简单 Jenkins-Strebel 方向

黄炎

河南大学数学与统计学院, 开封 475004

E-mail: huangyan@amss.ac.cn

收稿日期: 2019-03-07; 接受日期: 2019-07-17; 网络出版日期: 2019-11-19

国家自然科学基金 (批准号: 11401167) 资助项目

摘要 具有 Jenkins-Strebel 方向的二次微分可以通过组合方式予以实现. 本文使用算术曲面理论证明闭 Riemann 面上可积亚纯二次微分的简单 Jenkins-Strebel 方向构成的集合要么是空集, 要么是单点集, 要么是单位圆周的稠密子集.

关键词 二次微分 Jenkins-Strebel 方向 算术曲面

MSC (2010) 主题分类 32G15, 30C60, 30C75, 30F60

1 引言

二次微分在 Teichmüller 空间、可测叶状结构、撞球系统和区间交换映射等方面均有重要应用, 参见文献 [1–7].

设 ϕ 为闭 Riemann 面 X 的非零可积亚纯二次微分. 对任意的 $v \in S^1$, $\bar{v}^2\phi > 0$ 诱导曲面 X 的一个叶状结构 $\mathcal{F}^v$. 局部地, $\mathcal{F}^v$ 的叶子是平面内 v 方向的平行直线段. 因此, $\mathcal{F}^v$ 称作 ϕ 的 v 方向的叶状结构. $\mathcal{F}^v$ 的叶子又称作 ϕ 的 v 方向轨线. 设 γ 为 $\mathcal{F}^v$ 的一个叶子. 如果它连接 ϕ 的两个奇点 (或同一个奇点), 则称 γ 为 ϕ 的鞍形连接. 如果 $\mathcal{F}^v$ 存在叶子是鞍形连接, 则称 v 是可约方向; 否则称作不可约方向. 容易证明, 可约方向集合是 S^1 的可数稠密子集 (参见文献 [5]).

设 Γ 为 $\mathcal{F}^v$ 中鞍形连接全体的并集, 则余集 $X \setminus \Gamma$ 只有有限个连通分支. 在每个分支内, 要么每个叶子都稠密于该分支; 要么每个叶子都是闭集, 即同胚于单位圆周. 第一种分支称作 $\mathcal{F}^v$ 的极小分支, 第二种分支称作周期分支. 如果存在周期分支, 则称 v 是周期方向, 并称该分支内每个叶子为 ϕ 的 v 方向周期轨线; 如果只有极小分支, 且个数为 1, 则称 v 是极小方向. 极小方向的叶状结构具有拓扑不可约性, 并且不可约方向总是极小方向.

二次微分的叶状结构具有横截不变测度. 如果 $\mathcal{F}^v$ 具有等分布的叶子, 则称 v 为遍历方向. 遍历方向的叶状结构具有测度不可约性. 特别地, 如果叶状结构具有唯一的横截不变测度, 则称该方向是唯

英文引用格式: Huang Y. On simple Jenkins-Strebel directions (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 989–998, doi: 10.1360/N012019-00073

一遍历方向. 唯一遍历方向集合是 S^1 的全测度子集 (参见文献 [8]). 因此, 进一步定量刻画零测集极小非遍历方向全体是二次微分研究中的重要课题.

令 (X, d) 为度量空间. 对于任意的子集 $E \subset X$, $\text{diam}(E)$ 为其直径, 即 $\text{diam}(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$. 对于任意 $\delta \in (0, \infty]$, $\alpha \in [0, \infty)$, 令 $\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty (\text{diam}(E_i))^\alpha : E \subset \bigcup_i E_i \text{ 且 } \text{diam}(E_i) < \delta\}$, 则 $\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(E)$ 称作 E 的 α 维 Hausdorff 测度. 进而, $\text{HDim}(E) = \sup\{s \in [0, \infty) : \mathcal{H}^s(E) > 0\}$ 定义为集合 E 的 Hausdorff 维数.

定理 1.1 [8] 设 NE 为 ϕ 的极小非遍历方向全体, 则 $0 \leq \text{HDim}(\text{NE}) \leq \frac{1}{2}$.

ϕ 的两支周期轨线同伦当且仅当它们方向相同并且在该方向叶状结构的同一个周期分支内, 此时它们关于 ϕ 诱导的度量具有相同的长度. 计量长度不超过给定上界的周期轨线的同伦类个数是二次微分研究中的另一重要课题.

定理 1.2 [9] 设 $c(L)$ 为 ϕ 的长度不超过 L 的周期轨线同伦类的个数, 则存在 $0 < c_1 < c_2 < +\infty$, 使得 $c_1 L^2 \leq c(L) \leq c_2 L^2$.

