



论文

轴向变刚度矩形截面梁的弹性及弹塑性弯曲[†]

聂国隽, 徐敏, 仲政*

同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092

* 联系人, E-mail: zhongk@tongji.edu.cn

† 仲政编委供稿

收稿日期: 2010-08-15; 接受日期: 2010-10-20

国家自然科学基金(批准号: 10872150, 11072177)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20070247029)和广西大学工程防灾与结构安全省部共建教育部重点实验室开放课题资助项目

摘要 假定矩形截面梁的材料为非均匀的各向同性的理想弹塑性材料, 其弹性模量、屈服强度以及梁的高度均是梁轴向坐标的函数, 忽略剪切对变形及屈服的影响, 在小变形前提下研究轴向变刚度梁的弹性及弹塑性弯曲问题. 导出了截面高度及材料的弹性模量沿梁长度方向按照特殊函数变化时梁弹性及弹塑性变形的解析解. 采用微分求积法实现了抗弯刚度任意变化时变刚度梁的弹性及弹塑性分析. 通过数值算例分析了抗弯刚度的轴向变化对梁弹性及弹塑性性能的影响.

关键词 变刚度梁, 弹性, 弹塑性, 精确解, 微分求积法

PACS: 46.70.De, 62.20.Fe, 02.60.Cb

抗弯刚度沿空间位置而变化的梁通常称为变刚度梁. 引起梁刚度变化的因素主要包括两个方面, 一是几何参数的变化导致梁刚度变化, 即通常所指的变截面梁; 二是材料参数的变化引起梁刚度变化, 如: 功能梯度材料、纤维增强复合材料等非均质材料制成的梁. 其中, 变截面梁已被广泛应用于航空、航天、土木、机械等工程领域, 而材料参数的空间变化是由于复合材料的应用为结构刚度改变提供的另一种可能, 这种由材料性能的空间变化而形成的变刚度结构具有良好的可设计性, 因而, 得到了国内外许多学者的关注.

在变截面梁弹性分析方面, 目前已有大量研究成果. 例如: 李银山和杨维阳^[1]研究了变截面梁的变形, 给出了宽度和高度随轴向坐标线性变化时简支梁和悬臂梁变形的解; 朱先奎^[2]利用 Heaviside 函数, 将梁抗弯刚度沿轴向的任意变化简化为阶梯刚度,

导出了任意变刚度梁变形的一种通用方程; 李学军等人^[3]建立了一种适用于轴向变刚度超静定梁弹性分析的通用力学模型. 在功能梯度梁的弹性分析方面, 仲政等人^[4-6]假定功能梯度材料的弹性模量沿梁截面高度梯度变化, 提出了等截面梁弹性分析的解析解; Lu^[7]等给出了弹性模量沿梁轴向及截面高度方向双向梯度变化时功能梯度等截面梁弹性问题的半解析解; Benatta 等人^[8]研究了沿梁高度方向变纤维间距的复合材料短梁的平面弯曲问题; 张靖华等人^[9]考虑梁横截面尺寸和材料参数沿长度梯度变化, 应用微分求积法分析了变截面功能梯度梁的弹性弯曲. 在变刚度梁的弹塑性分析方面, Fertis 和 Taneja^[10]采用试算法研究了轴向变刚度梁的弹塑性行为; 聂国隽等人^[11]假定弹性模量与屈服强度沿梁高度方向按照指数函数变化, 导出了功能梯度材料纯弯曲梁弹塑性问题的解析解. 与弹性分析相比, 变刚度梁的弹

塑性分析方面的研究成果还较少, 特别是精确解较难得到, 而弹塑性分析对于减轻结构重量及充分利用材料的屈服后强度等都是十分必要的. 鉴于此, 本文将在小变形前提下对轴向变刚度梁的弹性及弹塑性弯曲问题进行研究.

1 问题的描述

1.1 基本假设

考虑一矩形截面变刚度梁, 如图 1 所示, 其截面宽度为 b , 高度 $h(x)$ 沿梁轴线方向按照任意函数形式变化. 梁的材料为非均匀的各向同性的理想弹塑性材料, 拉伸与压缩具有相同的性能, 且不考虑剪切对变形及屈服的影响. 在变形过程中梁符合平截面假定和小挠度假定. 梁的截面高度及抗弯刚度可表示为

$$h(x) = h_0 g(x), \quad E(x)I(x) = E_0 I_0 f(x)g^3(x), \quad (1)$$

式中, h_0 和 E_0 为常数, 分别表示截面高度和材料弹性模量的参考值. $I_0 = \frac{1}{12}bh_0^3$ 为梁截面惯性矩的参考值. $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别表示弹性模量和截面高度沿梁长度的变化规律, 可取任意函数形式. 进一步假设材料的屈服强度沿梁长度方向任意变化, 即

