复动力系统的淹没点与玻璃态相变

乔建永

北京邮电大学理学院, 北京 100876

E-mail: qjy@bupt.edu.cn

重整化群理论是在粒子物理研究中为克服微扰发散困难而进行标度变换, 从而得到群不变性的一种理论. 该理论于1971年由Wilson^[1]提出, 被广泛用于研究凝聚态物理的相变问题, 其影响巨大, 于1982年获得诺贝尔物理学奖. 近年来, 重整化群理论在信息传播、系统科学、材料科学和工程技术等许多学术领域都有十分深刻的应用, 展示出极强的普遍应用价值. 本文推介复动力系统与统计物理的交叉研究方向, 希望以重整化群理论为桥梁, 进一步探讨复动力系统混沌集合的拓扑复杂性与玻璃态相变的深层次联系.

1 复动力系统和淹没点

复动力系统理论研究复解析映照的迭代动力学. 1920年前后, Fatou^[2]和Julia^[3]受Newton迭代法和Möbius变换群有关思想的启发, 开始研究复解析映照的迭代序列的稳定性问题, 并创立了Fatou-Julia理论. 此后, 这方面的研究几乎停滞了60年. 20世纪80年代, 伴随着非线性科学的崛起, 复动力系统获得了划时代的巨大发展, 相继催生出以Fields奖得主Yoccoz^[4]和McMullen^[5]为代表完成的一系列划时代成果. 回首过去40多年的研究, 不得不说, 计算机技术的飞速进步也为其发展作出了无可替代的贡献. 正是计算机技术的发展, 才使我们看到了复动力系统演化的绚烂图景(图1(a)).

对于给定的复解析映照 R , 记 R 的 k 次迭代为 R^k . 为了使得迭代能够延续下去, 我们自然要求 R 的定义域和值域是一致的. 粗略而言, 如果序列 $\{R^k\}$ 在某一点 z 的局部邻域内的收敛

乔建永 北京邮电大学教授. 长期从事复动力系统、复分析、算法复杂性、物理和工程问题中的复解析方法等方面的研究.

一致性比较好, 我们称这个点 z 为稳定点. 全体稳定点组成的集合 $F(R)$ 称为Fatou集, 其余集 $J(R)$ 称为Julia集. $F(R)$ 为开集, $J(R)$ 为闭集. 进一步, 把Fatou集的每个连通分支称为Fatou分支(如图1(a), 挖掉Julia集后剩余的块状区域^[6]). 这样, 就把 R 的定义域按序列 $\{R^k\}$ 收敛的稳定性做出了二元划分: Fatou集和Julia集^[7]. 为了增加感性认识, 可以想象一大块钢化玻璃龟裂以后的形象(图1(b)), Julia集有点像龟裂纹, Fatou分支类似于破裂后的小玻璃块(图1(b)).

Fatou集自然称为稳定集. 它和Julia集具有一系列令人吃惊的美妙性质. 比如, Julia集一般是非空集; Fatou集是完全不变集, 即 $F(R)$ 在 R 映照下的前像和后像仍然是 $F(R)$, 这是设计计算机程序绘制Julia集图像的基本依据. 还有, $\{R^k\}$ 在 $J(R)$ 上具有周期点的稠密性、拓扑传递性, 以及对初始值的敏感依赖性, 这三条性质说明 R 的迭代动力系统在 $J(R)$ 上呈现混沌

图1 用计算机绘制的Julia集的图像^[6](a), 以及龟裂玻璃照片(b)

Figure 1 A computer plot of Julia sets^[6](a), and a picture of the cracked-glass (b)

状态^[6].

大家知道,分形几何学是研究无限复杂且具有自相似结构的几何学.相对于研究对象为整数维(零维的点、一维的线、二维的面、三维的立体等)几何体的经典几何学,分形几何研究的重点对象是小数维几何体,而这里的Julia集恰恰就是这样的研究对象.因此,Julia集处于动力系统、分形几何和混沌学这三大非线性科学分支的交汇点,它为非线性科学的发展提供了前所未有的“三合一”的研究载体.

