# 能容纳分数电荷色单态费米子和低质量 磁单极的 SU(9) 大统一模型

东方晓 杜东生 周咸建 薛丕友 (中国科学院高能物理研究所,北京)

# 摘 要

本文提出了能容纳分数电荷色单态费米子的三个大统一模型. 其中一个模型还可同时容纳低质量的磁单极. 所有这三个模型中都包含三代普通费米子,同时包含具有分数或整数电荷的外来态轻子和夸克.

# 一、引言

Fairbank 小组多次宣布他们找到了带有分数电荷的物质<sup>[1]</sup>。如果他们的结果是可靠的,则有两种可能的解释: (1)颜色对称 SU(3)。被打破了,实验上看到的是自由夸克<sup>[2]</sup>或双夸克系统<sup>[3]</sup>。 (2)颜色 SU(3)。仍保持,实验看到的是色单态且带分数电荷的轻子。有些人在 SU(7)大统一模型中<sup>[4]</sup>讨论了第 (2)种可能性。 但遗憾的是,这些模型只能容纳一代普通费米子因而与实验冲突。

另一方面,虽然大统一理论的许多模型对于宇宙中重子数的不对称性(重子多于反重子)有较完满的解释,但这些模型中大多都存在超重(≳10<sup>16</sup>GeV)的磁单极,这点与目前宇宙能量密度的上限有矛盾<sup>[5]</sup>。因此,许多人试图在大统一理论中容纳低质量的磁单极。

在文献 [6] 中,我们讨论了三个 SU(18) 大统一模型。 该模型能容纳分数电荷色单态费 X 米子和低质量磁单极。

本文提出三个 SU(9) 大统一模型。从下面的讨论可以看到,从大统一群的结构上看,欲使模型能容纳分数色单态费米子和低质量磁单极并能容纳三代普通费米子,SU(9) 模型是一个很有兴趣的候选者。其中模型 A 满足下述三点要求:

- 1. 有三代普通费米子,
- 2. 存在分数电荷色单态,
- 3. 存在低质量磁单极.

模型B和C只满足(1),(2)两条要求。

# 二、模型A

#### 1. 模型

本文 1981 年 11 月 25 日收到。 1982 年 12 月 28 日收到修改稿。

如果我们坚持不重复任何不可约表示,则不存在满足我们第一节提出的要求 1,2 的 *SU* (9)大统一模型. 因此,我们放宽"不重复"不可约表示这一要求.

此时易见

$$[9, 8]_{L} + 2[9, 2]_{L} + [9, 6]_{L},$$
 (2.1)

满足无反常条件,这里 [N, m] 表示 SU(N) 群的m阶全反对称张量。(2.1)式还 可 改 写 为:

$$[9,1]_R + 2[9,2]_L + [9,3]_R.$$
 (2.2)

如果选 SU(9) 的电荷算子为:

$$Q = \operatorname{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0, q_1, q_2, q_3, q_4), \tag{2.3}$$

则(2.2)式可按 SU(5) 作如下的分解(略去一维表示)

$$[9,1]_{R} + 2[9,2]_{L} + [9,3]_{R} \rightarrow [5,1]_{R}(0) + 2[5,2]_{L}(0) + 2[5,1]_{T}(A) + [5,3]_{R}(0) + [5,2]_{R}(A) + [5,1]_{R}(B),$$
(2.4)

这里 (0) 表示 SU(5) 标准电荷填充。  $(A) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ ,即 SU(5) 标准电荷值再加上  $q_1$  或  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$  等, $(B) = (q_1 + q_2, q_1 + q_3, q_1 + q_4, q_2 + q_5, q_2 + q_4, q_3 + q_4)$ .