$$\sigma_s(x) = \sigma_{s0}s(x). \quad (2)$$

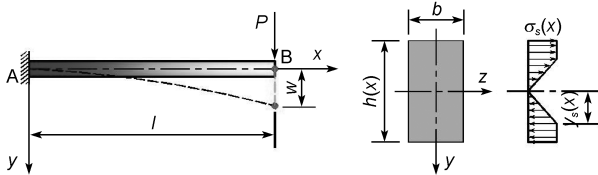


图 1 矩形截面变刚度梁及其弹塑性应力分布

1.2 基本方程

当变刚度梁处于弹性变形状态时, 梁上任一点的挠度 w 用 w_e 表示, 则挠曲线近似微分方程可表示为

$$\frac{d^2 w_e}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E(x)I(x)}, \quad (3)$$

其中, $M(x)$ 为截面弯矩. 对上式积分两次可得

$$w_e = \frac{1}{E_0 I_0} \int \left[-\int \frac{M(x) dx}{f(x)g^3(x)} \right] dx + C_1 \int dx + C_2, \quad (4)$$

式中, C_1 和 C_2 是积分常数, 由梁两端的边界条件确定. 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以及截面弯矩方程 $M(x)$ 为某些特殊函数时, 求解上式可得出梁弹性变形的解析解, 对于其他复杂情况可采用数值方法进行求解.

随着梁上外载荷的增加, 梁截面弯矩将逐渐增大, 当某一截面的弯矩等于其弹性极限弯矩时, 梁进入弹性极限状态. 对于矩形截面变刚度梁, 其弹性极限弯矩 M_e 是梁轴向坐标的函数, 即

$$M_e(x) = \frac{1}{6}bh_0^2\sigma_{s0}g^2(x)s(x), \quad (5)$$

随着外载荷的进一步增加, 梁将从弹性极限状态进入到弹塑性变形状态. 对于弹塑性变形梁的弹性区段, 挠度仍然满足(4)式所示的基本方程. 对于梁长度方向的塑性区内的任一截面 x , 一般情况下, 这个横截面上既有弹性区也有塑性区, 在截面的弹性区内, 弯曲正应力呈线性分布; 在截面的塑性区内, 弯曲正应力等于屈服应力, 如图 1 所示. 设 x 截面处弹性区和塑性区的交界线为 $y_s(x)$, 根据交界线上应力已达屈服强度, 可得梁塑性区段的挠曲线微分方程为

$$\frac{d^2 w_p}{dx^2} = -\frac{\sigma_s(x)}{E(x)y_s(x)}, \quad (6)$$

上式中, w_p 表示梁塑性区的挠度, $y_s(x)$ 可根据截面上内外弯矩的平衡条件而得出, 即

$$\left(\frac{I_1(x)}{y_s(x)} + S_1(x) \right) \sigma_s(x) = M(x), \quad (7)$$

式中, $I_1(x)$ 表示截面上弹性区对 z 轴的惯性矩, $S_1(x)$ 表示塑性区对 z 轴静矩的绝对值之和. 对于矩形截面梁, 求解(7)式可得 $y_s(x)$ 为

$$y_s(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}h(x)\sqrt{1 - \frac{M(x)}{M_p(x)}}, \quad (8)$$

上式中, $M_p(x) = \frac{1}{4}bh_0^2\sigma_{s0}g^2(x)s(x)$ 为矩形截面梁的塑性极限弯矩.

将(8)式代入(6)式可得梁塑性区变形需满足的基本方程为

$$\frac{d^2 w_p}{dx^2} = -\frac{2\sqrt{3}\sigma_s(x)}{3E(x)h(x)} \left(1 - \frac{M(x)}{M_p(x)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

对上式积分两次可得

$$w_p = \frac{\sigma_{s0}}{E_0 h_0} \int \left\{ - \int \left[\frac{2\sqrt{3}s(x)}{3f(x)g(x)} \left(1 - \frac{M(x)}{M_p(x)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx \right\} dx + D_1 \int dx + D_2, \quad (10)$$

式中, D_1 和 D_2 是积分常数. 对于弹塑性变形梁, 其挠曲线需联立(4)和(10)式进行求解, 因此(4)式中的积分常数 C_1 和 C_2 以及(10)式中的 D_1 和 D_2 由梁两端的边界条件以及沿梁长度方向弹、塑性区交界处的连续性条件确定. 在(10)式中, 当 $f(x)$, $g(x)$, $s(x)$ 以及 $M(x)$ 为某些特殊函数时, 可通过积分得出变刚度梁塑性变形的解析解, 其他情况下(10)式可采用数值方法加以求解.

