mu_j,p^l}| \leqslant p^{l-1} \leqslant p^{\frac{\sigma_j+2t_j}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant p^{\frac{m_j+t+t_j+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$\leqslant m_j p^{\frac{t+t_j+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1}\, p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

3) $l-\sigma_j = 2t_j+1$. 若 $m_j = 1$，则 $\sigma_j = t+2$，$t_j = 0$. 如果 $t = 0$，那末由引理

2.5 和引理 2.6，及 $\sigma_j = 2$，

$$|S_{\mu_j,p^l}| = p^{\sigma_j-1}|S(p, g_{\mu_j}(y))| = p^{\sigma_j-1}|S(p, g_1(y))| \leqslant m_j p^{\sigma_j-\frac{1}{2}}$$
$$= m_j p^{\frac{\sigma_j+1}{k}-\frac{3}{2}} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

如果 $t \geqslant 1$，则由引理 2.5 和引理 2.6，当 $p \geqslant 5$ 时有

$$|S_{\mu_j,p^l}| = p^{\sigma_j-1}|S(p, g_{\mu_j}(y))| = p^{\sigma_j-1}|S(p, g_2(y))| \leqslant p^{\sigma_j-\frac{1}{2}}$$
$$= m_j p^{\frac{\sigma_j+1}{k}-\frac{3}{2}} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} = m_j p^{\frac{t+3}{k}-\frac{3}{2}} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$\leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

而当 $p = 3$ 时，由引理 2.5，$|S_{\mu_j,p^l}| = 3^{\sigma_j-1}|S(3, g_3(y))|$. 由 $l = \sigma_j + 1 = t + 3 \geqslant 2(t(p) + 1)$ 推知此时 $t = 1$. 因这时对所有的整数 y，

$$g_3(y) = \frac{f'(\mu_j)}{3^2} y + \frac{f''(\mu_j)}{6} y^2 + \frac{f'''(\mu_j)}{3!} y^3 \equiv \left(\frac{f'(\mu_j)}{3^2} + \frac{f'''(\mu_j)}{3!}\right) y + \frac{f''(\mu_j)}{6} y^2 \pmod 3,$$

又 $f''(\mu_j) \not\equiv 0 \pmod{3^2}$，即 $3 \nmid \frac{f''(\mu_j)}{6}$，所以由引理 2.6，有

$$|S_{\mu_j,3^l}| \leqslant 3^{\sigma_j-\frac{1}{2}} = m_j 3^{\frac{4}{k}-\frac{3}{2}} 3^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j 3^{\frac{2t(3)+1}{k}-1} 3^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

若 $m_j \geqslant 2$，$t_j = 0$，则由引理 2.3 和 (2.2) 式，

$$|S_{\mu_j,p^l}| \leqslant p^{l-1} \leqslant p^{\frac{m_j+t+2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{t+2}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)},$$

而当 $m_j \geqslant 2$，$t_j \geqslant 1$ 时，由引理 2.8，引理 2.2 和 $t_j \leqslant t(p)$.

$$|S_{\mu_j,p^l}| \leqslant m_j p^{l-2} = m_j p^{\frac{\sigma_j+2t_j+1}{k}-2} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

4) $2(t_j + 1) \leqslant l - \sigma_j \leqslant 2t(p) + 1$. 此时由引理 2.8 和 $\sigma_j \leqslant k$，有

$$|S_{\mu_j,p^l}| \leqslant m_j p^{l-2} \leqslant m_j p^{\frac{\sigma_j+2t(p)+1}{k}-2} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

5) $l - \sigma_j \geqslant 2(t(p) + 1)$. 此时由归纳假设及 $\sigma_j \leqslant k$.

$$|S_{\mu_j,p^l}| = p^{\sigma_j-1}|S(p^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))| \leqslant p^{\sigma_j-1} m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{(l-\sigma_j)\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$
$$= m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{\frac{\sigma_j}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)} \leqslant m_j p^{\frac{2t(p)+1}{k}-1} p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

再由引理 2.8，当 $l > 2t(p) + 1$ 时，

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant \sum_{j=1}^{r} |S_{\mu_j,p^l}|,$$

即 (4.5) 式成立，因此引理 4.3 得证.