最终周期性定理是Sullivan^[8]于1980年前后得到的,它是复动力系统现代研究的里程碑成果:如果 R 是次数大于1的有理映照,则 R 的Fatou分支均是最终周期的,即在 R 的不断映照下,每一个Fatou分支最终都要进入周期循环之中.在Fatou集和Julia集的二元划分中,上述结果扫除了Fatou集上的全部障碍,为聚焦Julia集上关键几何和拓扑问题做出了划时代贡献,拉开了复动力系统大发展的帷幕.复分析与非线性科学的思想、方法和内容的交叉融合,为许多重要经典问题的解决以及新的动力学现象的发现注入了前所未有的活力.

毫无疑问,复解析映照在数学、物理和几乎所有科学技术领域都是一个重要的研究工具和思想方法,其类型可谓丰富多彩.为什么上述仅仅描述有理映照动力学性质的定理却如此重要?这是由单值化定理决定的.事实上,一切复解析映照的迭代问题,都可以通过单值化定理约化为以下5种平面上的迭代动力系统问题之一:复球面、复平面、穿孔复平面、环面、双曲型曲面.前两种映照依次对应为复球面上的有理映照、复平面上的整函数映照,后三种对应的动力系统的性质比较清楚,能够给出相对统一的刻画^[7].因此,复动力系统研究的主要对象只有有理映照和整函数映照的动力系统.

关于有理映照和整函数映照的Julia集的几何研究,围绕面积问题和维数问题有一系列出色的研究成果;关于Julia集的拓扑研究,重点是连通性问题、局部连通性问题以及拓扑复杂性问题.前文已经指出,Julia集是一个复杂的分形几何研究对象,主要体现在其具有分数几何维数.事实上,它在平面(或球面)上分布的拓扑性质也非常复杂.比如,有下述Makienko猜想^[9]:对于有理映照 R ,如果 R^2 没有完全不变Fatou分支,则 R 存在淹没点.这里,淹没点是指Julia集上那些不在任一Fatou分支边界上的点.无须从理论上全面理解这一概念的拓扑学内涵和意义,但为了对淹没点集合的复杂性有一个直接的感性理解,你可以在纸上画一串半径趋于零的同心圆周,把这些圆周组成的集合看成Julia集,其余集看成Fatou集,那么,你马上就可以得到一个“人造”的例子:圆心就是一个“淹没点”.

如果Makienko猜想成立,则意味着淹没点在Julia集上存在的普遍性.然而,淹没点的存在性直到1988年才被McMullen^[10]首次揭示.他在研究著名的McMullen族的动力学时,发现该映照族中存在具有淹没分支的有理映照.淹没点问题成

为研究Julia集拓扑复杂性的核心问题.注意到McMullen族中有理映照的次数均不小于5,McMullen^[10]提出低次有理映照淹没点的存在性问题.

1991年,Beardon^[7]得到如下结论:设有理映照 R 的Julia集不连通,且所有Fatou分支均是有穷连通的,则 R 存在淹没分支.遗憾的是,Beardon结果的第二个条件无法验证,故不能对McMullen的问题做出任何回答.关于Makienko猜想较为完备的研究结果如下:如果有理映照 R 的Julia集不连通,或者是连通且局部连通的,则Makienko猜想正确^[9,11,12].这里,局部连通的概念是刻画平面集合拓扑复杂性的基本概念.对于平面上一个连通的集合 E ,设 p 为 E 上一点,如果在 p 的任何小邻域内都存在更小的邻域,使得 E 在其上是连通的,则称 E 在 p 处是局部连通的;如果 E 在每一点处均是局部连通的,则称 E 是局部连通的集合.

上述结果彻底刻画了有理映照淹没点的存在性,给出了McMullen问题的肯定性答案.由于局部连通性是刻画Julia集拓扑复杂性的另一个重要概念,故上述结论彻底揭示了有理映照Julia集的拓扑复杂性.关于整函数映照有如下结论:设 f 是复平面上的有限型超越整函数映照,其Fatou集非空,则 f 具有淹没点的充分必要条件是 f 的Fatou集不连通.至今,它仍然是刻画整函数淹没点存在性的最为完备的结果.虽然围绕淹没点的几何和拓扑性质还有一些深入的研究,但关于淹没点的本质特性,特别是动力系统在其中的性态还远远没有被揭示^[11-19].

