

# 基于弦内角映射参数的多边形三角剖分快速优化

徐 辉 张树有

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

**摘 要** 为提高三角剖分质量及其优化的速度, 提出了基于弦内角映射参数的三角剖分优化算法, 三角剖分优化问题实质是凸四边形的对角线选择问题, 在两个三角形组成的凸四边形中, 将弦内角映射成两三角形公共边中垂线上的映射参数值, 经过证明映射参数与弦内角具有等价的三角剖分优化判别特性, 因此三角剖分局部优化转化为映射参数的判别问题。理论分析与实践表明, 该方法实现非常容易, 且映射参数计算简洁方便、快捷可靠, 弦内角映射参数判别方法避免了传统方法所必需的角度、半径距离计算, 明显地提高了计算效率。

**关键词** 多边形 三角剖分 局部优化 弦内角 映射参数

**中图法分类号**: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2004)04-0445-06

## Polygon's Triangulation and Quick Optimum Based on Angle-of-Chord Mapping Parameters Rule

XU Hui, ZHANG Shu-you

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** To solve the problem of improving the quality of triangulation and its optimum speed, some exports have proposed many methods, whereas there is too much calculation and determining in these prevail methods, which has been a key question. The paper presents the algorithm for triangulation and its optimum based on angle-of-chord mapping parameters, and it introduces the conception of angle-of-chord and proves its property. And triangulation optimum is actually diagonal selection of convex quadrangle. In a convex quadrangle including two triangles, it shows the facts that angle-of-chords are mapped to become mapping parameters on the perpendicular bisector of two adjacent triangles' common-edge, then the paper proves that mapping parameters has the same triangulation determining quality as angles-of-chord own one. Consequently triangulation and locale optimum is turned to a problem of mapping parameters' determining. Theoretic analysis and practicing show that the implementation of the method is very easy, the computation of mapping parameters is simple and convenient, and its result is credible; the angle-of-chord mapping parameter determining method has avoided calculating the angles or radiuses-distances, which are necessary in conventional methods. The angle-of-chord mapping parameter determining method improves evidently calculation efficiency.

**Keywords** polygon, triangulation, locale optimum, angle-of-chord, mapping parameters

## 1 引 言

在 CG/CAD、有限元分析及机器人等领域中, 经常要处理这样的问题: 在二维平面内对给定一组散乱数据进行三角剖分, 在三角域上构造插值曲面,

再以此为基础进行各种分析、计算及处理。因此, 三角剖分是其他许多问题处理的前提, 优化的三角剖分具有重要的实用价值, 并一直以来为国内外学者所关注<sup>[1~3]</sup>。

二维域内三角剖分常用的准则有最大-最小距离准则、Circle 准则、最大-最小角准则、最大-最小

高准则、Thiessen 准则等。这些准则的基本出发点就是尽可能避免平面三角形出现太尖的畸形,即三角形内角过小。根据逼近论的分析结果可知,三角曲面的逼近误差与三角区域的最小内角大小有关,为提高逼近精度就应该避免出现过尖的剖分三角形,这一问题在实际的应用中更为重要。

当前在多边形的三角剖分算法中,Kong 切耳算法<sup>[1]</sup>是一种简便易行的算法,但其剖分与扫描起始点的选择有关;同时它也很难保证剖分所得的三角形的形态质量,容易出现畸形三角形。只单纯地使用 Delaunay 三角剖分算法的剖分结果,可能会存在畸形三角形,而文献<sup>[2]</sup>采用的三角剖分算法,按最大-最小内角准则通过局部变换得到三角剖分,该算法必须计算比较四边形中 4 个三角形的 12 个内角;采用 Circle 准则<sup>[3]</sup>的算法则必需计算一个三角形外接圆的圆心、半径以及圆心到第 4 个点的距离,二者的计算量比较多,自然局部优化速度也相对慢。