由于沿梁长度方向的弹性区和塑性区的变形需满足的基本方程不同, 因此, 求解变刚度梁的弹塑性变形时, 需首先确定梁轴向弹、塑性区分界点的坐标 x_{ep} . 令

$$M(x_{ep}) - M_e(x_{ep}) = 0, \quad (11)$$

求解(11)式可得 x_{ep} , 则确定了弹性区和塑性区沿梁轴向的分布. 给定变刚度梁的截面弯矩 $M(x)$, 由(8)式和(11)即可确定塑性沿梁长度和截面高度的扩展深度, 即 x_{ep} 和 $y_s(x)$.

下面首先给出梁截面高度及材料的弹性模量、屈服强度按照某些特殊函数变化时变刚度梁弹性及弹塑性变形的解析解, 对于抗弯刚度沿梁轴向任意变化的情况则采用数值方法——微分求积法(Differential quadrature method, DQM)进行求解.

2 问题的求解

2.1 弹性分析

2.1.1 截面高度线性变化的均匀材料梁

设变刚度梁的截面高度沿梁长度方向线性变化, 而材料的弹性模量保持常量, 即

$$g(x) = 1 - \lambda_1 \frac{x}{l}, \quad (12a)$$

$$f(x) = \text{const.} \quad (12b)$$

式中, $0 \leq \lambda_1 < 1$ 为常数. 将(12)式代入(4)式, 直接积分可得变截面梁挠度的精确表达式. 对于左端固定的悬臂梁, 右端集中载荷 P 作用下的挠度为

$$w_e(x) = - \frac{6Pl^2 [\lambda_1(\lambda_1 + 1)x + 2l \ln(l - \lambda_1 x) + t_2]}{t_1} + \frac{6Pl^4(\lambda_1 - 1)}{t_1(l - \lambda_1 x)}, \quad (13)$$

其中, $t_1 = 12E_0 I_0 \lambda_1^3$, $t_2 = (\lambda_1 - 1)l - 2l \ln l$. 从(13)式可知, 梁的挠度是截面高度的变化参数 λ_1 的函数, 通过合理选择 λ_1 的值, 可有效地提高梁的刚度. 在(13)式中, 当 $\lambda_1 \rightarrow 0$ 时, 挠度的极限为

$$w_0(x) = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} w_e(x) = \frac{Px^2(3l - x)}{6E_0 I_0}, \quad (14)$$

上式即为均匀各向同性材料等截面梁的挠度表达式, 与材料力学书中给出的解答一致.

2.1.2 截面高度指数变化的均匀材料梁

设变刚度梁的截面高度沿梁长度方向按照指数函数变化, 且材料的弹性模量为常数, 即

$$g(x) = \exp\left(\alpha_1 \frac{x}{l}\right), \quad (15a)$$

$$f(x) = \text{const.} \quad (15b)$$

式中, α_1 为常数. 将(15)式代入(4)式, 直接积分可得端部集中载荷 P 作用下变刚度悬臂梁挠度的精确解:

$$w_e(x) = \frac{4Pl^2}{t_3} [3(3\alpha_1 - 1)\alpha_1 x + (2 - 3\alpha_1)l] + \frac{4Pl^2}{t_3} [3\alpha_1(l - x) - 2l] \exp\left(-\frac{3\alpha_1}{l}x\right), \quad (16)$$

其中, $t_3 = 108E_0 I_0 \alpha_1^3$. 在(16)式中, 当 $\alpha_1 \rightarrow 0$ 时, 挠度的极限与均匀材料等截面梁的挠度表达式一致, 如(14)式所示.

2.1.3 截面高度抛物线变化的均匀材料梁

设变刚度梁的截面高度按照抛物线形式变化, 且材料的弹性模量保持不变, 即

$$g(x) = 1 - \beta_1 \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right)^2, \quad (17a)$$

$$f(x) = \text{const.} \quad (17b)$$

式中, $\beta_1 \geq 0$ 为常数. 同样将(17)式代入(4)式, 直接积分可得均布载荷 q 作用下简支梁挠度的表达式. 下面给出 $\beta_1 = 1$ 时的简支梁挠度:

$$w_e(x) = \frac{9ql^6}{4t_4(3l^2 + 4lx - 4x^2)}$$

$$+\frac{21ql^3}{32t_4}(2x-l)\arctan\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)-\frac{12.4646ql^4}{32t_4}, \quad (18)$$

其中, $t_4 = 12E_0I_0$. 当 β_1 为任意值时, 挠度的表达式非常复杂, 在此省略. 当 $\beta_1 \rightarrow 0$ 时, 由挠度的极限同样可得到均匀各向同性等截面简支梁的挠度表达式.