2 重整化变换与Yang-Lee零点

宏观而言,重整化的思想是“粗粒化”的思想,即把多粒子问题转化为少粒子问题.其关键是寻找一个变换,使这一过程得以实现,称为重整化变换.在二维情况,变换往往是有理映照或整函数映照.1983~1986年,Peitgen、Douady、De Seze等从不同研究问题出发,几乎同时发现了重整化变换族具有十分丰富和重要的复动力学性质^[20].具体地说,重整化变换族的Julia集对应物理模型的复相变点集.所谓复相变点集,是杨振宁和李政道^[21,22]于1952年在统计力学中建立的著名Yang-Lee理论中的基本概念.该理论把温度的概念推广到复平面上,构建了热力学系统的复相变理论.这项工作被公认为杨振宁和李政道最为杰出的代表性成就之一^[23].

Potts模型:对于给定的晶格体,在每个格点上放置一个粒子 σ_i ,每个粒子具有 λ 种状态,也就是说, σ_i 可取1, 2, ..., λ .将其配分函数记为 Z .杨振宁和李政道^[21,22]把 $\exp(J/(kT))$ 记为自变量 z ,其中 J 是相互作用常数, k 是Boltzmann常数, T 是温度.如果把 z 推广为复数,则配分函数 $Z(z)$ 自然化为一个复变函数. $Z(z)$ 在复平面上的零点称为Yang-Lee零点,这些零点完整刻画了配分函数的性质,也就是系统的统计力学性质.对于有限个格点, $Z(z)$ 是一个系数为正实数的多项式,零点都在复平面上;只有当格点数趋于无穷大时,零点才能靠近实轴.

更严格地, 杨振宁和李政道^[21,22]证明了著名的Yang-Lee圆周定理: 二维格气模型Yang-Lee零点的极限点集是单位圆周, 它与实轴的交点即为相变点. 对常见物理系统, Yang-Lee圆周定理也能够成立, 但对一般统计模型, 则留下了Yang-Lee零点在复平面上的分布问题^[21,22].

Yang-Lee理论是统计物理中奠基性的伟大成就, 它引领相变理论研究长达半个世纪之久. 聂华桐曾提到^[24]: “杨先生告诉过我, 他在这个工作中所花的时间远远超过他的其他工作……现在变成了一篇经典性的文章.” 杨振宁^[25]介绍: “1952年末论文发表后, 爱因斯坦让他的助手Bruria Kaufman来请我去见他. 我随她来到爱因斯坦的工作室, 他对该文表示了极大的兴趣. 这并不奇怪, 因为热力学和统计力学是他最喜爱的领域之一.” 2007年, 统计物理和混沌动力学奠基人之一Ruelle^[26]在其专著*The Mathematician's Brain*中写道: “长期以来我都为杨-李圆周定理着迷, 我认为在这个领域仍然有未被揭示的神秘.” 事实上, 他有杰出的后续研究工作相继发表^[27,28].

1984年, Derrida等人^[20]研究了标准金刚石型等级晶格上的Potts模型, 证明了其重整化变换是一个四次有理映照族, 且Yang-Lee零点的极限集是其Julia集. 本文定义更为广泛的广义金刚石型等级晶格, 由下述规则迭代生成: 首先, 设有一个由两个节点和一条棱构成的晶格, 称为1-级结构; 然后, 用每个分支含有 n 条棱的具有 m 个分支的结构取代上面的1-级结构, 形成2-级结构; 接着, 用2-级结构代替这一结构中的每一条棱, 得到3-级结构; ……重复上述迭代构造过程, 直至无穷多次, 最终形成 mn -金刚石型等级晶格(图2). 在晶格的每个节点上都放一个具有 λ 个状态的自旋, 相邻自旋间具有经典铁磁相互作用, 使得自旋倾向于顺排, 就构成了等级晶格上的Potts模型.