实际上任意一个简单多边形的三角剖分局部优化,最终可归结为对四边形的局部优化。针对传统方法的角度、半径距离计算量大、判别复杂或存在畸形三角形等问题,提出了一种弦内角映射参数判别,根据四边形任意一条边所对的两个弦内角,通过直线参数化将弦内角映射为公共边中垂线上相应的映射参数而直接判别三角剖分的优劣,该算法最大的优点是避免了角度、半径距离的计算。理论分析和实践均表明,该算法实现简单、运行稳定而且计算量显著减少,非常有效地提高了剖分优化的效率。

2 弦内角的基本定义及性质

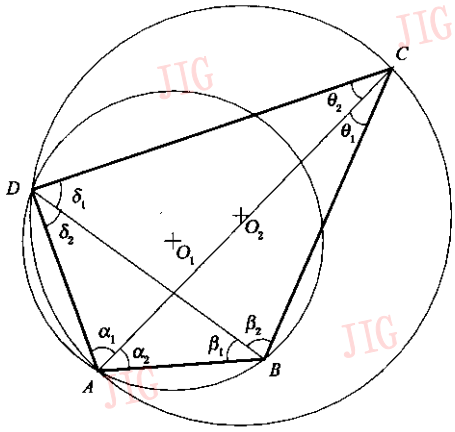
2.1 弦内角的基本定义

给定二维平面上任意域  $D$  内的点集  $V=(V_1, \dots, V_n, n>3)$ , 多边形三角剖分,是将多边形分解为一系列相互不重叠的三角形,同时不产生新顶点的剖分。

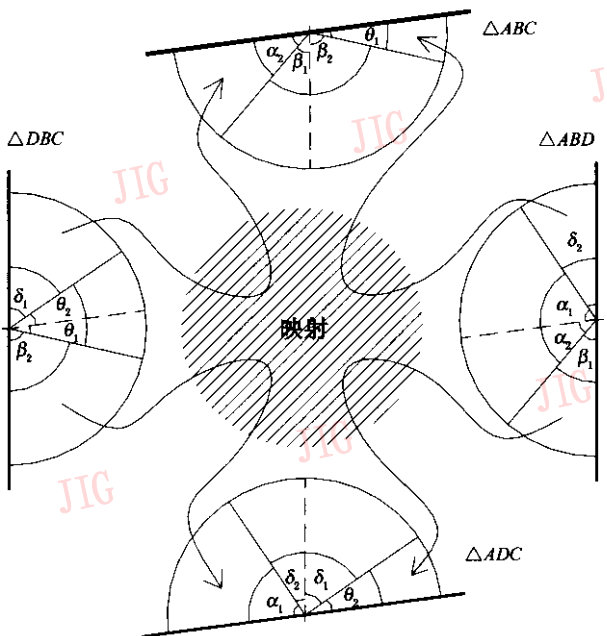
**弦内角定义** 四边形以对角线为分割线,可分解为两组三角形,每组三角形包含两个不相重叠的三角形,四边形的每个内角被对角线分割成了两个子角,这两个子角中的任一个角为某弦(即四边形的一条边)所对应的圆周角,这个圆周角称为弦内角。

如图 1(a)所示,四边形  $ABCD$  可分解为两组三角形  $\triangle ABD$  与  $\triangle BDC$ 、 $\triangle ABC$  与  $\triangle ADC$ , 内角  $\angle ABC$  被分割成  $\beta_1$  和  $\beta_2$  两个子角,内角  $\angle BCD$  被

分割成  $\theta_1$  和  $\theta_2$  两个子角,其中  $\beta_1$  为弦  $AD$  所对的弦内角,  $\theta_2$  也为弦  $AD$  所对的弦内角。同理,弦  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  所对应的弦内角分别为  $\delta_2$  和  $\theta_1$ 、 $\alpha_2$  和  $\delta_1$ 、 $\alpha_1$  和  $\beta_2$ 。