2.1.4 弹性模量线性变化的等截面梁

设变刚度梁的材料弹性模量沿梁长度方向线性变化, 而截面高度保持不变, 即

$$f(x) = 1 - \lambda_2 \frac{x}{l}, \quad (19a)$$

$$g(x) = \text{const.} \quad (19b)$$

式中, $0 \leq \lambda_2 < 1$ 为常数. 将(19)式代入(4)式, 直接积分可得左端固定的悬臂梁在端部集中载荷 P 作用下的挠度:

$$w_e(x) = \frac{6Pl}{t_5} \left\{ 2l(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 x - l) [\ln l - \ln(l - \lambda_2 x)] + 2l(\lambda_2 - 1)\lambda_2 x + \lambda_2^2 x^2 \right\}, \quad (20)$$

其中,

$$t_5 = 12E_0I_0\lambda_2^3.$$

从(20)式可知, 梁的挠度是材料弹性模量变化参数 λ_2 的函数, 通过合理选择 λ_2 的值, 可有效地控制梁的变形. 同样, 在(20)式中, 当 $\lambda_2 \rightarrow 0$ 时, 挠度的极限为(14)式所示的均匀材料等截面梁的挠度表达式.

2.1.5 弹性模量指数变化的等截面梁

设材料的弹性模量沿梁长度方向按照指数函数变化, 而截面高度保持不变, 即

$$f(x) = \exp\left(\alpha_2 \frac{x}{l}\right), \quad (21a)$$

$$g(x) = \text{const.} \quad (21b)$$

式中, α_2 为常数. 将(21)式代入(4)式, 直接积分可得端部集中载荷 P 作用下变刚度悬臂梁的挠度:

$$w_e(x) = \frac{12Pl^2}{t_6} \left\{ (\alpha_2 - 1)\alpha_2 x + [(\alpha_2 - 2)l - \alpha_2 x] \times \exp\left(-\frac{\alpha_2}{l}x\right) + (2 - \alpha_2)l \right\}, \quad (22)$$

其中, $t_6 = 12E_0I_0\alpha_2^3$. 在(22)式中, 当 $\alpha_2 \rightarrow 0$ 时, 挠度的极限如(14)式所示.

2.1.6 弹性模量指数变化且截面高度线性变化的梁

设材料的弹性模量沿轴向按照指数函数变化且变刚度梁的截面高度按照线性变化, 即

$$f(x) = \exp\left(\alpha_2 \frac{x}{l}\right), \quad (23a)$$

$$g(x) = 1 - \lambda_1 \frac{x}{l}, \quad (23b)$$

将(23)式代入(4)式, 直接积分可得挠度的表达式. 对于左端固定的悬臂梁在端部集中载荷 P 作用下的挠度为

$$w_e(x) = \frac{Pl^2}{E_0I_0\lambda_1^3\alpha_2^2} [w_1(x) - w_2(x) + w_3], \quad (24)$$

其中

$$w_1(x) = \alpha_2 \lambda_1^2 x + \alpha_2^2 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) \exp\left(-\frac{\alpha_2}{\lambda_1}\right) \text{Ei}\left(\frac{\alpha_2}{\lambda_1}\right) x,$$

$$w_2(x) = [\alpha_2 (\lambda_1 - 1) - \lambda_1] \lambda_1 l \exp\left(-\frac{\alpha_2 x}{l}\right) + \alpha_2^2 (\lambda_1 - 1) \exp\left(-\frac{\alpha_2}{\lambda_1}\right) \text{Ei}\left(\frac{\alpha_2}{\lambda_1} - \frac{\alpha_2 x}{l}\right) (\lambda_1 x - l),$$

$$w_3 = \lambda_1 [\alpha_2 (\lambda_1 - 1) - \lambda_1] l - \alpha_2^2 (\lambda_1 - 1) l$$

$$\times \exp\left(-\frac{\alpha_2}{\lambda_1}\right) \text{Ei}\left(\frac{\alpha_2}{\lambda_1}\right).$$

Ei(z) 表示指数积分函数. 在(24)式中, 当 $\alpha_2 \rightarrow 0$ 及 $\lambda_1 \rightarrow 0$ 时, 挠度取极限仍可以得到(14)式的表达式.