对模型 A, 我们选  $q_1 = -1/3$ ,  $q_2 = -2/3$ ,  $q_3 = 1/3$ ,  $q_4 = 2/3$ , 则

$$Q_A = \text{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0, -1/3, -2/3, 1/3, 2/3).$$
 (2.5)

利用  $[5,3]_R(0) \sim [5,2]_L(0)$ , 则 (2.4) 式化为

$$[5,1]_{R}(0) + 3[5,2]_{L}(0) + 2[5,1]_{L}(-1/3,-2/3,1/3,2/3) + [5,2]_{R}(-1/3,-2/3,1/3,2/3) + [5,1]_{R}(-1,0,1/3,-1/3,0,1).$$
(2.6)

上式中, $[5,1]_R(1/3,-1/3)$  可与  $[5,1]_L(1/3,-1/3)$  结合成 SU(5) 实表示,故可获得 超重质量 ( $\sim 10^{15} \text{GeV})^{[7]}$ ,因而可把它们省去不写。剩下的有

$$3[5,1]_{R}(0) + 3[5,2]_{L}(0) + 2[5,1]_{L}(-2/3,2/3) + [5,1]_{L}(-1/3,1/3) + [5,1]_{R}(-1,1) + [5,2]_{R}(-1/3,-2/3,1/3,2/3).$$
(2.7)

可容易算出,低质量费米子味道总数为 16. 故理论可以满足渐近自由条件。 由 (2.7) 式可看出,此模型可容纳三代通常的费米子。 [填入  $3[5,1]_R(0)+3[5,2]_L(0)$ ],理论还可容纳电荷为  $\pm 5/3$ , $\pm 4/3$ , $\pm 2/3$ , $\pm 1/3$ , $\pm 1$ 的外来态轻子和夸克。

# 2. 自发破缺和低质量磁单极

自发破缺分三步,即

$$SU(9) \xrightarrow{M_1} SU(5) \times SU(4) \times U'(1) \equiv G_2,$$

$$\xrightarrow{M_1} SU(3)_c \times SU(2) \times U(1) \equiv G_1,$$

$$\xrightarrow{M_0} SU(3)_c \times U(1)_{em} \equiv G_{00}$$

第一步破缺可由伴随表示的 Higgs  $\phi$ ! 来实现,其非零真空期望值为:

$$\langle \phi_i^i \rangle = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & b & & \\ & & b & & \\ & & & b & & \\ & & & b & & \\ & & & a & \end{pmatrix}$$
 (2.8)

这里

$$T_r \langle \phi_i^i \rangle = 5a + 4b = 0$$
,  $b = -\frac{5}{4} a \sim 10^{15} \text{ GeV}$ .

即  $M_2 \sim 10^{15} \text{GeV}$ . 因此,质子衰变由  $M_2$  决定且与通常 SU(5) 模型一样, $r_p \sim 10^{31\pm 2}$  年。第二步破缺复杂一些,这里不再给出,但要求 SU(3)。是从 SU(5) 破缺来的,SU(2) 是从 SU(4) 破缺来的。第三步破缺是标准的。

为了避免质量  $\sim M_2/\alpha$  的超重磁单极的存在<sup>[8]</sup>(其中  $\alpha$  为精细结构常数),需要做到 U(1) 生成元与 U'(1) 生成元正交。

U'(1) 的生成元为:

$$T_{1,1}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{18}} \operatorname{diag}(-4/5, -4/5, -4/5, 1, 1, 1, 1, -4/5, -4/5). \tag{2.9}$$

SU(5) 子群的对角生成元如下:

$$T_{5,13}^{2} = \frac{1}{2} \operatorname{diag} (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$T_{5,13}^{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{diag} (1, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$T_{5,15}^{2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{diag} (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 0),$$

$$T_{5,24}^{2} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \operatorname{diag} (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -4).$$
(2.10)

SU(4) 子群的对角生成元有

$$T_{455}^{2} = \frac{1}{2} \operatorname{diag} (0, 0, 0, 1/2, -1/2, 0, 0, 0, 0),$$

$$T_{458}^{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \operatorname{diag} (0, 0, 0, 1, 1, -2, 0, 0, 0),$$

$$T_{4515}^{2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{diag} (0, 0, 0, 1, 1, 1, -3, 0, 0).$$
(2.11)