定义 1.1 设 v 是 ϕ 的周期方向. 如果 $\mathcal{F}^v$ 仅有周期分支, 则称 v 是 ϕ 的 Jenkins-Strebel 方向; 如果 $\mathcal{F}^v$ 仅有一个分支, 则称 v 是 ϕ 的简单 Jenkins-Strebel 方向.

Jenkins-Strebel 方向的鞍形连接做成一个有限图, 从而可以通过组合方式构造大量具有 Jenkins-Strebel 方向的二次微分. 例如, 设 $S = [0, 1] \times [0, 1]$ 为复平面内的单位正方形. 设 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 为 n 个正实数, 满足 $\sum_{1 \leq k \leq n} t_k = 1$. 设 $\pi \in S(n)$ 为一个秩为 n 的置换. 令

$$x_0 = y_0 = 0, \quad x_k = \sum_{1 \leq i \leq k} t_i, \quad y_k = \sum_{1 \leq i \leq k} t_{\pi(i)}.$$

缝合竖直对边, 缝合水平对边内的线段 $[x_{k-1}, x_k]$ 和 $[y_{k-1} + i, y_k + i]$, 可以得到一个闭 Riemann 面, dz^2 定义其上一个二次微分, 见图 1.

水平方向是 Jenkins-Strebel 方向的二次微分通常称为 Jenkins-Strebel 微分. 当前, Jenkins-Strebel 微分在 Teichmüller 空间的参数化、二次微分的模空间的连通分支分类和区间交换映射的 Rauzy 等价类的分类等均有重要应用 (参见文献 [4]). 尽管如此, 二次微分不总具有 Jenkins-Strebel 方向. 判断给定二次微分是否具有 Jenkins-Strebel 方向, 并考察 Jenkins-Strebel 方向构成集合的性质是一个值得考虑的问题.

图 1 具有 Jenkins-Strebel 水平方向的平移曲面和半平移曲面. (a) 半平移曲面情形; (b) 平移曲面情形

二次微分赋予曲面一个平坦度量, 叶状结构的性质与该度量的几何性质密切相关 [6, 7, 10].

定义 1.2 设 X 为闭 Riemann 面, ϕ 为 X 的非零可积亚纯二次微分, 称 (X, ϕ) 为平坦曲面.

如果存在全纯 1- 形式 ω , 使得 $\phi = \omega^2$, 则称平坦曲面 (X, ϕ) 可定向, 并称 (X, ω) 为定向平坦曲面或平移曲面; 否则, 平坦曲面 (X, ϕ) 称作半平移曲面.

如果平坦曲面间的同胚关于平坦结构的局部表示为仿射映射, 则称其为仿射同胚. 特别地, 对于仿射自同胚 h , 仿射表示的线性部分唯一确定一个元素 $A \in G$, 称作 h 的导数, 其中, 对于平移曲面的情形, $G = \mathrm{SL}(2, R)$; 对于半平移曲面的情形, $G = \mathrm{PSL}(2, R)$. 仿射自同胚分为椭圆型、抛物型或双曲型, 如果其导数为相应类型的二阶矩阵, 参见文献 [10] 和第 2.2 小节.

抛物型仿射同胚的导数的特征方向是 Jenkins-Strebel 方向; 双曲型仿射同胚的导数的特征方向均为唯一遍历方向. 仿射自同胚的导数全体做成的群称作平坦曲面的 Veech 群. 如果 Veech 群是格子群, 则其叶状结构具有下面的二分性质:

定理 1.3 [6, 11] 若 (X, ϕ) 是 Veech 曲面, 则每个可约方向均为抛物型仿射同胚的特征方向, 其他方向均为唯一遍历方向.

通常, Jenkins-Strebel 方向叶状结构的周期分支个数的上界由二次微分的奇点类型控制. 反过来, 对于任意的奇点类型, 总存在二次微分具有简单 Jenkins-Strebel 方向 (参见文献 [4]). 本文将主要证明下面的定理:

定理 1.4 设 (X, ϕ) 为一个平坦曲面. 简单 Jenkins-Strebel 方向构成的集合要么为空集, 要么为单点集, 要么为 S^1 的稠密子集.

2 预备知识

本节简单回顾平坦曲面的基础知识, 详见文献 [5, 7, 11, 12].