对于其他形式的梁, 如简支梁、多跨静定梁等, 若其弯矩方程较为简单时, 同样可以通过积分或分段积分的方式得到抗弯刚度具有特殊变化时变刚度梁挠度的解析解.

2.2 弹塑性分析

当变刚度梁进入弹塑性变形状态, 可根据(8)和(11)式确定塑性沿梁长度及截面高度的扩展深度, 并根据(4)和(10)式获得弹、塑性区段梁的挠度. 下面首先给出弹性模量线性变化时变刚度梁塑性变形的解析解, 对于梁截面高度和弹性模量的其他变化形式, 采用一种高效的数值方法——微分求积法实现梁的弹性及弹塑性分析.

2.2.1 弹性模量线性变化时等截面梁的塑性变形

变刚度梁的材料弹性模量和截面高度符合(19)

式所示的变化, 且材料的屈服强度保持常数时, 由(10)式可得端部集中载荷 P 作用下悬臂梁的塑性区变形为

$$w_p(x) = D_1 + D_2 x - \frac{T_1(x)}{T_2(x)}, \quad (25)$$

式中, D_1 和 D_2 为积分常数, 需根据边界条件及弹、塑性区交界处的连续性条件确定,

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 4\sigma_{s0}l \left\{ -z_1 z_2^2(x) + P(\lambda_2 x - l)z_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \arctan[\lambda_2 z_2(x)/z_1] \right\}, \\ z_1 &= \sqrt{(\lambda_2 - 1)\lambda_2 Pl - \lambda_2^2 M_p}, \\ T_2(x) &= \sqrt{3/M_p} E_0 h_0 P \lambda_2 z_1 z_2(x), \\ z_2(x) &= \sqrt{(x-l)P + M_p}. \end{aligned}$$

2.2.2 抗弯刚度任意变化时梁的弹塑性变形

若变刚度梁的抗弯刚度沿梁长度方向按照任意函数变化, 梁弹性及塑性变形的基本方程式(4)和(10)无法通过直接积分的方法求得其解析解, 为此, 采用微分求积法给出数值解。

微分求积法是求解微分方程的有效数值方法, 其基本原理是: 采用某一函数在物理域上所有离散点的函数值的加权和来逼近该函数在某一离散点的偏导数或积分。考虑一维函数 $\varphi(\xi)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 则函数 $\varphi(\xi)$ 的 r 阶偏导数在第 i 个离散点的微分求积法逼近公式为^[12-13]

$$\left. \frac{\partial^r \varphi(\xi)}{\partial \xi^r} \right|_{\xi_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} \varphi(\xi_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (26)$$

式中: N 为网点总数, ξ_i 是网点的坐标值, $\varphi(\xi_j)$ 是函数在该离散点的值。 $A_{ij}^{(r)}$ 是 r 阶导数的权系数矩阵, 其表达式为

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{v=1, v \neq i}^N A_{iv}^{(r)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad 1 \leq r \leq N-1. \quad (27a)$$

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{v=1, v \neq i}^N (\xi_i - \xi_v)}{(\xi_i - \xi_j) \prod_{v=1, v \neq j}^N (\xi_j - \xi_v)}, \quad (27b)$$

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{\xi_i - \xi_j} \right], \quad (27c)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i; \quad 2 \leq r \leq N-1.$$

常用的积分网点有等间距点和不等间距网点, 即

$$\xi_i = \frac{i-1}{N-1}, \quad (28a)$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N-1} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (28b)$$

采用微分求积法实现变刚度梁弹塑性分析时, 需首先将各物理量无量纲化, 令 $\xi = \frac{x}{l}$, $W_e = \frac{w_e}{l}$, $W_p = \frac{w_p}{l}$, $H = \frac{h}{l}$, $B = \frac{b}{l}$, $\bar{E} = \frac{E}{E_0}$, $\bar{\sigma}_s = \frac{\sigma_s}{E_0}$, $\bar{M} = \frac{M}{E_0 l^3}$, $\bar{M}_p = \frac{M_p}{E_0 l^3}$. (3)和(9)式进行微分求积离散, 可得如下结果。

弹性区:

$$\sum_{j=1}^{N_1} A_{ij}^{(2)} W_{ej} = - \frac{12 \bar{M}(\xi_i)}{\bar{E}(\xi_i) B H^3(\xi_i)}, \quad (29a)$$

塑性区:

$$\sum_{j=1}^{N_2} A_{ij}^{(2)} W_{pj} = - \frac{2\sqrt{3}\bar{\sigma}_s(\xi_i)}{3\bar{E}(\xi_i)H(\xi_i)} \left[1 - \frac{\bar{M}(\xi_i)}{\bar{M}_p(\xi_i)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (29b)$$