因

$$I_3 = \text{dia } g(0, 0, 0, 1/2, -1/2, 0, 0, 0, 0) = T_{433}^2,$$
 (2.12)

U(1) 生成元  $T_{1,1}$  由 Gell-mann-西岛关系唯一确定,即

$$Q_A = I_4 + Y = I_3 + CT^1_{110} \tag{2.13}$$

所以 U(1) 生成元为:

$$T_{1,1}^1 = \sqrt{\frac{9}{35}} \operatorname{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1/2, 1/2, -1/3, -2/3, 1/3, 2/3).$$
 (2.14)

易证

$$T_{1,1}^{1} = -\sqrt{\frac{18}{105}} T_{5,15}^{2} - \sqrt{\frac{2}{7}} T_{5,24}^{2} + \sqrt{\frac{5}{21}} T_{4,8}^{2} + \sqrt{\frac{32}{105}} T_{4,15}^{2}. \tag{2.15}$$

显然, $T_{in}$  与  $T_{in}$  正交。因此,第一步自发破缺不给磁单极以质量。 第二步破缺时,磁单极将 获得  $\gtrsim M_{\rm I}/\alpha$  量级的质量。 此模型我们将取  $M_{\rm I}\sim 10^4{\rm GeV}$ ,故磁单极质量  $\sim 10^4{\rm GeV}$ 。 这 与目前实验上确定的宇宙能量密度的上限一致.

#### 3. $\sin^2\theta$ 的重整化

在大统一点  $M_2$ ,  $\sin^2\theta(M_2)$  为:

$$\sin^2\theta(M_2) = \frac{T_r(I_3)^2}{T_rQ_A^2} = 9/44, \qquad (2.16)$$

运用重整化群标准方法[5]可得下面的方程组:

$$\begin{cases} \sin^2 \theta(M_0) = 9/44 - \frac{2}{3\pi} \alpha(M_0) \left\{ \frac{35}{8} \ln \frac{M_1}{M_0} - \ln \frac{M_2}{M_1} \right\}, \\ \sin^2 \theta(M_0) = \frac{\alpha(M_0)}{\alpha(M_0)} + \frac{11}{6\pi} \ln \frac{M_2}{M_0}, \end{cases}$$
(2.17)

$$\left|\sin^2\theta(M_0) = \frac{\alpha(M_0)}{\alpha_s(M_0)} + \frac{11}{6\pi}\ln\frac{M_2}{M_0},\right| \tag{2.18}$$

其中  $\alpha(M_0)$  和  $\alpha_s(M_0)$  分别为在  $M_0$ 点的精细结构常数和强作用耦合常数.

取  $M_0 \sim 100 \,\mathrm{GeV}$ , 则  $\alpha(M_0) \sim 1/128.5^{[10]}$ . 我们不知道  $\alpha_s(M_0)$  的精确值,但 PETRA 的最新实验给出[ $^{111}$ ],  $\alpha_s(M_0)$  在 0.10—0.20 之间。 将上述参数代人 (2.17), (2.18) 式, 我们给 出下面的表 1,以结束对模型 A的讨论.

$M_0(\text{GeV})$	M <sub>i</sub> (GeV)	$M_{\rm a}({ m GeV})$	$\alpha_s(M_0)$	$\sin^2\theta(M_0)$	
				(2.17)式	(2.18)式
100	104	1015		0.21	
100	10'	1015		0.19	
100		1015	0.10		0.21
100		1015	0.13		0.20
100	10⁴	1018		0.22	
100	10*	10 <sup>18</sup>		0.20	
100		1018	0.20		0.21
100		1018	0.15		0.22

sin 2θ(Ma) 的值

#### 1. 模型

模型  $B \to A$ 的主要差别是电荷算子 O。这里

$$Q_B = \operatorname{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0, -1/6, -1/3, 1/6, 1/3). \tag{3.1}$$

