锥状 Kähler-Einstein 度量开性定理

张振雷

首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: zhleigo@aliyun.com

收稿日期: 2018-05-24; 接受日期: 2018-10-18; 网络出版日期: 2018-12-10

国家自然科学基金 (批准号: 11771301) 资助项目

摘要 本文对 Donaldson 关于锥状 Kähler-Einstein 度量存在性的开性定理给一个简要介绍.

关键词 锥状 Kähler-Einstein 度量 开性定理 Schauder 估计

MSC (2010) 主题分类 53C07, 53C23, 53C25

1 引言

本文是作者在 2016 年北京大学“几何分析与退化椭圆型方程”讲习班的系列报告的综述. 报告的目的是介绍 Donaldson 关于锥状 Kähler-Einstein 度量的开性定理^[1]. 该定理在 2012 年由 Tian^[2] 以及稍后 Chen 等^[3] 运用锥状 Kähler-Einstein 度量的形变方法解决 Fano 流形上 Kähler-Einstein 度量存在性问题中起到重要作用. 开性定理的证明策略与光滑流形上的存在性证明一样, 都是运用隐函数定理理解复 Monge-Ampère 方程; 不同之处在于细节上更复杂: 首先要建立锥状度量空间上偏微分方程线性理论, 其次要理解锥角变化导致的度量奇异性的变化.

Kähler-Einstein 度量存在性问题是近 40 年来微分几何学的一个核心研究课题. 1978 年, Yau^[4] 在一篇影响深远的文章中解决了 Calabi 猜想, 证明了第一 Chern 类平凡或小于 0 情形的 Kähler-Einstein 度量存在性. Aubin^[5] 也独立证明了第一 Chern 类小于 0 的情形. 此后, 作为一个微分几何学经典问题, 第一 Chern 类大于 0 的 Kähler 流形 (Fano 流形) 上的 Kähler-Einstein 度量存在性问题一直持续了很多年. 1990 年, Tian^[6] 解决了 Fano 曲面上的存在性问题. 1997 年, Tian 在一篇关键的文献^[7] 中提出 K-稳定性条件, 并证明了如果 Fano 流形存在 Kähler-Einstein 度量, 没有全纯向量场, 则流形是 K-稳定的. 一般地, Yau-Tian-Donaldson 猜想称 Kähler-Einstein 度量的存在性与 Fano 流形的 K-稳定性等价. 该猜想的充分性部分最终在 2012 年由 Tian 和 Chen 等解决.

锥状 Kähler-Einstein 度量是一类特殊的奇异 Kähler-Einstein 度量, 对这类度量的研究可以追溯到 20 个世纪 90 年代 Troyanov^[8] 及 Luo 和 Tian^[9] 在 Riemann 面上的存在性工作. Tian^[10] 提出了

英文引用格式: Zhang Z L. Openness theorem of conic Kähler-Einstein metrics (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1–10, doi: 10.1360/N012018-00141

高维锥状 Kähler-Einstein 度量的存在性问题以及对一些代数不等式的应用. 后续的存在性工作及其在 Chern 数不等式的应用参见文献 [11–19].

我们将问题限制在 Fano 流形上. 记 M 是一个紧致 n 维 Fano 流形, K_M 是 M 的典则线丛. 设 λ 是一个正整数, D 是 M 的一个光滑除子, 其同调类的 Poincaré 对偶是 $\lambda c_1(M)$. 设 $0 < \beta < 1$ 是一个实数, ω 是 $M \setminus D$ 上的光滑 Kähler 度量, 并且在 D 附近一致等价于锥状度量

$$\omega_\beta = \sqrt{-1} \left(\frac{dz_1 \wedge d\bar{z}_1}{|z_1|^{2(1-\beta)}} + \sum_{i=2}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i \right), \quad (1.1)$$

其中 $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ 是坐标系, 使得 $D = \{z_1 = 0\}$ 局部成立, 则 ω 称为在 D 上具有 $2\pi\beta$ 角度的锥状度量; 若 $\omega \in 2\pi c_1(M)$ 并且满足流 (current) 方程

$$\text{Ric}(\omega) = \mu\omega + 2\pi(1-\beta)[D], \quad (1.2)$$

则 ω 称为在 D 上具有 $2\pi\beta$ 角度的锥状 Kähler-Einstein 度量. Li 和 Sun^[15] 及 Berman^[19] 证明了, 当角度 $\beta > 0$ 充分小时, 流形上总存在 D 上有 $2\pi\beta$ 角度的锥状 Kähler-Einstein 度量. 另一方面, Donaldson^[1] 证明了如下开性定理 (参见文献 [1, 定理 2]):