上式中, $A_{ij}^{(2)}$ 表示二阶导数的权系数, N_1 和 N_2 分别表示弹性区和塑性区的网点总数。将边界条件及弹、塑性区的连续性条件做同样的微分求积离散后, 可联立求解得到变刚度梁上各离散点的位移。

3 算例分析

算例一: 取一左端固定、右端自由的悬臂梁, 其截面高度沿梁长度方向按照线性变化且材料的弹性模量按照指数函数变化, 如(23)式所示, 梁的几何及载荷参数分别为: $l=1000$ mm, $b=100$ mm, $P=100$ kN, 悬臂端截面高度、弹性模量及屈服强度分别为 $h=200$ mm, $E=2.06 \times 10^5$ MPa 及 $\sigma_{s0}=235$ MPa. 当截面高度及弹性模量的变化参数 λ_1 及 α_2 取不同的值时, 梁的弹性变形如图 2 所示。图 2 中“0, 0”, “0.2, -0.2”等分别表示 λ_1 及 α_2 取此值时的精确解, “DQM”表示 $\lambda_1=0.2$, $\alpha_2=-0.2$ 时微分求积法的计算结果, 此处采用 11 个等间距的网点。从图 2 可知, 随着截面

高度及材料弹性模量从悬臂端向固定端的逐渐增大, 梁的最大挠度将逐渐减小, 且截面高度的改变对梁挠度的影响大于弹性模量变化的影响. 通过合理调整梁抗弯刚度沿轴向的变化, 可有效地控制梁的变形. 微分求积法计算结果与精确解非常接近, 验证了该法用于变刚度梁弹性分析的正确性.

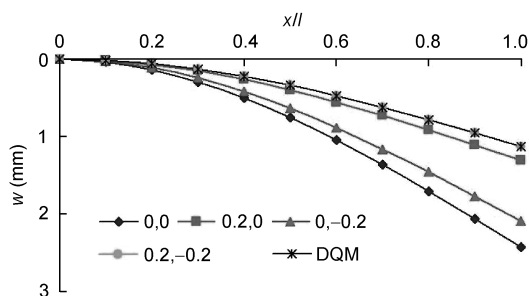


图 2 变刚度悬臂梁的弹性曲线

算例二: 考虑一变刚度悬臂梁, 其弹性模量沿梁轴向线性变化而截面高度及屈服强度为常数, 即 $f(x) = 1 - \lambda_2 \frac{x}{l}$, $g(x) = 1$ 及 $s(x) = 1$, 其他几何及材料参数同算例一, 对其进行弹塑性分析.

首先求得这一变刚度悬臂梁的弹性极限弯矩为: $M_e = 156.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$. 当梁的最大弯矩为其弹性极限弯矩的不同倍数时, 根据(8)和(11)式可得梁弹、塑性区沿梁截面高度及轴线方向的分布, 如图 3 所示. 从图 3 可知, 随着载荷的逐渐增大, 塑性将沿梁截面高度及轴向扩展. 然而, 变刚度梁弹、塑性区的分布仅与外载荷和屈服强度、截面高度及其变化形式有关, 与材料弹性模量的变化参数 λ_2 无关.

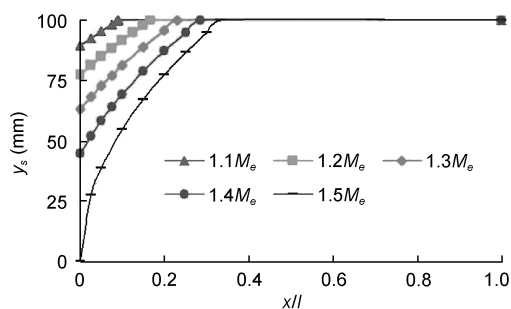


图 3 变刚度悬臂梁的弹、塑性区分布

悬臂梁进入弹塑性变形阶段的挠度可采用(20)和(25)式计算. 当 $\lambda_2 = 0.2$ 和 0.5 时, 悬臂端位移与载

荷的关系曲线如图 4 所示. 图 4 中, P_e 表示弹性极限载荷. 从图 4 可知, λ_2 取不同值时, 相同载荷下悬臂端的挠度相差较大, 因此, 通过合理选取弹性模量沿梁长度的变化参数, 可利用材料的非均匀性而提高梁的刚度.

