



齐性动力系统的有界轨道

献给钱敏教授 90 华诞

安金鹏^{1*}, 关力凡²

1. 北京大学数学科学学院, 北京 100871;

2. 北京大学北京国际数学研究中心, 北京 100871

E-mail: anjinpeng@math.pku.edu.cn, guanlifan@pku.edu.cn

收稿日期: 2017-07-26; 接受日期: 2017-09-11; 网络出版日期: 2017-09-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11322101) 资助项目

摘要 齐性动力系统是由李群给出的一类特殊动力系统, 与 Diophantine 逼近等数论方向有着紧密的联系. 本文概述关于齐性动力系统有界轨道的主要问题和结果, 并介绍它们与 Oppenheim 猜想、Littlewood 猜想和 Schmidt 猜想等 Diophantine 逼近问题的关系.

关键词 齐性动力系统 有界轨道 Diophantine 逼近

MSC (2010) 主题分类 37A17, 11J83

1 引言

齐性动力系统是一类特殊的动力系统, 所在的空间为李群的齐性空间, 动力系统由群运算诱导而成. 具体地, 设 G 是李群¹⁾, Γ 是 G 的闭子群, 并考虑齐性空间 $X = G/\Gamma$. 齐性动力系统关注 G 的另一子群 H 在 X 上自然的平移作用, 研究这一群作用的轨道和不变测度的性质, 并考察当 H 中的群元素趋于无穷远时群作用的渐近行为. 这样产生的动力系统包含若干经典的实例, 如常负曲率曲面的测地流和极限圆流等.

在对齐性动力系统的研究中, 结合李群与动力系统的方法, 可以得到比一般动力系统更好的性质. 例如, Ratner 定理表明, 对于幂么的齐性动力系统, 轨道的闭包均为具有代数性质的子流形, 不变测度也可以从代数的角度来分类 (参见文献 [1]). 对于其他一些重要的情形, 人们也猜想并部分证明了类似的结果成立 (参见文献 [2–5]). 另一方面, 适当的子群 Γ (如 $SL_n(\mathbb{Z})$) 可以包含丰富的算术信息, 相应的动力系统与数论有着紧密的联系. 例如, 在 Diophantine 逼近方面, 以齐性动力系统为工具, Margulis^[6,7] 证明了 Oppenheim 猜想; Kleinbock 和 Margulis^[8] 证明了 Sprindžuk 猜想; Einsiedler 等^[9] 对 Littlewood 猜想做出了重要的推进; Shah^[10] 对 Dirichlet 定理的可改进性也证明了重要的结果. 在代数数论和解析数论等领域, 齐性动力系统也得到了重要的应用, 参见文献 [11–15] 等.

¹⁾ 本文中的李群指实李群. 齐性动力系统也关注其他拓扑群 (如 p -adic 李群) 的情形, 但在这里暂不涉及.

英文引用格式: An J P, Guan L F. Bounded orbits of homogeneous dynamics (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1623–1634, doi: 10.1360/N012017-00168

对于重要的情形, 子群 H 在空间 X 上的平移作用一般是遍历的. 这时, 空间 X 中具有非稠密 H -轨道的点构成零测集. 但是, 正是这些非稠密轨道反映了动力系统的复杂性, 并且体现了与数论问题的联系. 在对非稠密轨道的研究中, 有界轨道、发散轨道、闭包或极限集与取定子集不相交的轨道等几种轨道类型都得到了广泛的关注.

本文简要综述齐性动力系统有界轨道方面的主要问题和结果及其与 Diophantine 逼近的联系. 第 2 节介绍齐性动力系统的一般框架. 第 3–5 节按照子群 H 的不同类型, 分别讨论幂么系统、多参数可对角化系统、单参数可对角化系统的有界轨道的性质, 并介绍它们与 Oppenheim 猜想、Littlewood 猜想和 Schmidt 猜想等 Diophantine 逼近问题的关系. 关于发散轨道等其他类型非稠密轨道的研究进展, 可以参见文献 [16–18] 等.

2 齐性动力系统的框架

设 G 是连通李群, Γ 是 G 的闭子群, 并在齐性空间 $X = G/\Gamma$ 上赋予自然的光滑流形结构. 如果 $g \in G$, 则 G 的循环子群 $\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ 在 X 上的平移作用诱导了离散动力系统

$$\mathbb{Z} \times X \rightarrow X, \quad (n, x) \mapsto g^n x.$$

类似地, 如果 ξ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 中的元素, 则单参数子群 $\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\}$ 诱导了流

$$\mathbb{R} \times X \rightarrow X, \quad (t, x) \mapsto \exp(t\xi)x.$$

更一般地, 齐性动力系统研究 G 的任一个子群 H 在 X 上的平移作用

$$H \times X \rightarrow X, \quad (h, x) \mapsto hx$$

生成的动力系统, 考察它的轨道和不变测度等性质.

为了得到深刻的动力系统性质, 我们需要对子群 H 和 Γ 的选取加以限制. 首先, 我们希望 H 中的元素可以趋于无穷远, 从而考察群作用的渐近行为. 于是, 假设:

(1) H 是 G 的非紧闭子群 (从而 G 也非紧).

另一方面, 在很大程度上, H -作用的非平凡动力系统性质是由 Γ 的不连通性导致的. 为了简化条件, 假设:

(2) Γ 是 G 的离散子群.