五、定理的证明

定理 1 的证明. 先讨论 $p \leqslant k$ 时的情形. 当 $k = 3$ 时，由引理 3.3 和引理 3.5，

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant 2p^{l\left(1-\frac{1}{k}\right)};$$

对 $k = 4$，$p = 2$，由引理 4.2，

$$|S(2^l, f(x))| \leqslant 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} 2^{l\left(1-\frac{1}{4}\right)} \leqslant 4 \cdot 2^{l\left(1-\frac{1}{4}\right)},$$

对 $k=4$，$p=3$，由引理 4.3，

$$|S(3^l, f(x))| \leqslant 3 \cdot 3^{\frac{3}{4}-1} 3^{l(1-\frac{1}{4})} \leqslant 3 \cdot 3^{l(1-\frac{1}{4})};$$

对 $k=5, 6$，

$$2\left[\frac{\log k}{\log p}\right] \leqslant 2\left[\frac{\log k}{\log 2}\right] = 4 \leqslant k-1;$$

又当 $k \geqslant 7$ 时，

$$2\left[\frac{\log k}{\log p}\right] \leqslant 2\frac{\log k}{\log p} \leqslant 2\frac{\log k}{\log 2} \leqslant k-1.$$

因此由引理 4.2 和引理 4.3，当 $k \geqslant 5$ 时，$|S(p^l, f(x))| \leqslant (k-1)p^{l(1-\frac{1}{k})}$.

对 $k < p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-1}}$，由引理 2.9，

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant k^{\frac{2}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})}.$$

而对

$$(k-1)^{\frac{k}{k-1}} < p \leqslant (k-1)^{\frac{k}{k-2}},$$

由文献 [6] 的 (10) 式，

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant (k-1)^{\frac{2}{k-1}} p^{l(1-\frac{1}{k})}.$$

于是定理 1 得证.

定理 2 的证明. 现设 $X_k = (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$. 由文献 [8] 的引理 1，引理 3.3，引理 3.5，引理 4.2 和引理 4.3，有

$$|S(q, f(x))| \leqslant e^{F(k)} q^{1-\frac{1}{k}}, \tag{5.1}$$

其中

$$\begin{aligned} F(k) = &\left(1-\frac{2}{k}\right)(\pi(X_k)\log X_k - \theta(X_k)) + \frac{2}{k}\left(\sum_{p \leqslant k} t(p)\log p - \theta(k)\right) \\ &+ \left[\frac{k-2}{2k}(\pi(X_k^2)\log X_k^2 - \theta(X_k^2))\right. \\ &\left. - \frac{1}{2}(\pi((k-1)^2)\log(k-1)^2 - \theta((k-1)^2))\right] \\ = &\, I_1(k) + I_2(k) + I_3(k). \end{aligned} \tag{5.2}$$

对 $3 \leqslant k \leqslant 20$，用 (5.2) 式直接计算得 $F(k) \leqslant 1.85k$.

对 $k \geqslant 21$，与文献 [9] 的 (39) 式类似地得

$$\begin{aligned} \frac{I_3(k)}{k} = &\frac{\log(k-1)}{k}\int_{(k-1)^2}^{X_k^2} \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt \leqslant 1.001102 \times \frac{0.25}{21 \times 19} \\ &\times \left[1 + \frac{0.25\log 20}{38} \times \left(1 + \frac{0.25 \cdot \log 20}{3 \times 19}\left(1 + \frac{0.25\log 20}{4 \times 19} 20^{\frac{0.25}{19}}\right)\right)\right] \\ &\times \sum_{i=0}^{15} \frac{20^{\frac{0.25}{19}i+2}}{\left(2 + \frac{0.25}{19}i\right)^2} \leqslant 1.2601. \end{aligned} \tag{5.3}$$