2.1 平坦结构

设 X 为闭 Riemann 面. 如果 X 的每个解析坐标图 (U, z) 均指定一个亚纯函数 $\phi(z)$, 满足 $\phi(z)dz^2$ 形式不变, 则确定 X 的一个亚纯二次微分, 记作 ϕ . 每个亚纯函数 $\phi(z)$ 称作 ϕ 的局部表示. 局部表示 $\phi(z)$ 的零点和极点类型不依赖于局部表示的选取, 称作二次微分 ϕ 的零点或极点. 零点和极点统称为 ϕ 的奇点.

设 ϕ 为闭 Riemann 面 X 的非零亚纯二次微分, E 为 ϕ 的奇点集, $v_1, v_2, \dots, v_m$ 为相应零点的阶数, $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ 为相应极点的阶数, 则

$$\sum_{k=1}^m v_k - \sum_{k=1}^n v'_k = 4g - 4,$$

其中 g 为 X 的亏格数. 另一方面, $\int \sqrt{\phi(z)}dz$ 诱导 $X \setminus E$ 的一族坐标图 (V, ζ) , 满足 $\phi(\zeta) = 1$, 称作 ϕ 的典范坐标图 (参见文献 [12]).

典范坐标图之间的迁移函数由平面内的平移映射和中心对称映射实现. 因此, 复平面内的 Euclid 度量和面积测度分别诱导 $X \setminus E$ 的一个度量和一个测度, 称作 ϕ 诱导的 Euclid 度量和面积测度. $X \setminus E$ 关于 Euclid 度量的完备化同胚于 X , 当且仅当 $X \setminus E$ 的面积有限, 当且仅当二次微分要么没有极点, 要么极点阶数为 1.

叶状结构 $\mathcal{F}^v$ 的叶子在典范坐标下映成复平面内与向量 v 平行的直线段. 特别地, 鞍形连接对应端点为奇点、内部没有奇点的测地线段. 平坦曲面可定向时, 每个平移曲面对应一族典范坐标图册, 满足迁移函数由平面内的平移映射实现. 这时, 叶状结构的叶子存在一致的定向.

一般地, 设 M 为定向闭曲面, $u = \{(U_i, z_i)\}_{i \in I}$ 为一族坐标图, 满足

- (i) 存在有限点集 $E \subset M$ 使得 $M \setminus E = \cup U_i$;
- (ii) 当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 时, $z_i \circ z_j^{-1}$ 局部为平移或中心对称;
- (iii) 对每个坐标图 (U, z) , 若 $U \subset M \setminus E$, 且 $U_i \cap U \neq \emptyset$ 时, $z_i \circ z^{-1}$ 局部为平移或中心对称, 则 $(U, z) \in u$;
- (iv) u 赋予 $M \setminus E$ 的度量具有有限面积,

则称 u 为具有奇点集 E 的平坦结构. 因此, 二次微分的典范坐标图册做成 X 的底曲面的平坦结构. 反过来, 一个平坦结构 $u = \{(U_i, z_i)\}_{i \in I}$ 诱导底曲面上一个复结构, 设对应的闭 Riemann 曲面为 X , dz_i^2 诱导一个二次微分 ϕ . 如果 E 中的点不为零点或极点, 则称其为 u 的可去奇点. 通常, 如果 E 无可去奇点, 记 $(M, u) = (X, \phi)$, 均表示一个平坦曲面; 如果 E 的可去奇点集 P 非空, 记 $(M, u) = (X, \phi; P)$, 均表示一个具有标记点集 P 的平坦曲面.

注 2.1 通常具有标记点集的平坦曲面简称为平坦曲面. 但是通过增加或减少可去奇点, 平坦曲面的许多几何不变量发生改变.

可以通过直观的方式构造平移曲面. 设 $\{P_i\}_{i \in I}$ 为一族平面多边形, 如果给定这些多边形一个配边法则 $\sim$: 每组对边方向平行, 长度相等, 并且关于所在多边形的定向相反, 那么缝合对边得到一个平移曲面. 事实上, 每个平移曲面均可这样得到.

对于平移曲面 (X, ω) , 还可以引入以下对象: 设鞍形连接 γ , $\int_\gamma \omega$ 称作它的和乐向量; 相对周期集定义为 $\text{Per}(\omega) = \{\int_c \omega : c \in H_1(X; \mathbb{Z})\}$; 绝对周期集定义为 $\text{rel.Per}(\omega) = \{\int_c \omega : c \in H_1(X; \mathbb{Z})\}$.