此时 (2.4) 式化为:

$$[9,1]_{R} + 2[9,2]_{L} + [9,3]_{R} \rightarrow [5,1]_{R}(0) + 3[5,2]_{L}(0) + 2[5,1]_{L}(-1/6,-1/3,1/6,1/3) + [5,2]_{R}(-1/6,-1/3,1/6,1/3) + [5,1]_{R}(-1/2,0,1/6,-1/6,0,1/2),$$
(3.2)

其中  $[5,1]_L(-1/6,1/6)$  和  $[5,1]_R(-1/6,1/6)$  配对形成 SU(5) 实表示,因而可获得超重 ( $\sim 10^{15} \text{GeV}$ ) 质量、略去它们不写,则剩下如下的表示可填低质量费米子

$$3[5,1]_{R}(0) + 3[5,2]_{L}(0) + 2[5,1]_{L}(-1/3,1/3) + [5,1]_{L}(-1/6,1/6) + [5,1]_{R}(-1/2,1/2) + [5,2]_{R}(-1/6,-1/3,1/6,1/3).$$
(3.3)

同样的,此模型低质量费米子总味道数也是16. 因而,理论是渐近自由的.

由 (3.3) 式可看出, $3[5,1]_R(0) + 3[5,2]_L(0)$  正好可填三代普通费米子. 其他表示属于外来态费米子,其电荷有  $\pm 1/6$ ,  $\pm 1/2$ ,  $\pm 5/6$ ,  $\pm 7/6$  等等.

#### 2. 自发破缺和磁单极质量

自发破缺的机制与模型A完全一样。 由于电荷算子Q与模型A不同,故第二步 破 缺 时 U(1) 的生成元将与(2.14) 式不同。这里,U(1)生成元

$$\hat{T}_{1,1}^1 = \sqrt{\frac{9}{20}} \operatorname{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1/2, 1/2, -1/6, -1/3, 1/6, 1/3). \tag{3.4}$$

易证

$$\hat{T}_{1n}^{1} = \frac{9}{20\sqrt{2}} T_{1n}^{2} + \frac{2}{\sqrt{15}} T_{4n}^{2} + \frac{11}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} T_{4n5}^{2}$$

$$-\frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{10}} T_{5n5}^{2} - \frac{13}{20\sqrt{2}} T_{5n24}^{2}, \qquad (3.5)$$

(3.5)式右方各生成元表达式见 (2.9)—(2.11) 式.显然, $\hat{T}_{in}$  与  $T_{in}^2$  不正交。因此,第一步破缺磁单极将获得  $\sim M_2/\alpha$  量级的质量 [8]。由  $M_2 \gtrsim 10^{14}$ — $10^{15}$ GeV,故磁单极质量  $\gtrsim 10^{16}$ GeV。这一点是不太令人满意的,

#### 3. sin 的重整化

在大统一点 $M_2$ 

$$\sin^2\theta(M_2) = \frac{T_r(l_3^2)}{T_r(Q_B^2)} = 9/29, \tag{3.6}$$

用标准的重整化群方法[8]可得  $\sin^2\theta(M_o)$  满足的联立方程

$$\begin{cases} \sin^2 \theta(M_0) = \frac{9}{29} - \frac{11}{3\pi} \alpha(M_0) \left\{ \ln \frac{M_1}{M_0} + \frac{1}{80} \ln \frac{M_2}{M_1} \right\}, \\ \sin^2 \theta(M_0) = \frac{\alpha(M_0)}{\alpha_s(M_0)} + \frac{11}{6\pi} \alpha(M_0) \ln \frac{M_2}{M_0}. \end{cases}$$
(3.7)

将  $\alpha(M_0) = \alpha(100 \text{GeV}) \sim 1/128.5$  和  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\alpha_s(M_0)$  之值代入上方程组,可得表 2. 显然,如果取  $M_2 \sim 10^{18} \text{GeV}$ ,则质子寿命要  $> 10^{40}$  年,因而在短期内不可能进行质子衰变的实验观测。