此外, 为了应用遍历论中的方法和结果, 我们还假设:

(3) Γ 的陪集空间 X 上存在 G -不变的 Borel 概率测度 μ_X (称为 Haar 测度, 存在时必唯一).

满足条件 (2) 和 (3) 的子群 Γ 称为 G 的格点子群 (lattice). 如果空间 X 是紧的, 则称 Γ 为余紧的 (cocompact); 否则, 称 Γ 为非余紧的 (non-cocompact). 如果 X 的子集 E 的闭包是紧集, 则称 E 为有界集. 本文重点讨论 X 中的有界 H -轨道. 这只在 Γ 非余紧时才有非平凡的意义.

我们给出格点子群的两个基本例子.

例 2.1 加法群 $\mathbb{R}^n$ 的子群 $\mathbb{Z}^n$ 是余紧格点子群. 事实上, 空间 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 同胚于 n 维环面.

例 2.2 设 $n \geq 2$. 特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 的子群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 是非余紧格点子群. 本文记

$$X_n = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}). \quad (2.1)$$

关于空间 X_n 上不变概率测度的存在性, 参见文献 [19]. 鉴于这个空间的重要性, 我们给出它的非紧性的简短证明.

空间 X_n 非紧性的证明 如果 X_n 紧, 则存在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 的紧子集 K 满足 $K \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, 此时有

$$\begin{aligned} K \cdot \mathbb{Z}^n &= K \cdot (\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \cdot \mathbb{Z}^n) = (K \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})) \cdot \mathbb{Z}^n \\ &= \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

这推出, 存在 K 中的序列 (g_k) 和 $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ 中的序列 (v_k) 使得 $g_k v_k \rightarrow 0$. 由于 K 紧, 不妨假设 $g_k \rightarrow g$. 于是,

$$v_k = g_k^{-1}(g_k v_k) \rightarrow g^{-1}0 = 0,$$

与 $v_k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ 矛盾. □

关于空间 X_n 中子集的有界性, Mahler [20] 证明了下面的判别法则. 它在齐性动力系统与 Diophantine 逼近之间起到了桥梁的作用.

定理 2.3 (Mahler 判别法则) 记 $\pi: \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow X_n$ 为投影映射, 即 $\pi(g) = g \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. 设 S 是 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 的子集, 则 $\pi(S)$ 在 X_n 中有界的充分必要条件为 $\mathbb{R}^n$ 中的原点是集合 $\{gv: g \in S, v \in \mathbb{Z}^n\}$ 的孤立点.

并非每个李群都有格点子群. 可以证明, 如果 G 存在格点子群, 则对任意 $g \in G$, 有

$$|\det(\mathrm{Ad}(g))| = 1,$$

其中 $\mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是伴随表示. 另一方面, 任意非紧连通半单李群总存在余紧格点子群, 也总存在非余紧格点子群. 而可解李群的格点子群 (如果存在) 只能是余紧的. 这些结论的证明和格点子群的其他性质, 参见文献 [19, 21–23].

齐性动力系统的一个基本定理是 Moore 遍历定理^[24]. 对单李群的情形²⁾, 可以陈述如下.

定理 2.4 (单李群的 Moore 遍历定理) 设 G 是中心有限的连通非紧单李群, $\Gamma \subset G$ 是格点子群, 则 G 在齐性空间 $X = G/\Gamma$ 上的平移作用关于 Haar 测度 μ_X 是强混合的, 即对任意可测集 $E_1, E_2 \subset X$, 有

$$\lim_{G \ni g \rightarrow \infty} \mu_X(gE_1 \cap E_2) = \mu_X(E_1)\mu_X(E_2).$$

特别地, 任意非紧闭子群 $H \subset G$ 在 X 上的平移作用是遍历的, 即对任意 H -不变可测集 $E \subset X$, 有

$$\mu_X(E) = 0 \quad \text{或} \quad \mu_X(E) = 1.$$

Moore 遍历定理推出, 如果 $H \subset G$ 是非紧闭子群, 则 X 中的几乎所有点的 H -轨道稠密. 如果 X 非紧, 则有界 H -轨道一定是非稠密的. 因此, 集合

$$\{x \in X : Hx \text{ 有界}\} \tag{2.2}$$

关于 Haar 测度是零测集. 在对有界轨道的研究中, 确定集合 (2.2) 的 Hausdorff 维数是一个重要的课题.

最后, 我们给出齐性动力系统的两个最基本的例子.

²⁾Moore 遍历定理对半单李群的不可约格点子群也成立.

例 2.5 (常负曲率曲面的测地流和极限圆流) 设 Σ 是体积有限的常负曲率完备曲面, 则它的单位切丛 $T^1\Sigma$ 同构于某个齐性空间 $X = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$, 其中 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是格子子群. 在这一同构下, $T^1\Sigma$ 上的 Liouville 测度就是 X 上的 Haar 测度. 考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的单参数子群

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

则 D 和 U 在 X 上的平移作用生成的动力系统分别对应着 $T^1\Sigma$ 上的测地流和极限圆流 (参见文献 [25]). 从齐性动力系统的角度对这两个流进行研究始于 Gelfand 和 Fomin [26]. 测地流和极限圆流具有非常不同的性质. 例如, 当 Σ 非紧时, 测地流的有界轨道可以非常复杂, 而极限圆流的有界轨道只能是周期轨 (参见文献 [27]).