上述Derrida等人^[20]考虑的标准金刚石型等级晶格其实是这里 $m=n=2$ 的特殊情况. 后来, 他们导出的此自旋系统重整化变换的Julia集被证实都是连通且局部连通的集合^[29].

对于给定的解析映照族, 其动力学的差异性一直是复动力系统研究的中心问题之一. 考察带一个复参数的二次多项式族, 根据Julia集将其进行动力学分类, 有著名的Mandelbrot

图2 $m=n=2$ 时的广义金刚石型等级晶格

Figure 2 The generalized diamond hierarchical lattice for $m=n=2$

集. 1980年, Mandelbrot和Wheeler^[30]用计算机绘制出第一张相对清晰的Mandelbrot集图形(图3(a)), 这成为复动力系统和分形几何(乃至非线性理论)发展史上的一个重要事件. 起初, 借助于Mandelbrot绘制的计算机图形, 人们似乎觉得它“由一些小岛组成”. 1985年, Douady和Hubbard却证明了一个相反的结论: M 是连通集合^[7].

为了考察标准金刚石型等级晶格上Potts模型重整化变换的动力系统分类, Peitgen和Richter^[31]把参数 λ 拓展到复平面, 定义了类Mandelbrot集 M_T . 图3(b)是计算机绘制的 M_T 的图像, 从中也看不出 M_T 的连通性. 1986年, Peitgen和Richter^[31]提出问题: M_T 是连通的吗? 2010年, 这一问题也有了肯定的答案^[32]. 按动力系统的研究兴趣, 进一步的问题是: M_T 是局部连通的吗?

由于标准金刚石型等级晶格上Potts模型重整化变换的Julia集全是连通的, 人们自然要问: 其他物理模型重整化变换的Julia集是否也有这样的拓扑性质? 为了研究这个问题, 需要进一步讨论上述广义金刚石型等级晶格上的Potts模型, 可以求得其重整化变换 U 为一个带三参数 m 、 n 和 λ 的 mn 次有理映照族. 讨论该族变换可以给出上述连通性问题的答案, 事实上, 可以给出该族重整化变换Julia集不连通的充分必要条件. 进一步得到, 如果该族重整化变换的Julia集是连通的, 则它必是局部连通的. 其Fatou集的每个连通分支要么是Jordan区域(即边界为Jordan曲线的单连通区域), 要么是完全不变域. Fatou分支的这些良好拓扑性质, 为进一步研究自由能的边界性态提供了基本条件^[33-35].

图3 (网络版彩色)Mandelbrot集^[30](a)和类Mandelbrot集 M_T ^[31](b)

Figure 3 (Color online) The Mandelbrot set M ^[30] (a), and the Mandelbrot-like set M_T ^[31] (b)

考虑极限状态,有Yang-Lee零点的渐进圆周分布猜测^[36]:当参数 λ 趋向无穷大时, U 的Julia集趋向于一个几何圆周,其Hausdorff维数趋于1.注意到杨振宁和李政道^[21,22]最初的圆周定理,人们对渐进圆周分布产生了极大的物理学本质联想.这一猜测被证明^[33]后,引发了一系列新的研究工作^[6,37,38].

由上可见,Julia集为相应物理模型自由能 J 的复奇点集.无穷远点在物理上对应绝对零度.把包含无穷远点的Fatou分支记为 A ,我们可以得到如下结论: A 的边界是 J 的导函数的自然边界, J 的二阶导函数在 A 的边界上不连续.当 A 为Jordan区域时,对于 A 的边界上的几乎所有点 a ,临界指数等于一个常数值.按厄伦菲斯特分类, A 边界上的相变为二级相变^[33-35].

