

关于线性变换完全环的稠密单侧理想的刻划

魏 景 东

(复旦大学数学研究所, 上海)

关于线性变换完全环的抽象刻划, Wolfson^[1] 及许永华^[2] 都作了不少讨论, 他们用不同的方法各得到了一个抽象环同构于一个线性变换完全环的充要条件. 本文主要是在他们的工作的基础上继续这方面的探讨, 给出一个抽象环同构于一个左向量空间的线性变换完全环的稠密左理想、稠密右理想、含所有有限秩的线性变换的右理想、理想等的几个充要条件, 由此可以方便地得到许永华对线性变换完全环的刻划以及二个新的刻划.

§1 本节介绍主要结果. 本文中环均指结合环, 线性变换完全环指除环上左向量空间线性变换全体构成的环. 对环 R , $I \triangleleft R$ ($I \triangleleft R$) 指 I 是 R 的左(右)理想, 对 $S \subset R$, $l(S)$ ($r(S)$) 指 S 在 R 中的左(右)零化子, 若记 $\mathfrak{S}$ 为 R 的基座 (Socle), 常记

$$(S: \mathfrak{S}) = \{r \in R: \mathfrak{S}r \subseteq S\} \triangleleft R,$$

其余未经特别声明的记号皆引自文献[2]或[3].

设 R 是环, 现在列出关于 R 的如下五个条件:

(A) R 有基座 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^2 \neq 0$, 且 R 的每个非零理想包含 $\mathfrak{S}$.

(B) 对 R 的基座 $\mathfrak{S}$ 的任何左理想直和分解 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft \mathfrak{S}$, 有

$$R = r(L_1) + r(L_2).$$

(C) 对 R 的基座 $\mathfrak{S}$ 的任何左理想直和分解 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft \mathfrak{S}$, 有

$$R = (L_1: \mathfrak{S}) + (L_2: \mathfrak{S}).$$

(D) 对 R 的基座 $\mathfrak{S}$ 的任何左理想直和分解 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft \mathfrak{S}$, 有

$$R = l(r(L_1)) \oplus l(r(L_2)).$$

(E) R 有么元.

定理 1 条件 (A)、(B) 是 R 同构于某线性变换完全环的稠密左理想的一个充要条件.

定理 2 条件 (A)、(C) 是 R 同构于某线性变换完全环的稠密右理想的一个充要条件.

定理 3 条件 (A)、(D) 是 R 同构于某线性变换完全环的含所有有限秩变换的右理想的一个充要条件.

推论 1 条件 (A)、(E) 加上条件 (B)、(C)、(D) 之一给出 R 同构于某线性变换完全环的三个充要条件. 注意条件 (A)、(B)、(E) 就是许永华对线性变换完全环的刻划.

推论 2 条件 (A)、(B)、(C) 或条件 (A)、(B)、(D) 是 R 同构于某线性变换完全环的非零理想的二个充要条件.

推论 3 环 R 同构于某左向量空间的所有有限秩线性变换所构成的环当且仅当

本文 1985 年 1 月 29 日收到.

(i) R 是一个有极小单侧理想的单纯环.

(ii) 若 $R = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft R$, $i = 1, 2$, 则 $R = r(L_1) + r(L_2)$.

§2 本节我们证明上述结果. Wolfson 在文献[1]中得到了如下结果:

引理 1 线性变换完全环作为环由其中的幂等元生成.

下面的引理是由熟知结果组成的, 证明参见文献[2].

引理 2 环 R 同构于除环 Δ 上左向量空间 A 的线性变换完全环 Q 的稠密子环, 且含有有限秩的元素当且仅当 R 有基座 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^2 \neq 0$, 且 R 的每个非零理想包含 $\mathfrak{S}$. 此时 A 可取为 R 的任一极小右理想, $A = eR = e\mathfrak{S}$, $e^2 = e \in \mathfrak{S}$, 且 Δ 可取为 $K = e\mathfrak{S}e$, Q 及 R 在 A 上的作用即为右乘运算, $\mathfrak{S}$ 是 R 的有限秩元素全体, $\mathfrak{S} \triangleleft Q$.