关于齐性动力系统更详细的介绍, 参见文献 [25, 28–30] 等.

3 幂么系统

根据子群 H 的不同类型, 我们分情形讨论有界轨道的性质及其与 Diophantine 逼近的联系. 首先给出几个定义.

定义 3.1 设 G 是连通非紧李群, $\Gamma \subset G$ 是格子子群, $X = G/\Gamma$, $H \subset G$ 是连通非紧闭子群.

(1) 对于 $g \in G$, 如果 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换 $\mathrm{Ad}(g) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 是幂零的, 则称 g 为 Ad_G - 幂么的; 如果 $\mathrm{Ad}(g)$ 是可对角化的, 则称 g 为 Ad_G - 可对角化的.

(2) 如果 H 由 Ad_G - 幂么的元素生成, 则称 H 在 X 上的平移作用为幂么系统; 如果 H 中的元素都是 Ad_G - 可对角化的, 则称 H 在 X 上的平移作用为可对角化系统.

幂么系统和可对角化系统是齐性动力系统最重要的两种类型. 在某种意义上, 一般子群 H 的情形可以约化为对这两种情形的研究. 例 2.5 中的极限圆流是幂么系统, 而测地流是可对角化系统.

本节讨论幂么系统有界轨道的性质. 值得注意的是, 由 Iwasawa 分解可以看出, 如果 H 是非紧单李群, 则它由 Ad_G - 幂么的元素生成. 因此, 本节的讨论包含 H 是非紧单李群的情形.

首先考虑 $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ 和 $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 的情形. 此时 $X = X_3$ (见 (2.1)). 取 H 是符号为 $(2, 1)$ 的广义正交群的单位分支 $\mathrm{SO}^+(2, 1)$. 它是非紧单李群. Margulis [6, 7] 证明了下面的结果.

定理 3.2 空间 X_3 中的有界 $\mathrm{SO}^+(2, 1)$ - 轨道总是紧的.

这个定理的背景是 Diophantine 逼近中的 Oppenheim 猜想. 数论中的 Meyer 定理表明, 如果 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非退化不定有理二次型, 则当 $n \geq 5$ 时, 存在 $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ 满足 $Q(v) = 0$ (参见文献 [31]). Oppenheim 在文献 [32] 中猜想, 对于无理二次型, Meyer 定理在逼近的意义下也成立. 猜想的条件后来被减弱为 $n \geq 3$, 严格陈述如下.

猜想 3.3 (Oppenheim 猜想) 设 $n \geq 3$, Q 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非退化不定二次型. 假设 Q 不是有理二次型的常数倍, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ 满足 $|Q(v)| < \epsilon^3$.

容易证明, 如果猜想对某个 $n = n_0$ 成立, 则它对 $n > n_0$ 也成立. 于是, 只需证明猜想对 $n = 3$ 成立. Cassels 和 Swinnerton-Dyer [33] 与 Raghunathan (未发表) 发现, 猜想与定理 3.2 中的断言是等价的. 因此, Margulis 证明的定理 3.2 推出了 Oppenheim 猜想成立. 在这个证明出现以前, 人们利用解析数论的方法, 证明了猜想对 $n \geq 21$ 成立. Margulis 的证明基于李群 $\mathrm{SO}^+(2, 1)$ 由幂么元素生成这一

³⁾Oppenheim 猜想对于 $n = 2$ 是不成立的: 容易验证, 对任意 $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, 有 $|x_1^2 - (1 + \sqrt{2})^2 x_2^2| \geq 1$.

事实, 以及幂么单参数子群作用的动力系统性质. Oppenheim 猜想至今没有纯数论的完整证明. 关于 Oppenheim 猜想更精细的定量结果, 参见文献 [34–36].

下面简要说明定理 3.2 与 Oppenheim 猜想的关系. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型

$$Q_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$$

则 $\mathbb{R}^3$ 上的任意非退化不定二次型 Q 形如 $Q = c(Q_0 \circ g)$, 其中 c 为非零常数, $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Oppenheim 猜想与定理 3.2 的等价性容易由下面的命题推出.

命题 3.4 记 $\pi: \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow X_3$ 为投影映射, 则以下两个断言成立:

(1) 轨道 $\mathrm{SO}^+(2, 1) \cdot \pi(g)$ 是有界集的充分必要条件是

$$\inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} |Q(v)| > 0.$$

(2) 轨道 $\mathrm{SO}^+(2, 1) \cdot \pi(g)$ 是闭集的充分必要条件是 Q 为有理二次型的常数倍.

为了体现 Mahler 判别法则在齐性动力系统与数论之间的桥梁作用, 我们给出 (1) 的证明概要.

命题 3.4(1) 的证明 记 $H = \mathrm{SO}^+(2, 1)$. 对任意实数 a , 群 H 在曲面

$$\{v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : Q_0(v) = a\}$$

的连通分支上的作用是传递的. 于是, 对于 $v \in \mathbb{R}^3$, $|Q_0(v)|$ 充分小等价于 $\inf_{h \in H} \|hv\|$ 充分小. 因此,

$$\begin{aligned} \inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} |Q(v)| = 0 &\Leftrightarrow \inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} |Q_0(gv)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \inf_{h \in H} \|hgv\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{原点不是集合 } \{hgv : h \in H, v \in \mathbb{Z}^3\} \text{ 的孤立点.} \end{aligned}$$

由 Mahler 判别法则, 这等价于轨道 $H\pi(g)$ 无界. □

注 3.5 命题 3.4 在高维时也成立. 结合 Meyer 定理, 这推出当 $n \geq 5$ 时, 对任意和为 n 的正整数 p 与 q , 空间 X_n 中的 $\mathrm{SO}^+(p, q)$ -轨道总是无界的.