2.2 Veech 群

设 u 为 M 的具有奇点集 E 的平坦结构, v 为 N 的具有奇点集 F 的平坦结构, $h : M \rightarrow N$ 为保向同胚, $h(E) = F$. 如果 $u = \{(h^{-1}(U), z) : (U, z) \in v\}$, 则称 $h : (M, u) \rightarrow (N, v)$ 为平坦同构, 并称 (M, u) 和 (N, v) 关于 h 平坦等价. 对任意的 $A \in \text{GL}_+(2, \mathbb{R})$, 令 T_A 为复平面中相应的线性映射, 则

$$u_A = \{(U_i, T_A \circ z_i) : (U, z) \in u\}$$

仍然为 M 的以 E 为奇点集的平坦结构, 并且奇点的奇性不变. (M, u_A) 称作 (M, u) 关于 A 的仿射形变. 若 h 为 (M, u_A) 到 (N, v) 的平坦同构映射, 则称 $h : (M, u) \rightarrow (N, v)$ 为导数为 A 的仿射映射, 并称 (M, u) 和 (N, v) 关于 h 仿射等价.

平坦曲面 (M, u) 的仿射自同胚群记作 $\text{Aff}(M, u)$. 对任意的 $h \in \text{Aff}(M, u)$, 令 Dh 为其导数, 由于

$$\det(Dh) \int_M dm = \int_M dm \quad \text{和} \quad \int_M dm < +\infty,$$

所以, $Dh \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. 易知

$$D : \text{Aff}(M, u) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

为群同态. 同态映射的像群定义为平坦曲面的 Veech 群, 记作 $\text{SL}(M, u)$.

因为仿射映射下, 像点与原像点的奇性相同, 所以, 仿射群 $\text{Aff}(X, \phi; P)$ 是 $\text{Aff}(X, \phi)$ 中集合 P 的不变子群.

设 (X, ϕ) 为平坦曲面, $x \in X$ 称作周期点, 如果 $\{h(x) : h \in \text{Aff}(X, \phi)\}$ 为有限点集.

2.3 平坦覆盖

设 (M, u) 和 (N, v) 为平坦曲面, $\pi : M \setminus E \rightarrow N \setminus F$ 为一个光滑覆盖, 其中 E 和 F 分别为 u 和 v 的奇点集. 如果 $u = \{(\pi^{-1}(U), z) : (U, z) \in V\}$, 则称 $\pi : (M, u) \rightarrow (N, v)$ 为平坦覆盖, 并称 (M, u) 和 (N, v) 关于 π 几何公度.

定理 2.1 [5] 设 $\pi : (M, u) \rightarrow (N, v)$ 是一个平坦覆盖, 则 Veech 群 $\text{SL}(M, u)$ 和 $\text{SL}(N, v)$ 可公度, 即它们存在公共的有限指标子群.

3 算术曲面

3.1 平坦环面

本小节将讨论平坦环面, 即亏格为 1 的平移曲面. 这种特殊情形可以部分揭示平移曲面理论的整体轮廓.

设 Λ 为复平面中秩为 2 的格子群. Lie 群 $\mathbb{C}/\Lambda$ 是一个亏格为 1 的闭曲面, 记为 X , dz 定义 X 的一个全纯 1- 形式, 仍记为 dz . 由经典的椭圆函数理论知, X 的全纯 1- 形式和全纯二次微分分别为 dz 和 dz^2 的常数倍. 不仅如此, 绝对周期集 $\text{Per}(dz) = \Lambda$. 因此, 不定积分 $\int dz$ 做成商映射 $\mathbb{C} \rightarrow X$ 的逆映射.

反过来, 每一个平坦环面均可通过这种方式得到. 设 (X, ω) 是一个平坦环面, 由单值化定理知, X 的万有覆盖曲面共形等价于复平面 $\mathbb{C}$. 取定一点 $p \in X$, 存在全纯覆盖映射 $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ 使得 $\pi(0) = p$ 和 $\pi^*\omega = dz$. 于是绝对周期集 $\text{Per}(\omega)$ 是复平面的秩为 2 的格子群, 并且 $\int \omega$ 诱导 (X, ω) 到 $(\mathbb{C}/\text{Per}(\omega), dz)$ 的同构映射.

取定平坦环面 (X, ω) 内一点 P , 称 $(X, \omega; P)$ 为标记平坦环面. 多值函数

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{C}, \\ q &\mapsto \int_p^q \omega \end{aligned}$$

定义一个 (X, ω) 到 $(\mathbb{C}/\text{Per}(\omega), dz)$ 的同构映射, 并将点 P 映为点 $[0]$. 如果 $Q \in X$ 在 Lie 群 $\mathbb{C}/\text{Per}(\omega)$ 中的像点是有限阶元素, 则称其为 $(X, \omega; P)$ 的有理点.