$M_0({ m GeV})$	$M_1(\text{GeV})$	M₂(GeV)	$\alpha_i(M_0)$	$\sin^2\theta(M_0)$	
				(3.7) 式	(3.8) 式
100	104	1015		0.27	
100	106	1015		0.22	
100	107	1015		0.20	
100	108	1019		0.18	
100		1015	0.11		0.21
100		1015	0.13		0.20
100		1015	0.15		0.19
100		1015	0.18		0.18
100	104	1018		0.26	
100	106	1018		0.22	
100	108	1018		0.18	
100		1018	0.15		0.22
100		1018	0.18		0.21
100		1018	0.20		0.206

表 2  $\sin^2\theta(M_0)$  值

# 四、模型C

电荷算子 Q 取为:

$$Q_r = \text{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0, 1/3, -1/3, 2/3, -2/3)$$
. (4.1) 它与模型  $A$  中的  $Q$  唯一的不同是本征值的位置有变动,这种变动将对磁单极质量和  $\sin^2 \theta$  的重整化产生巨大影响。这一点,下面将会看到。

按(4.1),(2.4)式将变为:

$$[9,1]_{R} + 2[9,2]_{L} + [9,3]_{R} \rightarrow [5,1]_{R}(0) + [5,2]_{L}(0) + 2[5,1]_{L}(1/3,-1/3,2/3,-2/3) + [5,3]_{R}(0) + [5,2]_{R}(1/3,-1/3,2/3,-2/3) + [5,1]_{R}(0,1,-1/3,1/3,-1,0), (4.2)$$

去掉超重费米子表示  $[5,1]_R(-1/3,1/3)+[5,1]_L(-1/3,1/3)$ , 还剩下

$$3[5,1]_R(0) + 3[5,2]_L(0) + 2[5,1]_L(2/3,-2/3) + [5,1]_L(1/3,-1/3) + [5.1]_R(1,-1) + [5,2]_R(1/3,-1/3,2/3,-2/3).$$
 (4.3)

低质量费米子总味道数也是16,故理论满足渐近自由,其他性质与模型 A 类似。

# 2. 自然破缺和磁单极质量

自发破缺机制与模型A完全相同。 唯一的不同是第二步破缺时 U(1) 的生成元。 模型 C中 U(1) 的生成元

$$\widetilde{T}_{1n}^1 = \sqrt{\frac{9}{35}} \operatorname{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1/2, 1/2, 1/3, -1/3, 2/3, -2/3).$$
 (4.4)

易证

$$\tilde{T}_{1,1}^{1} = \frac{9}{10} \sqrt{\frac{2}{7}} T_{1,1}^{2} + \frac{1}{\sqrt{105}} T_{4,8}^{2} + \sqrt{\frac{7}{30}} T_{4,15}^{2} - \sqrt{\frac{27}{70}} T_{5,15}^{2} + \sqrt{\frac{7}{50}} T_{5,24}^{2}. \tag{4.5}$$

显然, $\widetilde{T}_{\rm in}$  与  $T_{\rm in}$  不正交,因此,磁单极将获得  $\sim M_2/\alpha$  的超重质量<sup>[8]</sup>。 这一点是不令人满意的。

#### 3. sin² θ 的重整化

在大统一点

$$\sin^2\theta(M_2) = \frac{T_r(I_3^2)}{T_r(O_c^2)} = 9/44 \tag{4.6}$$

与前面一样,我们也有如下的联立方程

$$\begin{cases} \sin^2 \theta(M_0) = \frac{9}{44} - \frac{7}{12\pi} \alpha(M_0) \left\{ \ln \frac{M_2}{M_1} + 5 \ln \frac{M_1}{M_0} \right\}, \\ \sin^2 \theta(M_0) = \frac{\alpha(M_0)}{\alpha_s(M_0)} + \frac{11}{6\pi} \alpha(M_0) \ln \frac{M_2}{M_0}. \end{cases}$$
(4.7)

由上述两方程计算的  $\sin^2\theta(M_0)$  见表 3.