(a) 弦内角与四边形的两种三角形划分



(b) 弦内角之间的映射关系

图 1 四边形的两组三角形划分及 4 对弦内角间特定的映射关系

2.2 弦内角的等同性

根据弦内角的定义,由四边形两组不同的三角划分可得到 8 个弦内角,研究分析发现,这些弦内角中每对之间存在着某种映射对应关系,如图 1(a)所示为四边形的两种三角划分,图 1(b)表示出了弦内角间的某种映射关系,其中上下、左右两组半圆分别为四边形的一种三角形划分,这种特定的映射关系所具有的性质称为弦内角的等同性。

**弦内角的等同性定义** 在四边形  $ABCD$  中,两条对角线将四边形 4 个内角划分为 8 个弦内角,若  $\delta_2 > \theta_1$ , 则  $\alpha_1 < \beta_2, \delta_1 > \alpha_2, \theta_2 < \beta_1$ , 即一个不等式成立,其余 3 个不等式同时成立。

证明:

四边形  $ABCD$  如图 2 所示,弦内角间存在着如下关系

$$\alpha_1 + \delta_2 = \beta_2 + \theta_1$$

$$\delta_1 + \theta_2 = \alpha_2 + \beta_1$$

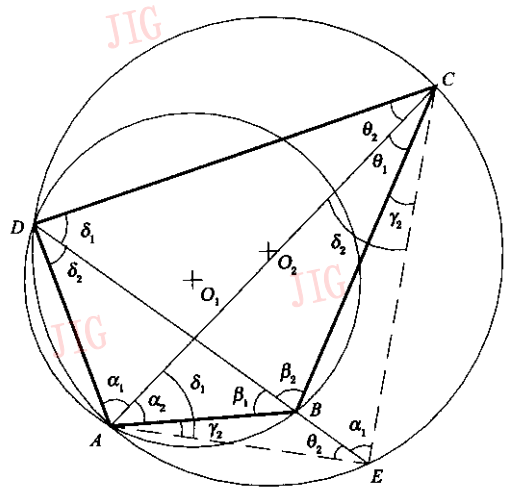


图 2 弦内角的等同性

在四边形  $ABCD$  中,作对角线  $DB$  的辅助线,延长至  $\triangle ADC$  外接圆  $C_2$  交于  $E$  点,连接  $AE$ 、 $CE$ ,则有

$$\beta_1 = \gamma_1 + \theta_2 \quad \beta_2 = \alpha_1 + \gamma_2$$

$$\delta_1 = \alpha_2 + \gamma_1$$

$$\delta_2 = \theta_1 + \gamma_2$$

由式(1)可得,若  $\delta_2 > \theta_1$

$$\delta_2 > \theta_1 \Leftrightarrow \alpha_1 < \beta_2$$

在式(4)中,若  $\gamma_2 \neq 0$  ( $\gamma_2$  非负),则  $\delta_1 > \alpha_2$

又知  $B$  点在圆  $C_2$  的内部,所以  $\gamma_1 \neq 0$  ( $\gamma_1$  非负)。

代入式(3),得  $\delta_1 > \alpha_2$

$\delta_1 > \alpha_2$  再代入式(2)可推得

$$\delta_1 > \alpha_2 \Leftrightarrow \theta_2 < \beta_1$$

即式(5)、(6)共同组成

$$\delta_2 > \theta_1 \Leftrightarrow \alpha_1 < \beta_2 \Leftrightarrow \delta_1 > \alpha_2 \Leftrightarrow \theta_2 < \beta_1$$

依据轮换性,同理可以证明其余的情况。

4 个不等式中若取得其中的任何一个不等式,即可得到其他 3 个不等式;当然 4 个不等式变成等式时结论同样成立。故可以采用任何一个弦内角的不等式来判断 8 个弦内角大小关系。