1990 年代初, Ratner [37–40] 证明了测度分类定理、轨道闭包定理和等度分布定理等一系列重要结果 (另外参见文献 [41]). 其中的轨道闭包定理如下.

定理 3.6 (Ratner 轨道闭包定理) 设 G 是连通非紧李群, $\Gamma \subset G$ 是格点子群, $X = G/\Gamma$, $H \subset G$ 是连通非紧闭子群. 假设 H 由 Ad_G -幂么的元素生成, 则对任意 $x \in X$, 存在 G 的包含 H 的连通闭子群 L 满足

$$\overline{Hx} = Lx.$$

容易由定理 3.6 推出定理 3.2. 另一方面, Ratner 的工作还推出如下定理:

定理 3.7 在定理 3.6 的条件下, 如果 X 非紧, 则集合 (2.2) 包含在 X 的可数多个真子流形的并集之中, 从而其 Hausdorff 维数小于 X 的维数.

由于 Ratner 的工作, 对幂么系统的定性了解已经比较完备 (参见文献 [1, 42–44]). 但是, 从定量的角度, 幂么系统仍然有很多未解决的问题, 参见文献 [3, 45] 等.

4 多参数可对角化系统

以下两节讨论可对角化系统, 即子群 H 中的元素都是 Ad_G - 可对角化的情形. 如果 $\dim H = 1$, 则称相应的动力系统为单参数的; 如果 $\dim H > 1$, 则称相应的动力系统为多参数的. 这两种情形的可对角化系统具有非常不同的性质. 本节讨论多参数可对角化系统. 对于这种情形, 人们希望得到与幂么系统类似的性质. 但是, 这一计划还远没有完成. 现阶段已知的主要结果集中在 H 为 G 的极大 $\mathbb{R}$ - 分裂子环面的情形.

为了避免技术性的条件, 本文只考虑 $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = \text{SL}_n(\mathbb{Z})$, 并且 H 等于子群

$$A = \{\text{diag}(e^{t_1}, \dots, e^{t_n}) : t_i \in \mathbb{R}, t_1 + \dots + t_n = 0\}$$

的情形. 注意 $\dim A = n - 1$. 因此, 当 $n \geq 3$ 时, 相应的动力系统是多参数的. 关于有界 A - 轨道, Margulis^[45] 猜想与定理 3.2 类似的断言成立, 即下面的猜想:

猜想 4.1 当 $n \geq 3$ 时, 空间 X_n 中的有界 A - 轨道总是紧的.

关于这个猜想, 至今最重要的进展是由 Einsiedler 等^[9] 做出的. 他们通过研究 X_n 上 A - 不变测度的性质, 证明了下面的定理:

定理 4.2 当 $n \geq 3$ 时, 集合

$$\{x \in X_n : Ax \text{ 有界}\}$$

的 Hausdorff 维数等于 $n - 1$.

可以证明, 空间 X_n 中存在紧 A - 轨道, 并且只有可数多个. 于是, 集合 $\{x \in X_n : Ax \text{ 紧}\}$ 的 Hausdorff 维数也是 $n - 1$. 因此, 猜想 4.1 在 Hausdorff 维数的意义下成立. Einsiedler 等^[9] 还证明了下面更强的结果:

定理 4.3 设 $n \geq 3$, $A^+ \subset A$ 是有内点的子半群, $g \in A^+$ 是内点. 考虑 $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ 的子群

$$U(g) = \left\{ u \in \text{SL}_n(\mathbb{R}) : \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{-k} u g^k = I_n \right\},$$

则对任意 $x \in X_n$, 集合

$$\{u \in U : A^+ u x \text{ 有界}\}$$

的 Hausdorff 维数等于 0.

利用极小集的概念, 可以给出猜想 4.1 的等价陈述. 对于 $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ 的子群 S 和 X_n 的子集 Y , 如果 Y 是 S - 不变闭集, 并且 Y 中没有非空 S - 不变闭真子集, 则称 Y 是 S - 极小集. An 和 Weiss^[46] 证明了下面的定理:

定理 4.4 设 $n \geq 3$. 对于 $1 \leq i < j \leq n$, 记 A_{ij} 为 A 中第 i 个对角元与第 j 个对角元相等的矩阵构成的子群, 则以下两个陈述等价:

- (1) 猜想 4.1 对 n 成立;
- (2) 对每个 A_{ij} , 空间 X_n 中的任意紧 A - 极小集也是 A_{ij} - 极小集.

猜想 4.1 和定理 4.3 与 Diophantine 逼近中的 Littlewood 猜想有紧密的关系. 对于实数 a , 记 $\langle a \rangle$ 为 a 到整数集的距离, 即

$$\langle a \rangle = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |a - k|.$$

Littlewood 于 1930 年左右提出了下面的猜想.

猜想 4.5 (Littlewood 猜想) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$\inf_{q \in \mathbb{N}} q \langle qa \rangle \langle qb \rangle = 0.$$

Littlewood 猜想是 Diophantine 逼近中最重要的未解问题之一. Cassels 和 Swinnerton-Dyer^[33] 提出了下面的猜想, 并证明了它可以推出 Littlewood 猜想.