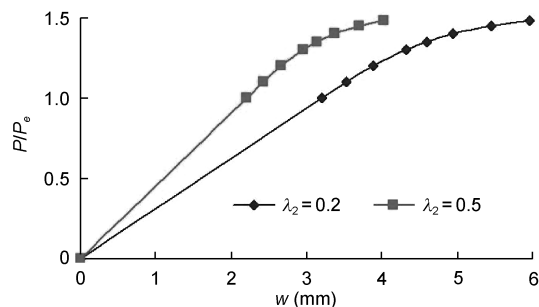


图 4 变刚度悬臂梁悬臂端的荷载位移曲线

当弹性模量的变化参数 $\lambda_2 = 0.2$ 以及悬臂端载荷为 $1.4P_e$ 时, 采用 DQM 及解析法计算了变刚度悬臂梁的弹塑性变形, 如图 5 所示. 图 5 中, “7+7”和“9+9”分别表示弹性区和塑性区的微分求积网点数, 即 N_1 和 N_2 . “exact”表示由式(20)和(25)所得的精确解. 从图中可知, DQM 计算结果与精确解非常吻合, 充分说明了 DQM 的正确性. 同时, 采用 14 个网点和 18 个网点所得结果一致, 反映了 DQM 的收敛性. DQM 不仅可用于抗弯刚度及材料的屈服强度具有特殊变化的情况, 而且可用于任意变刚度梁的弹性及塑性分析.

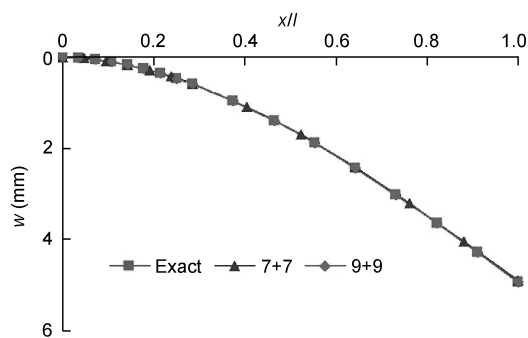


图 5 当载荷为 $1.4P_e$ 时变刚度悬臂梁的弹塑性变形

若屈服强度沿梁轴线方向变化时, 例如 $s(x) = 1 - 0.2 \frac{x}{l}$, 根据式(5)可知, 梁的弹性极限弯矩是梁轴

向坐标的函数, 其最大值发生在梁的固定端, 即 $M_{e\max} = 195.83 \text{ kN m}$. 进一步根据式(8)和(11)可确定塑性沿梁长度和截面高度的扩展深度, 结果如图6所示. 图6中“ $1.3M_e$ (或 $1.5M_e$)”和“ $1.3M_e-s(x)$ (或 $1.5M_e-s(x)$)”分别表示屈服强度为常量和线性变化时, 不同倍数的弹性极限弯矩作用下梁的弹、塑性区分布情况. 由图6可知, 屈服强度沿梁轴向方向的变化对梁的塑性扩展有较大影响, 在相同倍数的弹性极限弯矩作用下, 屈服强度线性变化时塑性沿梁轴向方向的扩展长度大于屈服强度为常量时的情况.

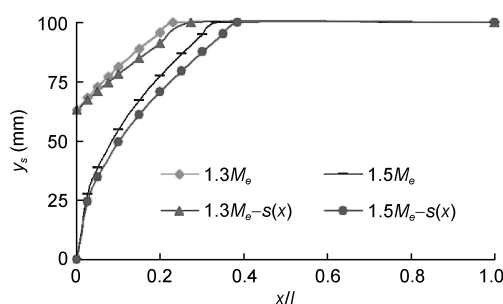


图6 屈服强度具有不同变化形式时变刚度悬臂梁的塑性扩展

4 讨论

上述针对理想弹塑性材料模型所建立的变刚度梁弹塑性分析的方法可进一步推广至其他的弹塑性

材料模型, 如线性硬化材料等. 对于线性硬化材料组成的变刚度梁, 其弹性区和塑性区的挠曲线近似微分方程同样如(3)和(6)式所示, 而某一截面上的弹性区和塑性区的交界线位置 $y_s(x)$ 根据(7)式计算, (7)式中 $S_1(x)$ 与材料硬化参数有关. 采用与上述相同的方法可进一步深入研究由线性硬化材料组成的轴向变刚度梁的弹性及弹塑性弯曲问题.