### 3 弦内角映射参数判别准则

#### 3.1 弦内角的优化性判别

**弦内角的优化性判别** 若四边形  $ABCD$  中最初的对角线是  $AC$ ,经过比较,如  $\delta_2 > \theta_1$ ,则需要把对角线  $AC$  交换为  $DB$ ;若四边形  $ABCD$  中最初的对角线是  $DB$ ,经过比较,如  $\delta_2 > \theta_1$ ,则不需要交换对角线;若  $\delta_2 = \theta_1$ ,则四边形  $ABCD$  保留最初的对角线。

证明:

四边形  $ABCD$  中的 4 个三角形共计 12 个内角,如图 2 所示, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \delta_1, \delta_2$  为弦内角,共同组成四边形  $ABCD$  的三角剖分的可能候选最小内角集合  $\Pi$

$$\Pi = \{ \pi \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \delta_1, \delta_2, \angle DAB, \angle DCB, \angle ABC, \angle ADC \}$$

最小内角集合是指包含了最小内角的内角集合,经分析可知,最小内角集合内包含的内角属于四边形同一个划分的两个三角形中,就是说最小内角集合包含的有效信息等价于求取最小内角。

(1)  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $\angle DAB$  的两个子角,所以  $\alpha_1 < \angle DAB, \alpha_2 < \angle DAB$ 。可以肯定  $\angle DAB$  决不可能是最小内角,可以将  $\angle DAB$  从可能候选最小内角集合  $\Pi$  中剔除,同理,  $\angle DCB, \angle ABC, \angle ADC$  也被剔除。

形成四边形  $ABCD$  三角剖分的新的候选最小内角集合  $\Pi'$

$$\Pi' = \{ \pi \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \delta_1, \delta_2 \}$$

(2)  $\delta_2 > \theta_1$  的情形,根据已知条件  $\delta_2 > \theta_1$ ,可以将  $\delta_2$  从候选最小内角集合  $\Pi'$  剔除,同理,由弦内角的等同性可知,  $\delta_1 > \alpha_2, \beta_2 > \alpha_1, \beta_1 > \theta_2$ ,再将  $\delta_1, \beta_2, \beta_1$  从候选最小内角集合  $\Pi'$  剔除,形成为四边形  $ABCD$  三角剖分的最小内角集合  $\Pi''$

$$\Pi'' = \{ \pi \mid \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2 \}$$

此时可以得到四边形  $ABCD$  三角剖分的最小内角  $\Pi_{\min} = \min \{ \pi \mid \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2 \}$ ,而最小内角  $\Pi_{\min}$  不论取得  $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2$  中的任何一个,  $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2$  都共同属于三角剖分的同一组三角形  $\triangle ADC$  与  $\triangle ABC$ ,这组三角形既然包含了四边形  $ABCD$  三角剖分的最小内角  $\Pi_{\min}$ ,则选取四边形  $ABCD$  三角剖分的另外一组三角形  $\triangle ABD$  与  $\triangle CDB$  要优于原来一组三角形,因此交换对角线  $AC$  为  $DB$ 。

$\delta_2 = \theta_1$  的情形,由弦内角的等同性可知,  $\delta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1, \beta_1 = \theta_2$ ,此时四边形  $ABCD$  的  $A, B, C, D$  4

点共圆,  $\Pi_{\min} = \{\pi | \pi \in \Pi'\}$ , 不论最小内角  $\Pi_{\min}$  等于候选最小内角集合  $\Pi'$  中的哪一个角, 都存在另外一个角与之相等, 并且二者分别属于两组三角形  $\triangle ABD$  与  $\triangle CDB$ 、 $\triangle ADC$  与  $\triangle ABC$ , 也即两种三角剖分的三角形最小内角相等, 因此此四边形没有必要交换对角线。

3.2 任意弦内角最大化

由弦内角的等同性可以得出结论, 进行局部优化时只要任意选取四边形的一条边作为弦, 确定相应的弦内角, 再根据弦内角的优化性判别就可以完全有理由判定出选择哪组三角形划分为四边形的最优三角剖分。弦所对的弦内角小, 则放弃选择包含该弦内角的那组三角形划分; 反之, 弦所对的弦内角大, 则保留包含该弦内角的那组三角形划分。