猜想 4.6 设 f_1, f_2 和 f_3 是 $\mathbb{R}^3$ 上线性无关的线性型, 并考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的三次型 $F = f_1 f_2 f_3$. 假设 F 不是有理三次型的常数倍, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $v \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ 满足

$$|F(v)| < \epsilon.$$

容易看出猜想 4.6 与 Oppenheim 猜想的类似之处. 与定理 3.2 与 Oppenheim 猜想的等价性类似, 利用 Mahler 判别法则, 可以证明 $n = 3$ 时的猜想 4.1 与 4.6 等价. 因此, 猜想 4.1 可以推出 Littlewood 猜想.

另一方面, Einsiedler 等^[9] 利用定理 4.3 证明了 Littlewood 猜想在差一个零维集合的意义下成立, 即下面的定理:

定理 4.7 集合

$$\left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \inf_{q \in \mathbb{N}} q \langle qa \rangle \langle qb \rangle > 0 \right\}$$

的 Hausdorff 维数等于 0.

为了说明定理 4.3 与 Littlewood 猜想的关系, 取 $n = 3$, 并考虑 A 的子半群

$$A^+ = \{\text{diag}(e^{t_1}, e^{t_2}, e^{-(t_1+t_2)}) : t_1, t_2 \geq 0\}. \quad (4.1)$$

对于 $a, b \in \mathbb{R}$, 记

$$u_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{a,b} = u_{a,b} \cdot \text{SL}_3(\mathbb{Z}).$$

利用 Mahler 判别法则, 可以证明下面的命题:

命题 4.8 轨道 $A^+ x_{a,b}$ 有界的充分必要条件是

$$\inf_{q \in \mathbb{N}} q \langle qa \rangle \langle qb \rangle > 0.$$

利用命题 4.8, 容易由定理 4.3 推得定理 4.7:

定理 4.7 的证明 在定理 4.3 中, 取 $n = 3$, A^+ 为 (4.1) 给出的子半群, 则 $g = \text{diag}(2, 2, 1/4)$ 是 A^+ 的内点. 此时,

$$U(g) = \{u_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

因此, 集合 $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : A^+ x_{a,b} \text{ 有界}\}$ 的 Hausdorff 维数等于 0. 再利用命题 4.8 即得定理 4.7. $\square$

5 单参数可对角化系统

本节讨论单参数可对角化系统的有界轨道. 出于习惯, 这时把子群 H 改记为 F . 下面的结果首先由 Margulis^[42] 以猜想的形式提出, 随后被 Kleinbock 和 Margulis^[47] 所证明.

定理 5.1 设 G 是非紧李群, $\Gamma \subset G$ 是非余紧格子群, $X = G/\Gamma$, F 是 G 的 Ad_G - 可对角化单参数子群, 则集合

$$\{x \in X : Fx \text{ 有界}\} \quad (5.1)$$

的 Hausdorff 维数等于全空间 X 的维数.

将定理 5.1 与定理 3.7 和 4.2 作比较, 可以看出单参数可对角化系统的不同之处. 在这一基础上, An 等^[48] 提出了更强的猜想. 为了叙述这个猜想, 我们先介绍 Schmidt 博弈的致胜集的概念 (参见文献 [49]).

定义 5.2 (Schmidt 博弈及其致胜集) 给定完备度量空间 X 、子集 $S \subset X$ 和实数 $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Alice 和 Bob 两人按下述规则进行博弈: Bob 首先选取 X 中的闭球 B_0 . 在 Bob 选取了闭球 B_i 之后 ($i \geq 0$), Alice 在 B_i 中选取半径为 B_i 半径 α 倍的闭球 A_i , 然后 Bob 在 A_i 中选取半径为 A_i 半径 β 倍的闭球 B_{i+1} . 这样得到了闭球的无穷序列

$$B_0 \supset A_0 \supset B_1 \supset A_1 \supset \cdots$$

所有这些闭球的交集为单点集, 记为 $\{x_\infty\}$. 如果 $x_\infty \in S$, 则约定 Alice 获胜; 否则约定 Bob 获胜. 如果 Alice 在博弈中有必胜策略, 则称 S 为 (α, β) - 致胜集 ((α, β) -winning set). 如果对任意 $\beta \in (0, 1)$, S 均为 (α, β) - 致胜集, 则称 S 为 α - 致胜集. 如果存在 $\alpha \in (0, 1)$ 使得 S 为 α - 致胜集, 则称 S 为致胜集.

容易看出, 如果 S 为致胜集, 则它在 X 中稠密. Schmidt^[49] 还证明了下面的命题:

命题 5.3 设 X 是完备度量空间.

- (1) 对任意 $\alpha \in (0, 1)$, 可数多个 X 的 α - 致胜子集的交集仍然为 α - 致胜集;
- (2) 如果 X 是 Riemann 流形, 则 X 的致胜子集的 Hausdorff 维数等于全空间 X 的维数.

文献 [48] 中提出的猜想如下.

猜想 5.4 设 G 、 Γ 和 X 如定理 5.1 所述, 则存在 $\alpha_0 \in (0, 1)$, 使得对 G 的任意 Ad_G - 可对角化单参数子群 F , 集合 (5.1) 均为 X 的 α_0 - 致胜子集⁴⁾.