3 淹没点与玻璃态相变

研究广义金刚石型等级晶格上Potts模型的重整化变换,关于其动力学复杂性已经有完备的分类定理.在多数情况下,该族重整化变换的动力学性质十分清晰,其Julia集与实轴相交于有限个离散的点,对应于通常的二级相变点,系统的性质随尺度增大趋向于一个平均值.但令人吃惊的是,这种物理上看起来平凡的系统也有难以驾驭的复杂情况.比如,对 $m=2$ 及每个奇数 $n>3$,存在参数 $\lambda \in (1, 2)$,以及常数 $h \in (0, 1)$,使得对应的重整化变换 U 为类Feigenbaum映照,且其Julia集包含实数区间 $[0, h]$.这意味着Yang-Lee零点的极限集与正实轴的交集可以包含一个由淹没点构成的区间,该区间中的点全是自由能的奇点,此时我们已经不能用简单的一级或二级相变来描述系统性质的变化.注意到 U 的复自变量 $z = \exp(J/(kT))$,因此, z 在区间 $[0, h]$ 上的无规跳动显示,等效耦合强度 J 在重整化群变换下不停变动,物理上意味着不同尺度上系统具有很不同的性质,与自旋玻璃的经典模型类似^[39].上述实轴上类Feigenbaum映照 U ,起源于参数(例如温度)变化下的倍周期分岔路径,物理上对应一系列混合新型相变的发生,最后凝结于奇异的玻璃态^[40].因此,相应Potts模型建立了体系随温度改变向玻璃态转化的过程与复动力学中淹没点集合的对应关系^[33,39,41,42].

回首1952年的Yang-Lee单位圆定理,那时无疑无法想象

Yang-Lee零点会有如此复杂的Feigenbaum型分布.我们能够发现Yang-Lee零点如此复杂而又美妙的分布,主要原因应该得益于重整化群方法和复动力系统的交叉研究.图4是计算机绘制的包含淹没点的Yang-Lee零点极限集^[34].

前文提到,Yang-Lee零点极限集与实轴交点的物理意义是相变点.注意,上述Julia集与正实轴的交集是一个区间,就不能当作通常意义的相变点了.由于其对应的参数 λ 在区间 $(1, 2)$ 中(计算机模拟显示 $\lambda=1.824\cdots$ 附近有一个合适的值点), λ 为自旋状态数,通常为自然数,其为小数的情况似乎物理意义还不够鲜明,自然的问题是:是否存在 λ 为自然数的物理模型,其淹没点位于正实轴上?

受上述研究问题驱动,可以构建长程作用下的广义金刚石型等级晶格上的Potts模型——铁磁和反铁磁竞争的金刚石Potts模型^[43].注意,在广义金刚石型等级晶格的构造过程中,总是将上一层级结构中的棱“替代”为铁磁基本金刚石型结构,得到下一层级.现在,保留原来的棱(如图2所示用虚线表示的棱),在上述“替代”基础上,在保留的棱(虚线)上加一个长程反铁磁作用.这个模型的重整化变换 U 为一个带四参数 m 、 n 、 τ 和 λ 的 mn 次有理映照族(其中参数 τ 代表长程反铁磁作用).通过该族重整化变换动力学的研究可以发现^[43]:在铁磁和反铁磁竞争的金刚石Potts模型中,当 n 为偶数时,形成铁磁链和反铁磁链的逐级竞争,该族重整化变换的Julia集中,存在 λ 为自然数、淹没点位于正实轴上的情况.由上可见,这种淹没点的出现对应玻璃态相变现象^[39,40,43].

4 展望

玻璃态相变是凝聚态物理中的重要难题,它是2005年Science公布的125个人类面临的最具挑战性科学前沿问题的第47个问题.玻璃态相变的研究一直在不断地发展和更新.有关的理论模型非常多,从20世纪50年代出现的自由体积理论,到现在还在不断完善的模式耦合理论,以及其他众多理论,都只能解释玻璃态相变中的一部分现象,完备的玻璃态相变理论远未建立^[41].在众多玻璃态相变的理论模型中,鲜有与核心数学具体前沿成果紧密相关的模型^[41,42].本文推介

图4 (网络版彩色) $m=5$, $n=2$, $\lambda=1.824$ 时 U 的Julia集(a),及其在坐标原点附近的放大图(b)^[34]

Figure 4 (Color online) The Julia set of U for $m=5$, $n=2$, $\lambda=1.824$ (a), and the amplification of (a) near the origin (b)^[34]