设 Λ_1 和 Λ_2 为复平面内任意两个秩为 2 的格子群, 则总存在线性变换将 Λ_1 映成 Λ_2 . 由上述讨论知, 标记平坦环面总是仿射等价的. 进而, 标记平坦环面的 Veech 群彼此共轭同构. 特别地, 考虑 Gauss 整环 $\mathbb{Z}[i]$ 生成的标记平坦环面 $(T^2, dz; [0])$, 则 $\text{Aff}(T^2, dz; [0])$ 与 $\text{SL}(T^2, dz; [0]) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ 同构.

命题 3.1 $(T^2, dz; [0])$ 的周期点恰为 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ 中的有理点.

证明 设 $[x + iy]$ 是周期点. 由定义知, 存在双曲型元素

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

保持点 $[x + iy]$ 不动, 因此存在整数对 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ 使得

$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

因为 $|a+d| > 2$ 且 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, 所以, $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

反之, 任给 $(\frac{n}{m}, \frac{q}{m}) \in \mathbb{Q}^2$, 令 K 为 m 和 p 的最小公倍数, 则对任意的 $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $A(\frac{n}{m}, \frac{q}{m})^t$ 一定包含于有限集合

$$\left\{ \left(\frac{x}{K}, \frac{y}{K} \right) \bmod \mathbb{Z}^2 : (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

证毕. □

注 3.1 与亏格为 1 的情形相对, 通常亏格大于 1 的闭 Riemann 面的全纯 1- 形式的周期集是复平面的稠密子集. 因此, 上述分析均不再成立. 然而, 对任意的 $g \geq 2$, 存在亏格为 g 的平移曲面, 其周期集为复平面内秩为 2 的格子群.

3.2 正方形铺嵌曲面

本小节介绍正方形铺嵌曲面, 详见文献 [7, 13].

首先考虑平坦环面的平坦覆盖 $\pi : (M, u) \rightarrow (T^2, dz; E)$. 如果 E 为单点集, 则 (M, u) 为 Veech 曲面. 如果 E 内多于一点, 任取一点 $P \in E$, (M, u) 为 Veech 曲面当且仅当 $E \setminus \{P\}$ 是标记环面 $(T^2, dz; P)$ 的有理点. 因此, 存在复平面的格子群 $\Lambda \supseteq \mathbb{Z}[i]$, 使得

$$\begin{aligned} (M, u) &\rightarrow (\mathbb{C}/\Lambda, dz; [0]), \\ z &\mapsto \pi(z) \bmod \Lambda \end{aligned}$$

为平坦覆盖.

定义 3.1 设 $p : (X, \omega; \mathcal{I}) \rightarrow (T^2, dz; [0])$ 为平坦覆盖, $n = \deg(p)$, 则称 (X, ω) 为 n 个正方形铺嵌曲面, $\mathcal{I}$ 为 (X, ω) 的整点集.

我们将寻找平坦环面的覆盖曲面的内蕴特征. 设 (Y, ζ) 为平坦环面, $E \subset Y$ 为有限点集, $\pi : (X, \omega; F) \rightarrow (Y, \eta; E)$ 为平坦覆盖, 则对任意的 $c \in H_1(X, \mathbb{Z})$, 有 $\int_c \omega = \int_{\pi_* c} \eta$. 因此, $\mathrm{Per}(\omega) \subset \mathrm{Per}(\eta)$ 为格子群. 如果 E 为单点集, 则 $\int_\gamma \omega = \int_{\pi_* \gamma} \eta$, 其中 γ 为 $(X, \omega; F)$ 的鞍形连接. 因为鞍形连接生成 $H_1(X; F; \mathbb{Z})$, $\pi_*(\gamma) \in H_1(Y, \mathbb{Z})$, 所以, $\mathrm{rel.Per}(\omega) \subset \mathrm{Per}(\eta)$ 为格子群.

反之, 若 $\mathrm{Per}(\omega)$ 为复平面的格子群. 令 $E = \{\int_{p_0}^p \omega \bmod \mathrm{Per}(\omega) : p \text{ 为 } (X, \omega) \text{ 的奇点}\}$, 则

$$\begin{aligned} (X, \omega) &\rightarrow (\mathbb{C}/\mathrm{Per}(\omega), dz; E), \\ p &\mapsto \int_{p_0}^p \omega \bmod \mathrm{Per}(\omega) \end{aligned}$$

为平坦覆盖. 若 $\mathrm{rel.Per}(\omega)$ 为复平面的格子群, 则 $E = \{\int_{p_0}^p \omega \bmod \mathrm{rel.Per}(\omega) : p \text{ 为 } (X, \omega) \text{ 的奇点}\}$ 为单点集,

$$(X, \omega) \rightarrow (\mathbb{C}/\mathrm{rel.Per}(\omega), dz; E),$$

$$p \mapsto \int_{p_0}^p \omega \bmod \text{rel.Per}(\omega)$$

为平坦覆盖.