定理 1.1 记 $\beta_0 \in (0, 1)$ 和 $\mu_0 = 1 - (1 - \beta_0)\lambda$. 对取定的 $0 < \alpha < \min(1, \beta_0^{-1} - 1)$, 若 M 上存在 D 上具有 $2\pi\beta_0$ 角度的 C^{α, β_0} Kähler-Einstein 度量, 则对充分接近 β_0 的实数 β , 存在 D 上具有 $2\pi\beta$ 角度的 $C^{\alpha, \beta}$ Kähler-Einstein 度量.

锥状 Kähler-Einstein 度量的详细定义参见第 3.2 小节. 下面将对 Donaldson 的证明做简单介绍, 内容包括模型空间的 Laplace 算子线性理论、锥状 Kähler 度量空间的 Schauder 估计理论和锥状 Kähler 度量下的复 Monge-Ampère 方程可解性问题等. 锥状度量的 Schauder 估计有新的证明和推广, 参见文献 [14, 18, 20, 21] 等.

2 平坦模型

2.1 Green 函数的多重齐次展开

取定 $\beta \in (0, 1)$. 设 (r, θ) 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的极坐标, $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$. 记 $\mathbb{R}_\beta^2 = (\mathbb{R}^2, g_\beta)$, 其中 g_β 是 $\mathbb{R}^2$ 上角度为 $2\pi\beta$ 的锥度量

$$g_\beta = dr^2 + \beta^2 r^2 d\theta^2. \quad (2.1)$$

很显然, 以原点为中心的旋转保持该度量不变. 可以运用古典的 Fourier 展开表示空间 $\mathbb{R}_\beta^2$ 的热核和 Green 函数, 然后运用经典的位势分析方法得到 Laplace 算子的线性理论.

首先回顾 Bessel 函数. 考虑下述阶数为 $\nu \in \mathbb{C}$ 的 Bessel 方程:

$$z^2 \frac{d^2 J}{dz^2} + z \frac{dJ}{dz} + (z^2 - \nu^2)J = 0. \quad (2.2)$$

该方程一个特殊解为

$$J_\nu(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2i}}{\Gamma(i+1) \cdot \Gamma(\nu+i+1)}, \quad (2.3)$$

其中 Γ 是 Gamma 函数, 定义为

$$\Gamma(w) = \int_0^{\infty} t^{w-1} e^{-t} dt, \quad \text{对任意 } w \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

负整数集合是 Γ 的奇异点集. J_ν 称为阶数为 ν 的 Bessel 函数. 当 ν 不是整数时, J_ν 和 $J_{-\nu}$ 是 Bessel 方程两个线性无关的特解; 当 ν 是整数时, 有关系 $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$. 当 $\nu = k$ 是整数时, J_k 还有如下表示:

$$J_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}z \sin \theta - \sqrt{-1}k\theta} d\theta. \quad (2.5)$$

换句话说, J_k 是函数 $e^{\sqrt{-1}z \sin \theta}$ 的 Fourier 系数, 即

$$e^{\sqrt{-1}z \sin \theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) e^{\sqrt{-1}k\theta}. \quad (2.6)$$

我们还需要另一族 Bessel 函数

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{\sqrt{-1}\nu\pi}{2}} J_\nu(\sqrt{-1}z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{\nu+2i}}{\Gamma(i+1) \cdot \Gamma(\nu+i+1)}. \quad (2.7)$$

引理 2.1 ^[22] 对任意 $\nu \in \mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Re}(\nu) > -1$ 和 $p > 0$, 有

$$\int_0^{\infty} t e^{-pt^2} J_\nu(at) J_\nu(bt) dt = \frac{1}{2p} e^{-\frac{a^2+b^2}{4p}} I_\nu\left(\frac{ab}{2p}\right). \quad (2.8)$$