对 $21 \leqslant k \leqslant 28$，直接代入计算得

$$\frac{I_1(k)}{k} \leqslant 0.45568.$$

利用 $\pi(x)\log x - \theta(x)$，当 $x > 2$ 时是增函数，$\frac{x-2}{x^2}$ 当 $x \geqslant 4$ 是减函数可得．对 $29 \leqslant k \leqslant 40$，$\frac{I_1(k)}{k} \leqslant 0.54211$；对 $41 \leqslant k \leqslant 60$，$\frac{I_1(k)}{k} \leqslant \frac{39}{41^2} \times (\pi(67)\log 59^{\frac{60}{58}} - \theta(67))$ $\leqslant 0.529461$；而对 $61 \leqslant k \leqslant 100$，$\frac{I_1(k)}{k} \leqslant \frac{59}{61^2} \times (\pi(108)\log 99^{\frac{100}{98}} - \theta(108)) \leqslant 0.533364$；

当 $k \geqslant 101$ 时，由文献 [8] 的 (23) 式，

$$\begin{aligned}\frac{I_1(k)}{k} = \frac{\log(k-1)}{k}\int_2^{x_k}\frac{dt}{t\log^2 t} \leqslant 1.001102\,\frac{\log(k-1)}{k}\Bigg(\int_{k-1}^{(k-1)^{1+\frac{1}{k-2}}}\frac{dt}{\log^2 t}\\ + \int_{(k-1)^{1+\frac{1}{k-2}}}^{(k-1)^{\frac{k}{k-2}}}\theta(t)\frac{dt}{\log^2 t} + \sum_{i=0}^{5}\int_{(k-1)^{\frac{1}{2}+\frac{i}{12}}}^{(k-1)^{\frac{1}{2}+\frac{i+1}{12}}}\frac{dt}{\log^2 t}\\ + \int_{(k-1)^{2/5}}^{(k-1)^{1/2}}\frac{dt}{\log^2 t} + \int_2^{(k-1)^{2/5}}\frac{dt}{\log^2 t}\Bigg)\end{aligned}$$

类似于文献 [9] 的 (50) 式，$k \geqslant 101$ 时，

$$\begin{aligned}&1.001102\,\frac{\log(k-1)}{k}\left(\int_{k-1}^{(k-1)^{1+\frac{1}{k-2}}}\frac{dt}{\log^2 t} + \int_{(k-1)^{1+\frac{1}{k-2}}}^{(k-1)^{\frac{k}{k-2}}}\frac{dt}{\log^2 t}\right)\\ &\leqslant 1.001102 \times \frac{100^{\frac{1}{99}}-1}{101 \times \log 100} \times \left(100 + \frac{100^{\frac{100}{99}}}{\left(1+\frac{1}{99}\right)^2}\right) \leqslant 0.0208,\end{aligned}$$

类似于文献 [9] 的 (51) 式和 (52) 式，$k \geqslant 101$ 时

$$\begin{aligned}&1.001102\,\frac{\log(k-1)}{k}\sum_{i=0}^{5}\int_{(k-1)^{\frac{1}{2}+\frac{i}{12}}}^{(k-1)^{\frac{1}{2}+\frac{i+1}{12}}}\frac{dt}{\log^2 t} \leqslant 1.001102 \times \frac{100^{\frac{1}{2}}(100^{\frac{1}{12}}-1)}{101\log 100}\\ &\times \sum_{i=0}^{4}\frac{100^{\frac{i}{12}}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{12}\right)^2} + 1.001102 \times \left(\frac{12}{11}\right)^2 \times \frac{1}{12} \times \frac{100}{101}\\ &\leqslant 0.25642 + 0.09929 = 0.35571.\end{aligned}$$

又因 $\frac{(k-1)^{2/5}}{k\log(k-1)}((k-1)^{\frac{1}{10}}-1)$ 当 $k \geqslant 101$ 时是减函数．

$$\begin{aligned}&1.001102\,\frac{\log(k-1)}{k}\int_{(k-1)^{2/5}}^{(k-1)^{1/2}}\frac{dt}{\log^2 t} \leqslant 1.001102\,\frac{25(k-1)^{2/5}}{4k\log(k-1)}((k-1)^{\frac{1}{10}}-1)\\ &\leqslant 1.001102 \times \frac{25 \times 100^{2/5}}{4 \times 101 \times \log 100}(100^{\frac{1}{10}}-1) \leqslant 0.05015.\end{aligned}$$