的玻璃态相变的淹没点机理研究, 与复动力系统的核心问题密切相关. 虽然这一路径遇到了该领域Makienko猜想这样的大困难, 但通过复动力系统的理论框架, 我们有可能把现代复分析、几何、拓扑, 以及混沌动力学的前沿思想、理论和方法引入玻璃态相变的研究中来, 从而引发更多具有显著科学价值的问题. 首先, 从复动力系统角度看, 自由能在Fatou分支上具有解析性, 而在Julia集上解析性完全消失了. 经典研究方法是考察自由能向Fatou分支边界延拓的边值性态, 从而探索系统在Fatou分支边界点上的相变性质, 但是淹没点的出现使得这种方法彻底失效了. 由此可见, 要刻画玻璃态相变问题, 面对的困难正是淹没点的拓扑复杂性. 下述问题是由它们之间的上述联系带来的.

问题1. 在上述铁磁和反铁磁竞争的金刚石Potts模型中, 系统在淹没分支端点是几级相变吗? 可否求出其临界指数?

几年前, 有理论研究^[44]表明, 可以从实验上直接观测到Yang-Lee圆周定理中的零点. 此后, 这一理论结论得到实验证实^[45]. 这一工作不仅在统计物理中极为重要, 同时也为研究复杂实际体系中隐藏在物理参数复数域内新的物理现象提供了一种新的方法和实验实现的可能性. 此工作引起了Yang-Lee零点实验研究的新的兴趣^[46].

问题2. 上述铁磁和反铁磁竞争的金刚石Potts模型中的淹没点对应的玻璃态相变现象可以在实验中观察吗?

问题3. 上述铁磁和反铁磁竞争的金刚石Potts模型的普适性如何, 能否直接推广到包含不规则连接的体系中?

致谢 感谢国家重点研发计划(2019YFB1406500)和国家自然科学基金(12071047)的资助. 感谢文章修改过程中北京邮电大学兰岳恒教授的有益建议.

推荐阅读文献

- 1 Wilson K G. Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture. *Phys Rev B*, 1971, 4: 3174–3183
- 2 Fatou P. Sur les e'quations fonctionnelles. *Bull Soc Math France*, 1920, 48: 208–314
- 3 Julia G. Memoire sur l'iteration de fonctions rationnelles. *J Math Pure Appl*, 1918, 8: 47–245
- 4 Yoccoz J C. Conjugation differentiable des diffeomorphismes du cercle dont la nombre de rotation verifie une condition diophantienne. *Ann Sci Ecole Norm Sup*, 1984, 17: 337–358
- 5 McMullen C. Complex dynamics and renormalization. In: *Annals of Mathematics Studies*. Princeton: Princeton University Press, 1994
- 6 Qiao J, Yin Y, Gao J. Feigenbaum Julia sets of singularities of free energy. *Ergod Th Dynam Sys*, 2010, 30: 1573–1591
- 7 Beardon A F. *Iteration of Rational Functions*. New York: Springer-Verlag, 1991
- 8 Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann Math*, 1985, 122: 401–418
- 9 Qiao J Y. Topological complexity of Julia sets. *Sci China Ser A-Math*, 1997, 40: 1158–1165
- 10 McMullen C. Automorphisms of rational maps. In: Drasin D, ed. *Holomorphic Functions and Moduli*. New York: Springer-Verlag, 1988
- 11 Qiao J Y. The buried points on the Julia sets of rational and entire functions. *Sci China Ser A*, 1995, 38: 1409–1419
- 12 Qiao J Y. The Julia set of the mapping $z \rightarrow z \exp(z + \mu)$. *Chin Sci Bull*, 1994, 39: 529–533
- 13 Baker I N. Dynamics of slowly growing entire functions. *Bull Austral Math Soc*, 2001, 63: 367–377
- 14 Rippon P J, Stallard G M. On multiply connected wandering domains of meromorphic functions. *J London Math Soc*, 2008, 77: 405–423
- 15 Domínguez P, Hernández A, Sienra G. Residual Julia set for functions with the Ahlfors's property. *J Difference Equ Appl*, 2014, 20: 1019–1032
- 16 Curry C P, Mayer J C, Tymchatyn E D. Topology and measure of buried points in Julia sets. *Fund Math*, 2013, 222: 1–17
- 17 Jiang Y P. Renormalization and geometry in one-dimensional and complex dynamics. In: *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1996
- 18 Curry C P, Mayer J C, Meddaugh J, et al. Any counterexample to Makienko's conjecture is an indecomposable continuum. *Ergod Th Dynam Sys*, 2009, 29: 875–883
- 19 Ng T W, Zheng J H, Choi Y Y. Residual Julia sets of meromorphic functions. *Math Proc Camb Phil Soc*, 2006, 141: 113–126
- 20 Derrida B, de Seze L, Itzykson C. Fractal structure of zeros in hierarchical models. *J Stat Phys*, 1983, 33: 559–569
- 21 Yang C N, Lee T D. Statistical theory of equations of state and phase transitions. I. Theory of condensation. *Phys Rev*, 1952, 87: 404–409
- 22 Lee T D, Yang C N. Statistical theory of equations of state and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model. *Phys Rev*, 1952, 87: 410–419
- 23 Shi Y. Beauty and Physics: 13 important contributions of Chen Ning Yang. *Int J Mod Phys A*, 2014, 29: 1475001
- 24 Xu S L, Meng D M. Biography of Chen Ning Yang (in Chinese). Shanghai: Fudan University Press, 1997 [徐胜蓝, 孟东明. 杨振宁传. 上海: 复旦大学出版社, 1997]