空间 $\mathbb{R}_\beta^2$ 的 Laplace 算子

$$\Delta_\beta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.9)$$

对任意整数 k , 易证函数 $\phi = \phi_{k,\lambda}(r, \theta) = J_{k/\beta}(\lambda r) e^{\sqrt{-1}k\theta}$ 满足特征方程

$$\Delta_\beta \phi = -\lambda^2 \phi. \quad (2.10)$$

所以, 函数

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \phi_{k,\lambda}(r, \theta) \overline{\phi_{k,\lambda}(r', \theta')} d\lambda^2 \right) &= 2 \cos k(\theta - \theta') \cdot \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda^2 t} J_{k/\beta}(\lambda r) J_{k/\beta}(\lambda r') d\lambda \\ &= \cos k(\theta - \theta') \cdot \frac{1}{t} e^{-\frac{r^2+r'^2}{4t}} I_{k/\beta}\left(\frac{rr'}{2t}\right) \end{aligned}$$

是热方程的解. 形式地, 根据 Fourier 级数理论, $\mathbb{R}_\beta^2$ 的热核有如下展开:

$$H_t(r, \theta; r', \theta') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\beta t} e^{-\frac{r^2+r'^2}{4t}} I_{k/\beta}\left(\frac{rr'}{2t}\right) \cos k(\theta - \theta'). \quad (2.11)$$

容易验证, $\int_{\mathbb{R}_\beta^2} H_t(r, \theta; r', \theta') dv_{g_\beta} = 1$ 对任意 $t > 0$ 成立. 当 $\beta = 1$ 时, 根据 Fourier 展开 (2.6), 可以证明 $H_t(r, \theta; r', \theta') = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}{4t}}$, 这是 Euclid 平面上的热核.

下面考虑乘积空间 $\mathbb{R}_\beta^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, $n \geq 3$, 其中 $\mathbb{R}^{n-2}$ 是 $n-2$ 维 Euclid 空间. 该空间点的坐标记为 $x = (r, \theta, \bar{x})$. 根据乘积不变性, $\mathbb{R}_\beta^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ 的热核

$$H_t(x, y) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2 + r'^2 + R^2}{4t}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k/\beta} \left(\frac{rr'}{2t} \right) \cos k(\theta - \theta'), \quad (2.12)$$

其中 $R = |\bar{x} - \bar{y}|$ 是 $\bar{x}$ 到 $\bar{y}$ 的 Euclid 距离. Green 函数定义为

$$G(x, y) = \int_0^\infty H_t(x, y) dt. \quad (2.13)$$

形式地, 有级数表示

$$G(r, \theta; r', \theta'; R) = \beta^{-1} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k(r, r'; R) \cos k(\theta - \theta'), \quad (2.14)$$

其中

$$G_k(r, r'; R) = \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2 + r'^2 + R^2}{4t}} I_{k/\beta} \left(\frac{rr'}{2t} \right) dt. \quad (2.15)$$

容易验证, 当 $rr' < (r - r')^2 + R^2$ 时, 上述级数收敛, 从而 Green 函数有级数表示. 容易验证 Green 函数满足下述性质:

- (1) $G(x + z; y + z) = G(x; y)$, 对任意 $z \in S = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}$;
- (2) $G(\lambda x; \lambda y) = \lambda^{2-n} G(x; y)$, 对任意 $\lambda > 0$,

其中 (1) 是在 $\mathbb{R}^{n-2}$ 因子上的平移不变性; (2) 是空间伸缩的变换性质. 根据这些性质, Donaldson^[1] 导出如下 Green 函数的多重齐次 (polyhomogeneous) 展开:

引理 2.2^[1] 当 $r, r' < \frac{R}{2}$ 时,

$$G(r, \theta; r', \theta'; R) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{c_{i,j,k}}{R^{n-2}} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{k}{\beta} + 2i} \cdot \left(\frac{r'}{R} \right)^{\frac{k}{\beta} + 2j} \cdot \cos k(\theta - \theta'), \quad (2.16)$$

其中 $c_{i,j,k}$ 是常数系数; 当 $r < \frac{r'}{4}$ 时,

$$G(r, \theta; r', \theta'; R) = r'^{(2-n)} \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k} \left(\frac{R^2}{r'} \right) \cdot \left(\frac{r}{r'} \right)^{\frac{k}{\beta} + 2i} \cdot \cos k(\theta - \theta'), \quad (2.17)$$

其中 $a_{i,k}$ 是光滑函数系数.