由命题 5.3, 这个猜想推出, 对 G 的任意可数多个 Ad_G - 可对角化单参数子群 $F_1, F_2, \dots$, 集合

$$\{x \in X : \text{所有 } F_k x \text{ 有界}\}$$

的 Hausdorff 维数等于全空间 X 的维数. 关于这一猜想, 已知的结果如下.

定理 5.5 下面的结论成立:

- (1) 当 G 为 $\mathbb{R}$ - 秩为 1 的半单李群时, 猜想 5.4 成立 (参见文献 [52]);
- (2) 当 $G = \text{SL}_3(\mathbb{R})$, $\Gamma = \text{SL}_3(\mathbb{Z})$ 时, 猜想 5.4 成立 (参见文献 [48]);
- (3) 当 G 为有限多个 $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ 的乘积时, 猜想 5.4 成立 (参见文献 [53]);
- (4) 对于 $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ 和

$$F = \{\text{diag}(e^{t/p} I_p, e^{-t/q} I_q) : t \in \mathbb{R}\}, \quad p + q = n,$$

⁴⁾ 文献 [48] 提出了更强的猜想, 即集合 (5.1) 是超平面绝对致胜集. 这种致胜集的概念是在文献 [50, 51] 中引入的, 具有更好的性质. 本文为了叙述方便, 只对定义 5.2 中给出的致胜集概念进行讨论.

集合 (5.1) 是致胜集 (参见文献 [54]);

(5) 对于 $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 和

$$F = \{\mathrm{diag}(e^{rt}I_{n-2}, e^{st}, e^{-t}) : t \in \mathbb{R}\}, \quad r \geq s \geq 0, \quad (n-2)r + s = 1,$$

集合 (5.1) 是致胜集 (参见文献 [55]).

猜想 5.4 提出的背景为 Diophantine 逼近中已被证明的 Schmidt 猜想. 对于 $d \geq 1$, 考虑集合

$$W_d = \{(r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d : r_i \geq 0, r_1 + \dots + r_d = 1\}.$$

对于 $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d) \in W_d$, 定义 $\mathbb{R}^d$ 的子集

$$\mathrm{Bad}(\mathbf{r}) = \left\{ (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d : \inf_{q \in \mathbb{N}} \max_{1 \leq i \leq d} q^{r_i} \langle qa_i \rangle > 0 \right\}.$$

集合 $\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$ 中的向量称为权为 $\mathbf{r}$ 的劣态逼近向量 (badly approximable vectors). 当 $d = 1$ 时, 定义退化为劣态逼近数的概念. 劣态逼近向量是 Diophantine 逼近的基本研究对象. Schmidt [49, 56] 证明了 $\mathrm{Bad}(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d})$ 是致胜集, 并在文献 [57] 中对 $d = 2$ 的情形提出了下面的猜想:

猜想 5.6 (Schmidt 猜想) $\mathrm{Bad}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cap \mathrm{Bad}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \neq \emptyset$.

Schmidt 猜想被 Badziahin 等 [58] 所证明. 他们还证明了对某种可数多个 (特别地, 任意有限多个) 权 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots \in W_2$, 交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Bad}(\mathbf{r}_k)$ 的 Hausdorff 维数等于 2. 随后, An [59] 利用不同的方法证明了这一结果对任意可数多个权也成立, 并在文献 [60] 中证明了下面的定理:

定理 5.7 存在 $\alpha_0 \in (0, 1)$, 使得对任意 $\mathbf{r} \in W_2$, $\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的 α_0 -致胜子集.

由命题 5.3, 定理 5.7 给出了 Schmidt 猜想的另一个证明. 进一步的结果可以参见文献 [61–63]. Beresnevich [64] 把上述 Badziahin 等 [58] 的结果推广到了 $d \geq 3$ 的情形, 从而证明了高维的 Schmidt 猜想. 最近, Yang [65] 证明了 Beresnevich 的结果对任意可数多个权也成立. 另外, Guan 和 Yu [66] 证明了, 当 $r_1 = \dots = r_{d-1} \geq r_d$ 时, $\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$ 是致胜集. 但是, 对于一般的权 $\mathbf{r}$, $\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$ 是否为致胜集仍然是一个有挑战性的问题.

下面说明劣态逼近向量与有界轨道的关系. 取 $n = d + 1$. 对于 $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d) \in W_d$, 考虑 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 的单参数子半群

$$F_{\mathbf{r}}^+ = \{\mathrm{diag}(e^{r_1 t}, \dots, e^{r_d t}, e^{-t}) : t \geq 0\}.$$

对于行向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, 记

$$x_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} I_d & \mathbf{a}^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \in X_n.$$

与命题 4.8 类似, 利用 Mahler 判别法则, Dani [67] 和 Kleinbock [68] 证明了下面的命题:

命题 5.8 (Dani-Kleinbock 对应) 轨道 $F_{\mathbf{r}}^+ x_{\mathbf{a}}$ 有界的充分必要条件是 $\mathbf{a} \in \mathrm{Bad}(\mathbf{r})$.