3.3 弦内角映射参数判别准则

根据任意弦内角最大化, 进一步推论具体的判别——弦内角映射参数判别, 四边形中有公共边的两个三角形确定了四边形的相邻三条边及其相应的三条中垂线, 在公共边中垂线上取得一个特殊点——垂足, 以垂足和公共边的端点坐标变化值构造中垂线的直线参数方程, 再通过和另外两条中垂线共同求解交点时, 便将弦内角映射到了公共边中垂线上, 得到弦内角的映射参数值, 该映射参数值直接反映了弦内角的大小, 因此, 根本不需要求解交点的具体坐标值。

一条弦所对弦内角的大小由对应的映射参数值来判定, 映射参数值大, 弦所对的弦内角越小, 则放弃包含该弦内角的那组三角形划分; 反之映射参数值小, 弦所对的弦内角大, 则保留包含该弦内角的那组三角形划分。

如图 3 所示, 3 条中垂线  $L_1(m)$ 、 $L_2(n)$ 、 $L_0(t)$ , 其中  $m$ 、 $n$ 、 $t$  分别为各自直线的参数, 点  $P$  为  $L_0(t)$  与  $AB$  的垂足点, 利用点  $O_1$ 、 $O_2$  在公共边同一中垂线上的便利条件, 点  $O_1$ 、 $O_2$  在  $L_0(t)$  上的参数值  $|t_1|$ 、 $|t_2|$  即为弦内角  $\theta_1$ 、 $\delta_2$  在  $L_0(t)$  上的映射参数值, 其中  $|t_1| = |PO_1|$ 、 $|t_2| = |PO_2|$ , 由映射参数值  $|t_1|$ 、 $|t_2|$  就完全可以判别弦  $AB$  所对的弦内角  $\theta_1$ 、 $\delta_2$ , 并最终达到多边形三角剖分局部优化的判别。

在三角剖分中, 当公有一条边的两个三角形不满足弦内角映射参数判别时, 即公有的边不是局部优化, 通过交换对角线可以生成这 4 个点的另一种三角划分。这个过程称为三角划分用弦内角映射参数判别进行局部优化。

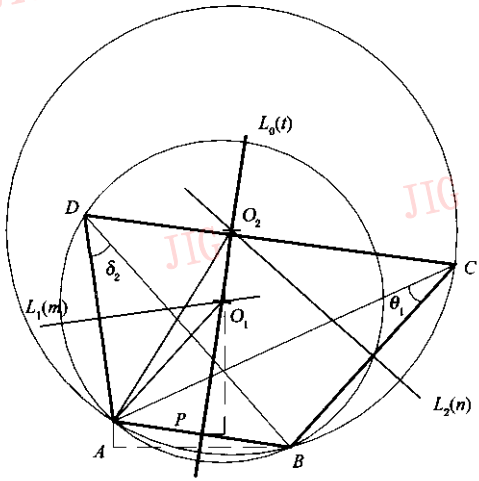


图 3 弦内角映射参数

4 基于弦内角映射参数判别与分析

4.1 弦内角映射参数判别

以一个多边形的三角剖分为例, 描述基于弦内角映射参数判别的多边形三角剖分优化算法, 由多边形顶点的凹凸性, 构造三角形表, 由两个相邻三角形组成的四边形任意一条边所对的两个弦内角, 根据弦内角映射在公共边中垂线上的映射参数值大小进行三角剖分的优化。

判别过程如下:

- (1) 从散乱数据中按逆时针方向顺序读入多边形的顶点, 并建立双向循环链表。
- (2) 计算出双向循环链表中每个结点的凹凸性。
- (3) 若链表中还存在 3 个以上的结点, 则转步骤 2, 否则转步骤 4。
- (4) 由链表中最后 3 个结点所对应的多边形顶点构成一个三角形, 删除链表中最后 3 个结点。并形成一个三角剖分的三角形表 TML。
- (5) 以弦内角映射参数判别进行局部优化变换, 得到优化的三角剖分。
  - ① 从三角形表 TML 形成三角形网格的边表 EL。
  - ② 取得边表 EL 中的每一条非边界边, 转到步骤③。
  - ③ 以次边为邻接条件取出 2 个相邻三角形, 构成一个四边形。
  - ④ 如果这个四边形是凹的, 则不做任何处理,



转步骤③。如果这个四边形是凸的,则转步骤⑤。

⑤ 按照弦内角映射参数判别进行计算、比较两个弦内角在公共边中垂线上的映射参数值,从而确定两个弦内角的大小关系,最终确定采取哪一条对角线作为三角剖分的边。

⑥ 如果没有需要交换的非边界边,则结束,否则转步骤①。

4.2 计算量分析

现以一个四边形的局部优化为例,最小角最大

准则算法需要计算四边形的 12 内角,求每个三角形的最小内角,再进行比较得出四边形最小内角;Circle 准则算法需要求得一个三角形外接圆的圆心,计算外接圆半径、圆心到第 4 个点的距离,最后比较半径和距离的大小,其方法不能利用参数的便利;而弦内角映射参数判别算法充分利用三角形公共边参数化中垂线的纽带作用,只需计算比较两个弦内角映射在公共边中垂线的相应映射参数值即可,以上算法的计算量比较如表 1 所示。

表 1 局部优化方法计算量比较

| 最小角最大准则算法 |                 | Circle 准则算法     | 弦内角映射参数判别算法              |
|-----------|-----------------|-----------------|--------------------------|
| 计算内容      | 1、计算 12 个内角;    | 1、计算一个外接圆的圆心;   | 1、计算两弦内角映射在公共边中垂线上的映射参数; |
|           | 2、求每个三角形的最小内角;  | 2、计算外接圆半径;      | 2、比较两映射参数大小;             |
|           | 3、比较四个三角形的最小内角; | 3、计算圆心到第四个点的距离; |                          |
|           |                 | 4、比较半径和距离的大小;   |                          |
| 计算量比较     | 加法运算(次)         | 30              | 22                       |
|           | 乘法运算(次)         | 80              | 20                       |
|           | 开方运算(次)         | 16              | 0                        |
|           | 三角运算(次)         | 8               | 0                        |

从表 1 的计算量分析得出,基于弦内角映射参数判别的三角剖分优化不仅处理过程简单,而且计算量大大减少,3 种算法的复杂度都是  $O(n)$ ,但弦内角映射参数判别算法的计算效率明显优于传统计算 Circle 准则、最小角最大角度值算法。在实际三角剖分中,由于往往需要大量重复调用剖分局部优化计算,因此提高三角剖分的局部优化计算效率具有重要意义。