2.2 Schauder 估计

取定 $\beta \in (0, 1)$. 考虑 $\mathbb{R}_\beta^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ 上的 Schauder 估计, $n \geq 3$.

首先说明 $G(x, y)$ 是一个积分算子的核. 在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上定义 L^2 范数 $\|f\| = (\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dv_{g_\beta})^{\frac{1}{2}}$. 记 $\mathcal{H}$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在该范数下完备化得到的 Hilbert 空间. 对任意 $\rho \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q = \frac{2n}{n+2}$, 定义算子

$$L_\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \rho dv_{g_\beta}.$$

根据 Sobolev 不等式, 以及 g_β 与 Euclid 度量一致等价, 该算子是一个有界算子:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \rho dv_{g_\beta} \right| \leq \|f\|_{\frac{2n}{n-2}} \|\rho\|_{\frac{2n}{2n+2}} \leq C(n, \beta) \cdot \|f\|_{\mathcal{H}} \|\rho\|_{\frac{2n}{2n+2}},$$

即 $\|L_\rho\| \leq C(n, \beta) \cdot \|\rho\|_{\frac{2n}{n+2}}$. 根据 Riesz 表示定理, 存在唯一的元素 $G\rho \in \mathcal{H}$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \rho dv_{g_\beta} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla(G\rho) \rangle dv_{g_\beta}, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (2.18)$$

换句话讲, 存在有界线性算子 $G: L^q \rightarrow \mathcal{H}$ 使得下述方程在弱意义下成立:

$$\Delta_{g_\beta}(G\rho) = \rho. \quad (2.19)$$

显然, Green 函数是 G 的积分核, 即

$$G\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y) \rho(y) dv_{g_\beta}, \quad \text{对任意 } \rho \in L^q. \quad (2.20)$$

对于任意 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 v , 记 $|v|$ 为其 Euclid 长度. 取定 $\alpha \in (0, 1)$, 对 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f , 定义 Hölder 半范数

$$[f]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \quad (2.21)$$

类似地可以定义区域上的 Hölder 半范数. 定义 D 为下述算子之一:

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial x_j}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.22)$$

其中 $i, j = 2, \dots, n$. 运用引理 2.2 中 Green 函数的多重齐次展开, Donaldson^[1] 证明了如下命题:

命题 2.1^[1] 对任意 $0 < \alpha < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, 存在常数 $C = C(n, \beta, \alpha)$ 使得

$$[D(G\rho)]_\alpha \leq C[\rho]_\alpha, \quad \text{对任意 } \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.23)$$

记 ∇ 为下述一阶算子之一: $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_j}$. 容易验证

$$\nabla(G\rho)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x G(x, y) \rho(y) dv_{g_\beta}(y), \quad \text{对任意 } \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.24)$$

运用 Green 函数的多重齐次展开, 同样可以证明下面的命题:

命题 2.2 对任意 $0 < \alpha < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, 存在 $C = C(n, \alpha, \beta)$ 使得

$$\|G\rho\|_{C^0} + \|\nabla(G\rho)\|_{C^0} + [\nabla(G\rho)]_\alpha \leq C\|\rho\|_{C^0}, \quad \text{对任意 } \rho \in C_0^\infty(B_1(0)), \quad (2.25)$$

其中 $B_1(0)$ 是 Euclid 空间的单位球.

通过截断函数, 可以将上述估计局部化, 得到下述命题:

命题 2.3 (1) 对任意 $0 < \alpha < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, 存在 $C = C(n, \beta, \alpha)$ 使得

$$\|\nabla f\|_{C^0(B_{\frac{1}{2}}(0))} + [\nabla f]_{\alpha, B_{\frac{1}{2}}(0)} \leq C(\|\Delta f\|_{C^0(B_1(0))} + \|f\|_{C^0(B_1(0))}); \quad (2.26)$$

(2) 对任意 $0 < \alpha < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, 存在 $C = C(n, \alpha, \beta)$ 使得

$$\|Df\|_{C^0(B_{\frac{1}{2}}(0))} + [Df]_{\alpha, B_{\frac{1}{2}}(0)} \leq C(\|\Delta f\|_{C^0(B_0(0))} + [\Delta f]_{\alpha, B_1(0)} + \|f\|_{C^0(B_1(0))}), \quad (2.27)$$

其中 D 是 (2.22) 中定义的二阶微分算子.