- 25 Yang C N. Collected works of Chen Ning Yang (in Chinese). Shanghai: East China Normal University Press, 1998 [杨振宁. 杨振宁文集. 上海: 华东师范大学出版社, 1998]
- 26 Ruelle D. The Mathematician's Brain. Princeton: Princeton University Press, 2007
- 27 Ruelle D. Characterization of Lee-Yang polynomials. *Ann Math*, 2010, 171: 589–603
- 28 Ruelle D. Existence of a phase transition in a continuous classical system. *Phys Rev Lett*, 1971, 27: 1040–1041
- 29 Qiao J, Li Y. On connectivity of Julia sets of Yang-Lee zeros. *Commun Math Phys*, 2001, 222: 319–326
- 30 Mandelbrot B B, Wheeler J A. The fractal geometry of nature. *Am J Phys*, 1983, 51: 286–287
- 31 Peitgen H O, Richter P H. The Beauty of Fractal. Berlin: Springer-Verlag, 1986
- 32 Wang X G, Qiu W Y, Yin Y C, et al. Connectivity of the Mandelbrot set for the family of renormalization transformations. *Sci China Math*, 2010, 53: 849–862
- 33 Qiao J Y. Complex Dynamics of Renormalization Transformation (in Chinese). Beijing: Science Press, 2010 [乔建永. 重整化变换的复动力学. 北京: 科学出版社, 2010]
- 34 Qiao J Y. Julia sets and complex singularities of free energies. *Mem Amer Math Soc*, 2014, 234: 1–102
- 35 Bleher P M, Lyubich M Y. Julia sets and complex singularities in hierarchical Ising models. *Commun Math Phys*, 1991, 141: 453–474
- 36 Hu B, Lin B. Yang-Lee zeros, Julia sets, and their singularity spectra. *Phys Rev A*, 1989, 39: 4789–4796
- 37 Gao J Y, Qiao J Y, Zhai Y. Misiurewicz points on the Mandelbrot-like set concerning renormalization transformation. *Sci China Math*, 2014, 57: 2539–2548
- 38 Gao J, Qiao J. Julia set concerning Yang-Lee theorem. *Phys Lett A*, 2006, 355: 167–171
- 39 McKay S R, Berker A N, Kirkpatrick S. Spin-glass behavior in frustrated Ising models with chaotic renormalization-group trajectories. *Phys Rev Lett*, 1982, 48: 767–770
- 40 Mézard M, Parisi G, Sourlas N, et al. Nature of the spin-glass phase. *Phys Rev Lett*, 1984, 52: 1156
- 41 Binder K, Kob W. Glassy materials and disordered solids: An introduction to their statistical mechanics. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2005
- 42 Binder K, Young A P. Spin glasses. *Rev Mod Phys*, 1986, 58: 802
- 43 Jiang K, Qiao J, Lan Y. Chaotic renormalization flow in the Potts model induced by long-range competition. *Phys Rev E*, 2021, 103: 062117
- 44 Wei B B, Liu R B. Lee-Yang zeros and critical times in decoherence of a probe spin coupled to a bath. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 185701
- 45 Peng X, Zhou H, Wei B B, et al. Experimental observation of Lee-Yang zeros. *Phys Rev Lett*, 2015, 114: 010601
- 46 Brandner K, Maisi V F, Pekola J P, et al. Experimental determination of dynamical Lee-Yang zeros. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 180601