定理 1 的证明: 必要性. 设 Q 是左向量空间 A 的线性变换完全环, R 是 Q 的稠密左理想, 则 R 必含有限秩的变换 (事实上不难验证此时 R 包含所有有限秩的线性变换), 故由引理 2 知 (A) 真, 且可取 $A = e\mathfrak{S}$, $e^2 = e \in \mathfrak{S}$. 设 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft \mathfrak{S}$, $i = 1, 2$, 则 $A = eL_1 \oplus eL_2$, eL_i 是 A 的子空间, 故有 $l = l^2 \in Q$, $eL_1l = eL_1$, $eL_2l = 0$, 由于 $\mathfrak{S}e\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$, 知 $L_i = \mathfrak{S}eL_i$, 于是 $L_1l = L_1$, $L_2l = 0$, 注意 $lR \subset QR \subset R$, 知 $lR \subset r(L_2)$, 又若 $a \in r(L_2)$, 易见 $L_1(a - la) = 0$, $L_2(a - la) = 0$, 从而 $\mathfrak{S}(a - la) = 0$, $a - la \in lR$, 即 $lR = r(L_2)$, 同理 $(1 - l)R = r(L_1)$, 即得 $R = r(L_1) + r(L_2)$.

充分性. 由引理 2, 取 R 的极小右理想 $A = e\mathfrak{S}$, $e^2 = e \in \mathfrak{S}$, Q 为 $K = e\mathfrak{S}e$ 上左向量空间 A 的线性变换完全环, 则 R 在 Q 中稠密. 今 $\forall l = l^2 \in Q$, 令 $L_1 = \mathfrak{S}l \triangleleft \mathfrak{S}$, $L_2 = \mathfrak{S}(1 - l) \triangleleft \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, 于是 $R = r(L_1) + r(L_2)$. 而 $\mathfrak{S}lr(L_1) = 0$, $lr(L_1) = 0$, 又 $\forall a \in r(L_2)$, 易见 $L_1(a - la) = 0$, $L_2(a - la) = 0$, 即 $a - la \in lR$, $r(L_2) = lr(L_2)$, 所以 $lR = l(r(L_1) + r(L_2)) = r(L_2) \subset R$, 由 Wolfson 引理, 知 $QR \subseteq R$, 即 $R \triangleleft Q$. 证毕.

定理 2 的证明: 必要性. 类似定理 1 的证明知 (A) 成立, 且若 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft \mathfrak{S}$, 有 $l = l^2 \in Q$, 使 $L_1l = L_1$, $L_2l = 0$, 即易见 $(L_1:\mathfrak{S}) = Rl$, $(L_2:\mathfrak{S}) = R(1 - l)$, 于是 $R = (L_1:\mathfrak{S}) + (L_2:\mathfrak{S})$.

充分性. 由引理 2 可取 R 的极小右理想 $A = e\mathfrak{S}$, $e^2 = e$, A 自然地成为 $e\mathfrak{S}e$ 上向量空间, R 是 A 的线性变换完全环 Q 的稠密子环, $\forall l = l^2 \in Q$, 令 $L_1 = \mathfrak{S}l$, $L_2 = \mathfrak{S}(1 - l)$, 则 $R = (L_1:\mathfrak{S}) + (L_2:\mathfrak{S})$. 今 $\mathfrak{S}(L_2:\mathfrak{S})l = 0$, 知 $(L_2:\mathfrak{S})l = 0$. 又由 $\mathfrak{S}(L_1:\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}l = L_1$ 易知 $(L_1:\mathfrak{S})l = (L_1:\mathfrak{S})$, 故 $Rl = (L_1:\mathfrak{S}) \subseteq R$, 再由 Wolfson 引理知 $RQ \subseteq R$, 即 $R \triangleleft Q$. 证毕.