3 锥状 Kähler 度量

3.1 复模型空间

取定 $\beta \in (0, 1)$. 记 $\mathbb{C}_\beta = (\mathbb{C}, \omega_\beta)$, 其中 ω_β 是复平面上的 Kähler 度量形式,

$$\omega_\beta = \frac{\sqrt{-1} dz \wedge d\bar{z}}{|z|^{2(1-\beta)}}. \quad (3.1)$$

记 $z = \rho e^{\sqrt{-1}\theta}$, 其中 (ρ, θ) 是复平面的极坐标. 令 $r = \beta^{-1}\rho^\beta$, 则在坐标 (r, θ) 中, ω_β 对应的度量是上节定义的锥状度量

$$g_\beta = dr^2 + \beta^2 r^2 d\theta^2. \quad (3.2)$$

记 $\mathbb{C}_\beta \times \mathbb{C}^{n-1} = (\mathbb{C}^n, \omega_\beta)$, $n \geq 2$, 其中 ω_β 定义为

$$\omega_\beta = \sqrt{-1} \left(\frac{dz_1 \wedge d\bar{z}_1}{|z_1|^{2-2\beta}} + \sum_{i \geq 2} dz_i \wedge d\bar{z}_i \right). \quad (3.3)$$

在超曲面 $S = \{0\} \times \mathbb{C}^{n-1}$ 之外, ω_β 定义了光滑锥状度量.

令 $\epsilon = dr + \sqrt{-1}r d\theta$ 是 $\mathbb{C}^n \setminus S$ 上的光滑 $(1, 0)$ 形式. 容易验证 $\epsilon = e^{-\sqrt{-1}\theta} |z_1|^{\beta-1} dz_1$, 则 $\epsilon, dz_2, \dots, dz_n$ 构成 $\mathbb{C}^n \setminus S$ 上 $(1, 0)$ 形式一组基. 定义算子 ∇_p 使得

$$\partial = \epsilon \cdot \nabla_1 + \sum_{j \geq 2} dz_j \cdot \nabla_j, \quad (3.4)$$

则 $\nabla_1 = e^{\sqrt{-1}\theta} |z_1|^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\nabla_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$. 类似地, $\epsilon \wedge \bar{\epsilon}, \epsilon \wedge d\bar{z}_j, dz_i \wedge \bar{\epsilon}, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ ($i, j \geq 2$) 给出 $\mathbb{C}^n \setminus S$ 上的 $(1, 1)$ 形式一组基. 定义算子 $D_{p\bar{q}}$, $p, q \geq 1$, 使得

$$\partial \bar{\partial} = \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \cdot D_{1\bar{1}} + \sum_{j \geq 2} \epsilon \wedge dz_j \cdot D_{1\bar{j}} + \sum_{i \geq 2} dz_i \wedge \bar{\epsilon} \cdot D_{i\bar{1}} + \sum_{i, j \geq 2} dz_i \wedge d\bar{z}_j \cdot D_{i\bar{j}}. \quad (3.5)$$

显然, 对 $i, j \geq 2$, 有

$$D_{1\bar{1}} = |z_1|^{2-2\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}, \quad D_{1\bar{j}} = e^{\sqrt{-1}\theta} |z_1|^{1-\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_j}, \quad (3.6)$$

$$D_{i\bar{1}} = e^{-\sqrt{-1}\theta} |z_1|^{1-\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_1}, \quad D_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}. \quad (3.7)$$

除了 $D_{1\bar{1}}$, 其余的 $D_{p\bar{q}}$ 都可以由 (2.22) 中定义的二阶微分算子线性组合得到.