最后，类似于文献 [9] 的 (54) 和 (55) 式，

$$1.001102\,\frac{\log(k-1)}{k}\int_2^{(k-1)^{2/5}}\frac{dt}{\log^2 t} \leqslant 1.001102 \times \frac{\log 100}{101} \times \int_2^{6.33}\frac{dt}{\log^2 t}$$

$$\leqslant 1.001102 \times \frac{\log 100}{101} \times 3.0957 \leqslant 0.14131.$$

即当 $k \geqslant 101$ 时，

$$\frac{I_1(k)}{k} \leqslant 0.56797. \tag{5.4}$$

当 $k \geqslant 4$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{I_2(k)}{k} &= \frac{2}{k^2}\Big(\sum_{p\leqslant k} t(p)\log p - \theta(k)\Big) \leqslant \frac{2}{k^2}(\pi(k)\log k - \theta(k))\\ &= \frac{2\log k}{k^2}\int_2^k \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt \leqslant \frac{2\log k}{k^2}\int_2^{x_k}\frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt\\ &= \frac{2}{k}\,\frac{\log k}{\log(k-1)}\cdot\frac{\log(k-1)}{k}\int_2^{x_k}\frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt\\ &= \frac{2}{k}\,\frac{\log k}{\log(k-1)}\,\frac{I_1(k)}{k}.\end{aligned}$$

因此，当 $21 \leqslant k \leqslant 28$ 时，

$$\frac{I_2(k)}{k} \leqslant \frac{2}{21} \times \frac{\log 21}{\log 20} \times 0.45568 \leqslant 0.04411;$$

当 $29 \leqslant k \leqslant 40$ 时，

$$\frac{I_2(k)}{k} \leqslant \frac{2}{29} \times \frac{\log 29}{\log 28} \times 0.54211 \leqslant 0.037781;$$

当 $41 \leqslant k \leqslant 60$ 时，

$$\frac{I_2(k)}{k} \leqslant \frac{2}{41} \times \frac{\log 41}{\log 40} \times 0.529461 \leqslant 0.02601;$$

当 $61 \leqslant k \leqslant 100$ 时，

$$\frac{I_2(k)}{k} \leqslant \frac{2}{61} \times \frac{\log 61}{\log 60} \times 0.533364 \leqslant 0.01756;$$

当 $k \geqslant 101$ 时，

$$\frac{I_2(k)}{k} \leqslant \frac{2}{101} \times \frac{\log 101}{\log 100} \times 0.56797 \leqslant 0.01128.$$

综合上述，即得

$$\frac{F(k)}{k} \leqslant 1.85.$$

定理 2 得证。

参　考　文　献

[1] Huo Loo-keng, *J. Chinese Math. Soc.*, **2**(1940), 301—312.

[2] 华罗庚，堆垒素数论，科学出版社，1957.

[3] Нечаев, В. И., *Изв. Акад. Наук. СССР сер. Мат.*, **17**(1953), 485—498.

[4] 陈景润，数学学报，**9**(1959)，264—270.

[5] Нечаев, В. И., *Мат. Заметка*, **17**(1975), 839—849.

[6] Chen Jing -run, *Sci. Sinica.*, **20**(1977), 6: 711—719.
[7] Стечкин С. Б., *Тр Мат ин-та АН СССР*, **143**(1977), 188—207.
[8] 陆鸣皋,关于完整三角和估计的一点注记,数学学报(待发表).
[9] Qi Ming-gao and Ding Ping, 科学通报, **29**(1984), 10: 581—583.
[10] André Weil, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **34**(1948), 204—207.
[11] André Weil, *Actualites Sci. Indust.*, no. 1041, Hermann, Paris, 1948.
[12] Wolfgang, M. S., *Mh. Math.*, **93**(1982), 63—74.