考虑 X_3 中的 2 维环面

$$\mathbb{T}^2 = \{x_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2\}.$$

由命题 5.8, Schmidt 猜想等价于, 存在 $x \in \mathbb{T}^2$ 使得轨道 $F_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})}^+ x$ 和 $F_{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}^+ x$ 同时有界. 而定理 5.7 可以从动力系统的角度重新叙述为, 对 (4.1) 给出的 A^+ 的任意单参数子半群 F^+ , 集合

$$\{x \in \mathbb{T}^2 : F^+ x \text{ 有界}\}$$

是 $\mathbb{T}^2$ 的致胜子集. 因此, 猜想 5.4 可以视为动力系统意义的 Schmidt 猜想. 文献 [48] 还对扩张极限球子群 (expanding horospherical subgroup) 提出了类似的猜想. 为了避免过于技术化, 本文不再讨论.

参考文献

- 1 Ratner M. Interactions between ergodic theory, Lie groups, and number theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), vol. I. Basel: Birkhäuser, 1995, 157–182
- 2 Einsiedler M, Lindenstrauss E. Diagonalizable flows on locally homogeneous spaces and number theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), vol. II. Zürich: European Mathematical Society, 2006, 1731–1759
- 3 Lindenstrauss E. Equidistribution in homogeneous spaces and number theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. I. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 531–557
- 4 Einsiedler M. Applications of measure rigidity of diagonal actions. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1740–1759
- 5 Benoist Y. Recurrence on the space of lattices. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Seoul, 2014), vol. III. Seoul: Kyung Moon Sa, 2014, 11–25
- 6 Margulis G. Indefinite quadratic forms and unipotent flows on homogeneous spaces. In: Dynamical Systems and Ergodic Theory (Warsaw, 1986). Banach Center Publications, vol. 23. Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1989, 399–409
- 7 Margulis G. Discrete subgroups and ergodic theory. In: Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups (Oslo, 1987). Boston: Academic Press, 1989, 377–398
- 8 Kleinbock D, Margulis G. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds. *Ann of Math* (2), 1998, 148: 339–360
- 9 Einsiedler M, Katok A, Lindenstrauss L. Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood’s conjecture. *Ann of Math* (2), 2006, 164: 513–560
- 10 Shah N. Equidistribution of translates of curves on homogeneous spaces and Dirichlet’s approximation. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1332–1343
- 11 Eskin A. Counting problems and semisimple groups. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin, 1998), vol. II. Bielefeld: Documenta Mathematica, 1998, 539–552
- 12 Ullmo E. Théorie ergodique et géométrie arithmétique. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, 2002), vol. II. Beijing: Higher Education Press, 2002, 197–206
- 13 Michel P, Venkatesh A. Equidistribution, L -functions and ergodic theory: On some problems of Yu. Linnik. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), vol. II. Zürich: European Mathematical Society, 2006, 421–457
- 14 Oh H. Dynamics on geometrically finite hyperbolic manifolds with applications to Apollonian circle packings and beyond. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1308–1331
- 15 Marklof J. The low-density limit of the Lorentz gas: Periodic, aperiodic and random. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Seoul, 2014), vol. III. Seoul: Kyung Moon Sa, 2014, 623–646
- 16 Cheung Y, Chevallier N. Hausdorff dimension of singular vectors. *Duke Math J*, 2016, 165: 2273–2329
- 17 Liao L, Shi R, Solan O, et al. Hausdorff dimension of weighted singular vectors. *ArXiv:1605.01287*, 2016
- 18 Kleinbock D, Weiss B. Modified Schmidt games and a conjecture of Margulis. *J Mod Dyn*, 2013, 7: 429–460
- 19 Raghunathan M. Discrete Subgroups of Lie Groups. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1972
- 20 Mahler K. On lattice points in n -dimensional star bodies, I: Existence theorems. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1946, 187: 151–187
- 21 Zimmer R. Ergodic Theory and Semisimple Groups. Basel: Birkhäuser, 1984
- 22 Margulis G. Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1991
- 23 Morris D. Introduction to Arithmetic Groups. Deductive Press [place of publication not identified], 2015
- 24 Moore C. Ergodicity of flows on homogeneous spaces. *Amer J Math*, 1966, 88: 154–178
- 25 Bekka M, Mayer M. Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 26 Gelfand I, Fomin S. Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature. *Uspehi Matem Nauk*, 1952, 7: 118–137
- 27 Dani S. On badly approximable numbers, Schmidt games and bounded orbits of flows. In: Number Theory and Dynamical Systems (York, 1987). Cambridge: Cambridge University Press, 1989, 69–86
- 28 Starkov A. Dynamical Systems on Homogeneous Spaces. Providence: Amer Math Soc, 2000
- 29 Dani S. Dynamical systems on homogeneous spaces. In: Dynamical Systems, Ergodic Theory and Applications, 2nd ed. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 100. Berlin: Springer-Verlag, 2000, 264–359