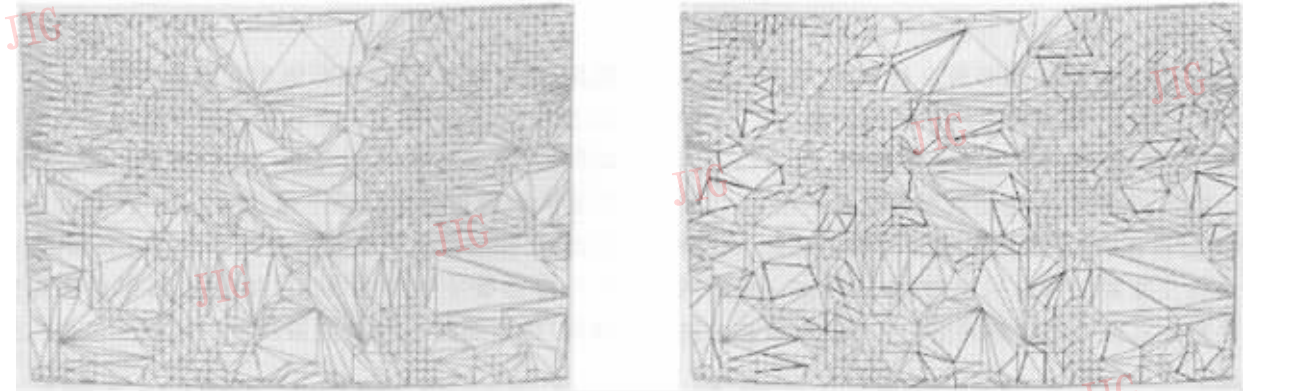
5 实 例

图 4(a)所示的是人脑后部局部区域的一个三角剖分,图 4(b)所示的是在图 4(a)三角剖分基础上

采用弦内角映射参数判别算法进行局部优化的结果,图 4(b)中深色线为经优化的对角线。该实例含有 1 504 个点 2 683 个三角面片,在 P III 550 长城微机上进行优化重复运算 100 次,表 2 给出了实例优化的 3 种算法运算时间结果比较情况,其中最经典的 Circle 准则算法的耗时几乎是弦内角映射参数判别算法的 2 倍,最小角最大准则算法的耗时是弦内角映射参数判别算法的 22 倍多。

表 2 实例优化的运算时间比较

|         | 最小角最大<br>准则算法 | Circle<br>准则算法 | 弦内角映射参数<br>判别算法 |
|---------|---------------|----------------|-----------------|
| 计算时间(s) | 9.853 480     | 0.860 806      | 0.432 235       |
| 倍数      | 22.801        | 1.997          | 1               |



(a) 人脑后部局部区域的三角剖分

(b) 弦内角映射参数判别优化的结果

图 4 三角剖分结果比较实例

6 结 论

三角剖分是计算机图形学、计算几何中的一个重要问题,研究三角剖分局部优化算法对提高剖分效率与质量具有重要意义。针对传统方法角度、半径距离计算量大的不足,提出了弦内角映射参数判别,三角剖分局部优化的问题就是比较四边形任意一条边所对的两个弦内角,映射到公共边中垂线上的映射参数值,从而避免了传统方法的角度、半径距离计算。弦内角映射参数判别不仅方便简捷,而且非常有效地提高了计算效率。

参 考 文 献

1 Kong Xianshu S, Hazel Everett, Godfried Toussaint. The Graham scan triangulates simple polygons [J]. Pattern Recognition Letters, 1990,11(11):713~716.

2 马小虎,潘志庚. 基于凹凸顶点判定的简单多边形 Delaunay 三角剖分[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,1999,11(1):1~3.

3 Berg M D, Kreveld M V, Overmars M, et al. Computational Geometry-Algorithms and Applications(2nd rev. ed. 2000 XII) [M]. Heidelberg:Springer-Verlag,2000:185~187.

4 Schroeder W J, Zarge J A, Lorensen W E. Decimation of triangle meshes[J]. Computer Graphics, 1992,26(2): 65~70.

5 George P L, Hecht F, Saltel E. Fully automatic mesh generator for 3D domains of any shape[J]. Impact of Computing in Science and Engineering, 1990,2(3):187~218.

6 Lawson C L. Software for C<sup>1</sup> interpolation[A]. In: Rice J R. Mathematical Software II [M], New York: Academic Press, 1977:161~194.

7 潘志庚,马小虎. 基于图的任意域内点集的 Delaunay 三角剖分算法[J]. 软件学报,1996,7(11):656~661.



徐 辉 1972 年生,工程师,硕士研究生,现为浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 2001 级在读硕士研究生。主要研究领域为计算机图形学和虚拟现实技术。



张树有 1963 年生,教授,博士生导师,副所长,2000 年于浙江大学获理学博士学位。主要研究领域为计算机图形学、CAD 以及虚拟现实技术。