命题 3.2 设 (X, ω) 是正方形铺嵌曲面, $p: (X, \omega, \mathcal{I}) \rightarrow (T^2, dz, [0])$ 为相应的平坦覆盖, $x_0 \in \mathcal{I}$, 则对任意的 $x \in X$, 有 $p(x) = \int_{x_0}^x \omega \bmod \mathbb{Z}[i]$.

证明 因为 $\text{rel.Per}(\omega) \subset \mathbb{Z}[i]$, 所以,

$$\begin{aligned} p' &: (X, \omega, \mathcal{I}) \rightarrow (T^2, dz, [0]), \\ x &\mapsto \int_{x_0}^x \omega \bmod \mathbb{Z}[i] \end{aligned}$$

是一个平坦覆盖.

仅需证明 $\{x \in X \setminus \{\omega \text{ 的奇点}\} : p(x) = p'(x)\} \neq \emptyset$ 既是开子集又是闭子集. 而 p 和 p' 都是平坦覆盖, 所以命题成立. $\square$

定义 3.2 (X, ω) 称作算术曲面, 如果它与正方形铺嵌曲面仿射同构.

4 定理证明

引理 4.1 如果平移曲面 (X, ω) 有两个简单 Jenkins-Strebel 方向, 那么 $\text{rel.Per}(\omega)$ 是复平面内秩为 2 的格子群.

证明 不失一般性, 设这两个简单 Jenkins-Strebel 方向分别为水平方向和竖直方向. 事实上, 存在

$$R \in SO(2) \quad \text{和} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

使得 $NR(X, \omega)$ 满足要求.

设 γ 为 (X, ω) 的鞍形连接. 令 h 和 h' 分别为水平柱面和竖直柱面的高度, 任取水平闭测地线 c_1 和竖直闭测地线 c_2 , 令 m 和 n 分别为 γ 与 c_1 和 c_2 的交点个数, 则 γ 的和乐向量为

$$\int_{\gamma} \omega = mh' + inh.$$

另一方面, $H_1(X, Z(\omega); \mathbb{Z})$ 可以由全体鞍形连接生成. 事实上, 设 (X, ω) 在 $\theta \neq 0$ 方向具有稠密测地线. 任取从奇点出发的水平测地线段 I , 考虑 θ 方向的叶状结构 θ 关于 I 的首次回归映射. 那么可以得到一个平面多边形, 对边缝合后得到的平移曲面与 (X, ω) 同构, 并且奇点恰为多边形的全体顶点. 因此, $H_1(X, Z(\omega); \mathbb{Z})$ 中每一个曲线均与鞍形连接的整线性组合同调.

综上所述, 相对周期集 $\text{rel.Per}(\omega)$ 为整环模 $\{mh' + inh : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 的子模. 事实上, 该子模的秩一定等于 2. 否则, 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$, 使得 $\int \text{Re}(e^{i\theta} \omega)$ 定义 X 上一个非常值的调和函数. 然而 X 是闭 Riemann 面, 不存在非常值的调和函数. 矛盾. $\square$

设平坦曲面 (M, u) 和 (N, v) 通过平坦覆盖 $\pi: (M, u) \rightarrow (N, v)$ 几何公度. 如果 (N, v) 可定向, 则 (M, u) 一定也可定向. 如果 (N, v) 不可定向, 那么存在一种典范的方式构造一个可定向的平坦曲面 (M, u) 和平坦覆盖 $\pi: (M, u) \rightarrow (N, v)$ (参见文献 [2]). 为了读者方便, 我们详细介绍这一过程:

引理 4.2 设 (X, ϕ) 为半平移曲面, 则存在平移曲面 (Y, ω) 及其对合中心对称映射 J , 即 $J \in \text{Aff}(Y, \omega)$, $DJ = -I$ 和 $J^2 = \text{id}$, 使得 $(Y, \omega)/\langle J \rangle$ 和 (X, ϕ) 平坦同构.