- 30 Kleinbock D, Shah N, Starkov A. Dynamics of subgroup actions on homogeneous spaces of Lie groups and applications to number theory. In: *Handbook of Dynamical Systems*, vol. 1A. Amsterdam: North-Holland, 2002, 813–930
- 31 Serre J-P. *A Course in Arithmetic*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 7. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973
- 32 Oppenheim A. The minima of indefinite quaternary quadratic forms. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1929, 15: 724–727
- 33 Cassels J, Swinnerton-Dyer H. On the product of three homogeneous linear forms and the indefinite ternary quadratic forms. *Philos Trans R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1955, 248: 73–96
- 34 Margulis G. Oppenheim conjecture. In: *Fields Medallists' Lectures*. River Edge: World Scientific Publishing, 1997, 272–327
- 35 Lindenstrauss E, Margulis G. Effective estimates on indefinite ternary forms. *Israel J Math*, 2014, 203: 445–499
- 36 Götze F, Margulis G. Distribution of values of quadratic forms at integral points. *ArXiv:1004.5123*, 2010
- 37 Ratner M. Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups. *Invent Math*, 1990, 101: 449–482
- 38 Ratner M. On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups. *Acta Math*, 1990, 165: 229–309
- 39 Ratner M. On Raghunathan's measure conjecture. *Ann of Math (2)*, 1991, 134: 545–607
- 40 Ratner M. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows. *Duke Math J*, 1991, 63: 235–280
- 41 Margulis G, Tomanov G. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces. *Invent Math*, 1994, 116: 347–392
- 42 Margulis G. Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990)*, vol. I. Tokyo: Math Soc Japan, 1991, 193–215
- 43 Dani S. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994)*, vol. II. Basel: Birkhäuser, 1995, 780–789
- 44 Morris, D. *Ratner's Theorems on Unipotent Flows*. Chicago: University of Chicago Press, 2005
- 45 Margulis G. Problems and conjectures in rigidity theory. In: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. Providence: Amer Math Soc, 2000, 161–174
- 46 An J, Weiss B. Remarks on minimal sets and conjectures of Cassels, Swinnerton-Dyer, and Margulis. *Mosc J Comb Number Theory*, 2013, 3: 24–43
- 47 Kleinbock D, Margulis G. Bounded orbits of nonquasiunipotent flows on homogeneous spaces. *Amer Math Soc Transl Ser 2*, 1996, 171: 141–172
- 48 An J, Guan L, Kleinbock D. Bounded orbits of diagonalizable flows on $SL_3(\mathbb{R})/SL_3(\mathbb{Z})$. *Int Math Res Not IMRN*, 2015, 2015: 13623–13652
- 49 Schmidt W. On badly approximable numbers and certain games. *Trans Amer Math Soc*, 1966, 123: 178–199
- 50 Broderick R, Fishman L, Kleinbock D, et al. The set of badly approximable vectors is strongly C^1 incompressible. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2012, 153: 319–339
- 51 Kleinbock D, Weiss B. Values of binary quadratic forms at integer points and Schmidt games. In: *Recent Trends in Ergodic Theory and Dynamical Systems*. Providence: Amer Math Soc, 2015, 77–92
- 52 Dani S. Bounded orbits of flows on homogeneous spaces. *Comment Math Helv*, 1986, 61: 636–660
- 53 An J, Ghosh A, Guan L, et al. Bounded orbits of diagonalizable flows on finite volume quotients of products of $SL_2(\mathbb{R})$. *ArXiv:1605.08510*, 2016
- 54 Broderick R, Fishman L, Simmons D. Badly approximable systems of affine forms and incompressibility on fractals. *J Number Theory*, 2013, 133: 2186–2205
- 55 Guan L, Wu W. Bounded orbits of certain diagonalizable flows on $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$. *Trans Amer Math Soc*, in press, 2017
- 56 Schmidt W. *Diophantine Approximation*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 785. Berlin: Springer, 1980
- 57 Schmidt W. Open problems in Diophantine approximation. In: *Diophantine Approximations and Transcendental Numbers (Luminy, 1982)*. Boston: Birkhäuser, 1983, 271–287
- 58 Badziahin D, Pollington A, Velani S. On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Schmidt's conjecture. *Ann of Math (2)*, 2011, 174: 1837–1883
- 59 An J. Badziahin-Pollington-Velani's theorem and Schmidt's game. *Bull Lond Math Soc*, 2013, 45: 721–733
- 60 An J. 2-dimensional badly approximable vectors and Schmidt's game. *Duke Math J*, 2016, 165: 267–284
- 61 Badziahin D, Velani S. Badly approximable points on planar curves and a problem of Davenport. *Math Ann*, 2014, 359: 969–1023
- 62 Nesharim E, Simmons D. $Bad(s, t)$ is hyperplane absolute winning. *Acta Arith*, 2014, 164: 145–152
- 63 An J, Beresnevich V, Velani S. Badly approximable points on planar curves and winning. *ArXiv:1409.0064*, 2014
- 64 Beresnevich V. Badly approximable points on manifolds. *Invent Math*, 2015, 202: 1199–1240

- 65 Yang L. Badly approximable points on curves and unipotent orbits in homogeneous spaces. ArXiv:1703.03461, 2017
- 66 Guan L, Yu J. Weighted badly approximable vectors and games. Int Math Res Not IMRN, 2017, 2017: rnx150
- 67 Dani S. Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation. J Reine Angew Math, 1985, 359: 55–89
- 68 Kleinbock D. Flows on homogeneous spaces and Diophantine properties of matrices. Duke Math J, 1998, 95: 107–124

Bounded orbits of homogeneous dynamics

AN JinPeng & GUAN LiFan

Abstract Homogeneous dynamics is a special kind of dynamical systems given by Lie groups, and is closely related to Diophantine approximation and other areas in number theory. In this paper, we survey main problems and results concerning bounded orbits of homogeneous dynamics, and discuss their relations with Diophantine approximation problems including the Oppenheim Conjecture, the Littlewood Conjecture, and the Schmidt Conjecture.

Keywords homogeneous dynamics, bounded orbit, Diophantine approximation

MSC(2010) 37A17, 11J83

doi: 10.1360/N012017-00168