$M_{\mathfrak{g}}(\mathrm{GeV})$	$M_1(\text{GeV})$	$M_2({ m GeV})$	$\alpha_s(M_0)$	$\sin^2\theta(M_0)$	
				(4.7) 式	(4.8) 式
100	10³	1015		0.14	
100	10*	1015		0.13	
100	105	1015		0.12	
100		1015	0.20		0.17
i 00		1015	0.30		0.16
100		1015	0.40		0.15
100	103	1014		0.15	
100	10*	1014		0.14	
100		1014	0.2		0.16
			0.3		0.15

表 3 sin<sup>2</sup>θ(M<sub>0</sub>) 之值

由表 3 可见,联立方程 (4.7), (4.8) 给出的自治值  $\sin^2\theta(M_0) \sim 0.15$ , 而相应的  $\alpha_s(M_0) \sim 0.3-0.4$ , 即  $\sin^2\theta(M_0)$  的值太少,而  $\alpha_s(M_0)$  的值偏大.

# 五、小 结

本文给出了三个 SU(9) 大统一模型. 模型 A 可容纳三代普通费米子,低质量磁单极和带有分数电荷的色单态轻子. 而模型 B 和 C 不能容纳低质量磁单极,在其他方面这后两个模型与第一个类似. 为了给出合理的  $\sin^2\theta(M_0)$ ,引入三步自发破缺是必要的. 比较模型 A 和 C,电荷算子 Q 本征值的位置,对模型的物理结果有重要影响. 值得指出,在 SU(9) 模型中,还容纳一些零质量带电色多重态费米子和零质量带电色单态费米子。我们假设量子色动力学中颜色禁闭是可信的,因此,理论中存在零质量带电色多重态费米子是自然的,但对于零质量带电色单态费米子似乎需要一个新的机制来解释. 这个问题有待进一步讨论.

### 参考文献

- [1] Larue, G. S., Phillips, J. D. & Fairbank, W. M., Phys. Rev. Lett., 46(1981). 967 and references therein.
- [2] Rújula, A. de., Giles, R. C. & Jaffe, R. L., Phys. Rev., D17(1978), 285.
- [3] Slansky, R., Goldman, T. & Shaw, G. L., (to be published).
- [4] L. F. Li, Talk given at 1981 Summer School of Particle Physics, Hefei China, June, 1981. Goldberg, H., Kephart, T. W. & Vaughn, M. T., Northeastern University Preprint NUB 2517, 1981.
- [5] Guth, A. H., SLAC-PVB-2576 July, 1980 (T). Guth, A. H. Weinberg, E. G., CU-TP-183, 1980.
  Zeldovich, Y. B. & Khlopov, M. Y., Phys. Lett., 79B(1978), 239, Preskill J. P., Phys. Rev. Lett., 43 (1979), 1365.
- [6] Fang-Xiao Dong, Hung-sheng Tu, Pei-yon Xueand Xian-jian Zhou. Auu, Physics, V145 (1983). 1.
- [7] Georgi, H., Nucl. Phys., B156(1979).
   126. Barbieri, R. & Nanopoulos, D. V., Phys. Lett., 91B (1980), 369.
   Barbieri, R., Nanopoulos, D. V., Morchio, G. & Strocchi, F. ibid., 90B (1980).
   91.
- [8] Scott, D. M., Nucl. Phys., B171(1980), 95.
- [9] Georgi, H., Quinn, H. & Weinberg. S.. Phys. Rev. Lett., 33(1974). 451. Dawson, S. & Georgi, H., ibid., 43 (1979), 821. Umenura, I. & Yamamoto, K., Prog. Theor. Phys., 64(1980). 278.
- [10] Marciano, W. J., Phys. Rev., D20 (1979), 274.
- [11] Barber, D. P. et al., Phys. Rev. Lett., 43(1979), 830. Brantelik, R., et al., Phys. Lett., 86B(1979),
   243. Berger, Ch., et al., ibid., 86B(1979), 418. Bartel, W., et al., DESY report 79/77, 1979.