5 结论

假定矩形截面梁的高度、材料的弹性模量及屈服强度是梁轴向坐标的任意函数, 在小变形前提下研究了变刚度梁的弹性及弹塑性弯曲问题. 给出了截面高度、弹性模量按照特殊函数变化时变刚度梁弹性及弹塑性变形的解析解. 梁抗弯刚度沿轴线方向任意变化时, 采用微分求积法进行分析. 研究表明, 通过合理调整梁抗弯刚度沿长度方向的变化, 可充分利用变截面及材料非均匀性减小梁的最大挠度, 且截面高度的改变对梁挠度的影响大于弹性模量变化的影响. 变刚度梁的弹、塑性区沿梁长度及截面高度的分布仅与外载荷和屈服强度、截面高度及其变化形式有关, 而与材料弹性模量的变化无关. 微分求积法计算结果与精确解的比较说明了这一方法应用于变刚度梁弹性及弹塑性分析的正确性和有效性. 研究成果为实际工程中轴向变刚度梁的弹塑性分析及设计提供了一定的条件.

参考文献

- 1 李银山, 杨维阳. 变惯矩梁变形的函数解. 力学与实践, 1992, 14(2): 55-57
- 2 朱先奎. 任意变刚度梁变形的通用方程. 力学与实践, 1993, 15(3): 58-60
- 3 Li X J, Zhu P Y, Liu Y L. Computerized solution of statically indeterminate beams with varying flexural rigidity under complex load (in Chinese). Eng Mech, 2003, 20(4): 116-121 [李学军, 朱萍玉, 刘义伦. 复杂载荷下变刚度静不定梁程序化求解. 工程力学, 2003, 20(4): 116-121]
- 4 Zhong Z, Yu T. Analytical bending solution of functionally graded cantilever-beam (in Chinese). J Tongji Univ Nat Sci, 2006, 34: 413-447 [仲政, 于涛. 功能梯度悬臂梁弯曲问题的解析解. 同济大学学报, 2006, 34: 413-447]
- 5 Zhong Z, Yu T. Two-dimensional analysis of functionally graded beams. AIAA J, 2006, 44: 3160-3164
- 6 Zhong Z, Yu T. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. Compos Sci Tech, 2007, 67: 481-488
- 7 Lu C F, Chen W Q, Xu R Q, et al. Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams. Int J Solids Struct, 2008, 45: 258-275
- 8 Benatta M A, Tounsi A, Mechab I, et al. Mathematical solution for bending of short hybrid composite beams with variable fibers spacing. Appl Math Comput, 2009, 212: 337-348
- 9 Zhang Q H, Gong Y. Bending of functionally graded beam with variable cross-sections by differential quadrature method (in Chinese). J Gansu Sci, 2010, 22(1): 14-17 [张靖华, 龚云, 李世荣. 微分求积法求解变截面功能梯度梁的弯曲问题. 甘肃科学学报, 2010, 22(1): 14-17]

- 14–17]
- 10 Fertis D G, Taneja R. Inelastic analysis of variable stiffness members. *Math Comput Model*, 1990, 14: 942–946
- 11 Nie G J, Kang J W. Exact elastoplastic analysis of a functionally graded beam subjected to pure bending (in Chinese). *J Guangxi Univ Nat Sci*, 2009, 34(1): 28–32 [聂国隽, 康继武, 仲政. 功能梯度纯弯曲梁弹塑性问题的解析解. *广西大学学报: 自然科学版*, 2009, 34(1): 28–32]
- 12 Wang X W. Differential quadrature in the analysis of structural components (in Chinese). *Adv Mech*, 1995, 25(2): 232–240 [王鑫伟. 微分求积法在结构力学中的应用. *力学进展*, 1995, 25(2): 232–240]
- 13 Bert C W, Malik M. The differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Appl Mech Rev*, 1996, 49: 1–28

Elastic and elasto-plastic bending of rectangular beams with variable stiffness along axial direction

NIE GuoJun, XU Min & ZHONG Zheng^{*}

School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China

Suppose that the beam with rectangular cross section is composed of an inhomogeneous, isotropic and ideally elasto-plastic material and the elastic modulus, yield limit of the material and the height of the beam, respectively, vary arbitrarily with the axial coordinate. The elastic and elasto-plastic bending of beams with variable stiffness is investigated under the framework of small deformation theory and regardless of the shear deformation. Exact solutions are presented for the elastic and elasto-plastic deformations of beams with bending stiffness having special variations along the axial direction. Differential quadrature method is employed to study the elastic and elasto-plastic bending of beams with arbitrarily variable stiffness. The influence of variable stiffness on the elastic and plastic performances of the beam is discussed through numerical examples.

variable stiffness beam, elasticity, elasto-plasticity, exact solutions, differential quadrature method

PACS: 46.70.De, 62.20.Fe, 02.60.Cb

doi: 10.1360/132010-802