证明 令 $\dot{X} = X \setminus \mathcal{S}(\phi)$. 对于任意 $p \in \dot{X}$, 考虑该点处的典范坐标图 (U, z) . 显然, (U, z) 确定 $\dot{X}$ 在点 p 处的一对全纯余切向量 $(p, dz|_p)$ 和 $(p, -dz|_p)$. 于是得到 $\dot{X}$ 的全纯余切丛 $T^*\dot{X}$ 的一个子空间

$$E = \{(p, v) \in T^*\dot{X} : \text{存在典范坐标图 } (U, z), \text{ 使得 } p \in U, v = dz|_p\}.$$

下面证明子空间 E 是道路连通的. 设 p 和 q 是 $\dot{X}$ 上任意两点. 显然, 存在典范坐标图 (U, z) , 满足 $U \subset \dot{X}$ 单连通, 且 p 和 q 均含于 U . 任取 U 内连接 p 和 q 的道路 γ , 我们可以定义 E 中一条道路

$$\tilde{\gamma} = \{(p', dz|_{p'}) : p' \in \gamma\}$$

连接 $(p, dz|_p)$ 到 $(q, dz|_q)$. 为了证明子空间 E 道路连通, 我们仅需证明 E 中存在道路连接 $(p, dz|_p)$ 和 $(p, -dz|_p)$. 事实上, 由于 (X, ϕ) 不可定向, 我们可以找到 $\dot{X}$ 在 p 处的一条闭曲线 α , 以及一组正则坐标图

$$(U_0, z_0), (U_1, z_1), \dots, (U_n, z_n)$$

满足下列条件:

- (i) 对任意的 $0 \leq i < n$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, 并且 $z_i = z_{i+1} + \text{const}$;
- (ii) 点 p 含于 $U_0 \cap U_n$, $z_n = -z_0 + \text{const}$, $z_0 = z + \text{const}$.

于是得到子空间 E 中一条道路

$$\tilde{\alpha} = \{(p', v) : \text{存在 } 0 \leq i \leq n, \text{ 使得 } p' \in \alpha \cap U_i, \text{ 并且 } v = dz_i|_{p'}\}.$$

显然, $\tilde{\alpha}$ 连接 $(p, dz|_p)$ 和 $(p, -dz|_p)$.

设 (U, z) 是 (X, ϕ) 的一个典范坐标图. 显然, $\tilde{U} = \{(p, dz|_p) : p \in U\}$ 是 E 的开子集, 并且

$$\begin{aligned} \tilde{U} &\rightarrow z(U), \\ (p, dz|_p) &\mapsto z(p) \end{aligned}$$

是同胚映射. 于是得到 E 的一个坐标图册

$$\mathcal{F} = \{(\tilde{U}, z) : (U, z) \text{ 为 } (X, \phi) \text{ 的典范坐标图}\}.$$

显然, $\mathcal{F}$ 中的坐标变换在定义域的连通分支内是复平面的平移映射. 于是, $\mathcal{F}$ 诱导 E 内一个 Euclid 结构, 并且

$$\begin{aligned} J : E &\rightarrow E, \\ (p, v) &\mapsto (p, -v) \end{aligned}$$

是相应复结构下的全纯对合映射. 不仅如此,

$$\begin{aligned} \pi : E &\rightarrow \dot{X}, \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

是 Riemann 曲面间的二重覆盖映射, 并且覆盖变换群为 $\langle J \rangle$.

下面考虑 E 关于其上 Euclid 度量的完备化 $\hat{E}$. 设 $p \in \mathcal{S}(\phi)$ 是一个 k 阶奇点, (U, z) 为 p 处的典范坐标图, 则 $\tilde{U} = \{(q, v) \in E : q \in U \setminus \{p\}\}$ 是 E 的开子集. 若 $k = -1$ 或 $k \in \mathbb{N}$ 是奇数, 则 $\tilde{U}$ 连通且等距同构于 $\{\Delta_r \setminus \{0\}, z^{k+1}dz\}$; 若 $k \in \mathbb{N}$ 是偶数, 则 $\tilde{U}$ 有两个连通分支, 分别为 A 和 $B = Js(A)$, 并且每个连通分支均等距同构于 $\{\Delta_r \setminus \{0\}, z^{k/2}dz\}$.

综上所述, $\mathcal{F}$ 诱导定向闭曲面 $\hat{E}$ 上一个平移结构. 设该平移曲面为 (Y, ω) , 则 J 诱导 $\text{Aff}(Y, \omega)$ 中一个对合中心对称映射, 并且 (X, ϕ) 和 $(Y, \omega)/\langle J \rangle$ 同构等价. $\square$