定理 3 的证明: 必要性由定理 2 知 (A) 真, 且若 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft \mathfrak{S}$, $i = 1, 2$, 有 $R = (L_1:\mathfrak{S}) + (L_2:\mathfrak{S})$. 由于 $\mathfrak{S}(L_i:\mathfrak{S})r(L_i) = 0$, 知 $(L_i:\mathfrak{S}) \subseteq l(r(L_i))$, 从而 $R = l(r(L_1)) + l(r(L_2))$. 又如定理 2 的必要性证明, 取 $l = l^2 \in Q$, $L_1l = L_1$, $L_2l = 0$, $(L_1:\mathfrak{S}) = Rl$, $(L_2:\mathfrak{S}) = R(1 - l)$, 对 $a \in l(r(L_1)) \cap l(r(L_2))$, $al \in Rl = (L_1:\mathfrak{S}) \subseteq l(r(L_1))$, $a(1 - l) \in l(r(L_2))$, 于是 $al = a - a(1 - l) \in l(r(L_2))$, $alr(L_2) = 0$. 记 T_0 为 Q 的基座, $T_0 \subset R$, 即知 $lT_0 \subset r(L_2)$, 于是 $allT_0 = 0$, $al = 0$, 同理 $a(1 - l) = 0$, 即 $a = 0$, 故 $R = l(r(L_1)) \oplus l(r(L_2))$.

充分性. 由引理 2 R 成为某线性变换完全环 $\mathcal{Q}$ 的稠密子环, 记 T_0 为 $\mathcal{Q}$ 的基座. 先证明 $\mathfrak{S} = T_0$. 设 $H \triangleleft R$ 且 $r(H) = 0$, 记 $L_1 = \mathfrak{S}H \triangleleft \mathfrak{S}$, 再取 $L_2 \triangleleft \mathfrak{S}$ 使 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, 则 $R = l(r(L_1)) \oplus l(r(L_2))$, 注意 $r(L_1) = 0$, $l(r(L_1)) = R$, 故 $l(r(L_2)) = 0$, $r(L_2) = R$, $L_2 R = 0$, $L_2 = 0$. 即 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}H \subseteq H$, 由熟知结果(文献[1], 定理 6.1)知 $R \supset T_0$, 所以 $\mathfrak{S} = T_0$. 再设 $\mathfrak{S} = L_1 \oplus L_2$, $L_i \triangleleft \mathfrak{S}$, $i = 1, 2$, 由必要性知 $(L_i : \mathfrak{S}) \subseteq l(r(L_i))$. 今记 $l_{\mathfrak{S}}(\quad)$, $r_{\mathfrak{S}}(\quad)$ 为 $\mathfrak{S}$ 的某子集在 $\mathfrak{S}$ 中的左、右零化子, 熟知地 T_0 的每个左理想均是左零化子(见文献[3], 定理 3, p. 92), 故由 $\mathfrak{S}l(r(L_i))r(L_i) = 0$ 知 $\mathfrak{S}l(r(L_i)) \subseteq l_{\mathfrak{S}}(r_{\mathfrak{S}}(L_i)) = L_i$, 即 $l(r(L_i)) \subseteq (L_i : \mathfrak{S})$, 因此 $R = (L_1 : \mathfrak{S}) + (L_2 : \mathfrak{S})$, 即 R 满足条件 (C), 再由定理 2 即得证.

致谢: 本文是在导师许永华教授指导下完成的, 作者表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] Wolfson, K. G., *Amer. J. Math.*, 75(1953), 358—386.
- [2] 许永华, 数学学报, 22(1979), 204—218.
- [3] Jacobson, N., *Structure of rings*, *Amer. Math. Soci. Colloq. Publ.*, 37(1956).