Summary for “复动力系统的淹没点与玻璃态相变”

Buried points in complex dynamical systems and glassy transitions

Jianyong Qiao

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

E-mail: qjy@bupt.edu.cn

A new interdisciplinary research direction is addressed across the fields of statistical mechanics and complex dynamical systems together with specific research topics, such as the connection between buried points and glassy transitions.

First, pertinent results on complex dynamical systems are delivered. Let f be a complex analytical mapping from the Riemann sphere (or the complex plane) to itself, i.e., f is rational or entire. The stable set $F(f)$ of this dynamical system is called the Fatou set of f , and the unstable set $J(f)$ the Julia set. Every component of $F(f)$ is called a Fatou component. Obviously, the boundary of each Fatou component belongs to $J(f)$. If a point in $J(f)$ does not belong to the boundary of any Fatou component, then it is a buried point of f , which is often used to describe the topological complexity of the Julia set. In this quest, Makienko's conjecture is undoubtedly one of the most important problems which is stated as follows: Let R be a rational mapping and $F(R)$ contain infinitely many components. If every Fatou component is not completely invariant, then R has buried points. The known result is the following: If $J(R)$ is disconnected, or connected and locally connected, then Makienko's conjecture is true; if $J(R)$ is disconnected and R has a buried point, then it must have buried components. Concerning entire functions, we have: If $F(f)$ is not empty, then f has a buried point if and only if $F(f)$ is disconnected. Following the above results, interesting topological properties on the sets of buried points are deduced. However, many open problems remain unsolved in regard to these special points.

In the second part, we explained the topological complexity of the set of Yang-Lee zeros. In 1952, Yang C.N. and Lee T. D. established an analytic theory in statistical mechanics, summarized as the circle theorem: For statistical models like 2-dimensional lattice gas, the zeros of the partition function condense to the unit circle. Henceforth, the importance of the distribution of Yang-Lee zeros in the complex plane is emphasized for general models. In 1983, researchers including B. Derrida, L. De Seze and C. Itzykson found that the distribution of Yang-Lee zeros can be cast into a problem on Julia sets of renormalization transformations.

In the third part, we describe the connection between buried points and glass transitions. Concerning the Potts model on a generalized diamond hierarchical lattice, we present a new type of distribution of Julia sets of renormalization transformations, which is called the real Feigenbaum-type distribution of buried points. Physically, this means that the limiting set of Yang-Lee zeros could contain an interval of the real axis, all of which are singularities of the free energy function. This important observation indicates that the exploration of renormalization transformation dynamics is essential to the understanding of the phenomenon of glassy transitions.

Finally, we discussed the theoretical value and practical significance of the above research topics and directions. It is well known that *Science* published 125 most challenging scientific questions in 2005 to celebrate the Journal's 125th anniversary, among which Question 47 is “What is the essence of the glassy substance?”. There are many theoretical models for glassy transitions, but up to now, a complete theory remains illusive. Perhaps, the connection between complex dynamics and glassy transition established above could shed new light on this old problem with the help of powerful tools from mathematics, as ever before.

Potts model, glassy transition, complex dynamical system, Julia set, buried point

doi: [10.1360/TB-2021-0862](https://doi.org/10.1360/TB-2021-0862)