定理 1.4 的证明 首先证明 (X, ϕ) 一定是 Veech 曲面. 如果 (X, ϕ) 可定向, 则存在全纯 1- 形式 ω 使得 $\phi = \omega$. 由引理 4.1 知, (X, ω) 为算术曲面. 如果 (X, ϕ) 不可定向, 由引理 4.2 知, 存在标记点集的平移曲面 $(Y, \zeta; P)$ 和平坦覆盖 $\pi : (Y, \zeta^2; P) \rightarrow (X, \phi)$. 不妨设 (X, ϕ) 中水平方向和竖直方向为简单 Jenkins-Strebel 方向. 取定一支水平叶子 C_1 和一支竖直叶子 C_2 . 对于 $(X, \zeta; P)$ 中任意一个鞍形连接 γ , 如果 $\pi(\gamma)$ 与 C_1 和 C_2 的交点个数为 m 和 n , 则其和乐向量为 $m + in \in \mathbb{Z}[i]$. 因此, $\text{rel.Per}(\zeta)$ 是 $\mathbb{Z}[i]$ 的格子群, P 为 (Y, ζ) 的周期点集. 从而, $(Y, \zeta; P)$ 为算术曲面. 又因为 (X, ϕ) 与 $(Y, \zeta; P)$ 几何公度, 所以, 由定理 2.1 知, (X, ϕ) 是 Veech 曲面.

由定理 1.3 知, Veech 曲面的叶状结构满足二分法, 每个鞍形连接方向均是一个抛物型仿射同胚的特征方向. 而鞍形连接方向稠于整个单位圆周. 因此, 抛物型仿射同胚的特征方向稠于单位圆周.

下面证明对任意两个抛物型方向 θ_1 和 θ_2 , 存在 $A_m \in \text{SL}(X, \omega)$ 使得 $A_m \theta_1$ 收敛于 θ_2 . 我们约定这里的方向 θ 均为单位向量, 对于任意 $A \in \text{GL}_+(2, \mathbb{R})$, $A\theta$ 为单位向量在线性映射下的像所定义的单位向量. 不妨设 θ_1 和 θ_2 分别为水平方向和竖直方向. 于是, $\text{SL}(X, \omega)$ 中包含下列类型元素:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu' & 1 \end{pmatrix}.$$

于是, $A_m = C^m \circ B \circ C^{-m}$ 也是 $\text{SL}(X, \omega)$ 内的抛物型元素. 而 $A_m = C^m \circ B \circ C^{-m}$ 的特征方向的斜率 $t_m = m\mu'$ 趋于 C 的特征方向的斜率 $+\infty$.

综上所述, 对任意 $\theta \in S^1$, 存在抛物元的特征方向 θ_n 收敛于 θ . 令 v 为水平方向. 对于每个 θ_n , 取

$$A_n^m \in \text{SL}(X, \omega)$$

使得 $A_n^m v$ 收敛于 θ_n . 从而存在子列 n_k 和 m_k 使得 $A_{n_k}^{m_k} v$ 收敛于 θ . $\square$

致谢 感谢审稿人给予的宝贵意见.

参考文献

- 1 Nag S. The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces. New York: Wiley, 1988
- 2 Hubbard J, Masur H. Quadratic differentials and foliations. Acta Math, 1979, 142: 221–274
- 3 Thurston W P. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. Bull Amer Math Soc (NS), 1988, 19: 417–431
- 4 Kontsevich M, Zorich A. Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. Invent Math, 2003, 153: 631–678
- 5 Vorobets Y B. Planar structures and billiards in rational polygons: The Veech alternative. Russian Math Surveys, 1996, 51: 779–817
- 6 Veech W A. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. Invent Math, 1989, 97: 553–583

- 7 Gutkin E, Judge C. Affine mappings of translation surfaces: Geometry and arithmetic. *Duke Math J*, 2000, 103: 191–213
- 8 Masur H. Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential. *Duke Math J*, 1992, 66: 387–442
- 9 Masur H. Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards. *Duke Math J*, 1986, 53: 307–314
- 10 Earle C J, Gardiner F P. Teichmüller disks and Veech’s $\mathcal{F}$ -structures. In: *Extremal Riemann Surfaces*. Contemporary Mathematics, vol. 201. Providence: Amer Math Soc, 1997, 165–189
- 11 McMullen C T. Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces. *J Amer Math Soc*, 2003, 16: 857–885
- 12 Strebel K. *Quadratic Differentials*. New York: Springer-Verlag, 1984
- 13 Hubert P, Lelièvre S. Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. *Israel J Math*, 2006, 151: 281–321

On simple Jenkins-Strebel directions

Yan Huang

Abstract Using Jenkins-Strebel direction one can realise quadratic differentials in the combinatorial way. We prove that for any quadratic differential the simple Jenkins-Strebel directions are either the empty set, the singleton or a subset dense in S^1 .

Keywords quadratic differential, Jenkins-Strebel directions, arithmetic surfaces

MSC(2010) 32G15, 30C60, 30C75, 30F60

doi: 10.1360/N012019-00073