对任意区域 Ω , 定义 Ω 上的 Hölder 范数如下: 对函数 f , 令

$$\|f\|_{C, \alpha; \beta}(\Omega) = \|f\|_{C^0(\Omega)} + [f]_{\alpha, \Omega}, \quad (3.8)$$

$$\|f\|_{C^{1, \alpha; \beta}(\Omega)} = \|f\|_{C, \alpha; \beta}(\Omega) + \sum_{p=1}^n (\|\nabla_p f\|_{C^0(\Omega)} + [\nabla_p f]_{\alpha, \Omega}), \quad (3.9)$$

$$\|f\|_{C^{2, \alpha; \beta}(\Omega)} = \|f\|_{C^{1, \alpha; \beta}(\Omega)} + \sum_{p, q=1}^n (\|D_{p\bar{q}} f\|_{C^0(\Omega)} + [D_{p\bar{q}} f]_{\alpha, \Omega}). \quad (3.10)$$

注意到 $D_{1\bar{1}} = \Delta_{\mathbb{C}_\beta}$, 所以, 第 2.2 小节中的局部 Schauder 估计等价于下述命题.

命题 3.1 对任意 $0 < \alpha < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, 存在 $C = C(n, \alpha, \beta)$ 使得

$$\|f\|_{C^{2,\alpha;\beta}(B_{\frac{1}{2}}(0))} \leq C(\|\Delta f\|_{C^{,\alpha;\beta}(B_1(0))} + \|f\|_{C^0(B_1(0))}).$$

对任意 $(1, 1)$ 形式 η , 定义扰动的 Laplace 算子 $\Delta_\eta f = \Delta_{\omega_\beta} f + \langle \eta, \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} f \rangle$. 对于扰动的 Laplace 算子, 同样可以证明下述局部 Schauder 估计 (参见文献 [1, 13]):

命题 3.2 对任意 $\alpha < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, 存在 $\varepsilon = \varepsilon(n, \beta, \alpha)$ 和 $C = C(n, \beta, \alpha)$ 使得, 若 $(1, 1)$ 形式 η 满足 $\|\eta\|_{C^{,\alpha;\beta}(B_1(0))} \leq \varepsilon$, 则

$$\|f\|_{C^{2,\alpha;\beta}(B_{\frac{1}{2}}(0))} \leq C(\|\Delta_\eta f\|_{C^{,\alpha;\beta}(B_1(0))} + \|f\|_{C^0(B_1(0))}). \quad (3.11)$$

3.2 锥状 Kähler 度量

设 M 是一个紧致 Kähler 流形, D 是 M 上一个光滑除子. 对于 $p \in D$, 邻域上的一个坐标系 $z = (z_1, \dots, z_n)$ 称为一个限制坐标系, 如果满足 $D = \{z_1 = 0\}$. 在限制坐标系下, 定义坐标变换 $\xi = \beta^{-1}|z_1|^{\beta-1}z_1$. 在极坐标系中, 该变换等价于 $(\rho, \theta) \mapsto (r, \theta) = (\beta^{-1}\rho^\beta, \theta)$, 这是第 3.1 小节中定义的锥变换. 在限制坐标系下, 定义 $(1, 0)$ 微分形式 $\epsilon = dr + \sqrt{-1}\beta r d\theta$.

首先定义 Hölder 函数和 Hölder 微分形式.

定义 3.1 M 上一个 $(1, 0)$ 形式 η 称为 $C^{,\alpha;\beta}$ 连续, 如果 $\eta \in C^\alpha(M \setminus D)$, 并且对任意 $p \in D$, 存在附近的限制坐标系 $z = (z_1, \dots, z_n)$, 使得 $\eta = \eta_1 \epsilon + \sum_{i \geq 2} \eta_i dz_i$, 每个 η_p 关于 $(\xi, z_2, \dots, z_n)$ 是 C^α 连续的; 类似地, 一个 $(1, 1)$ 形式 η 称为 $C^{,\alpha;\beta}$ 连续, 如果 $\eta \in C^\alpha(M \setminus D)$, 并且对任意 $p \in D$, 存在附近的限制坐标系 $z = (z_1, \dots, z_n)$, 使得 $\eta = \eta_{1\bar{1}} \epsilon \wedge \bar{\epsilon} + \eta_{1\bar{j}} \epsilon \wedge d\bar{z}^j + \eta_{i\bar{1}} dz^i \wedge \bar{\epsilon} + \eta_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$, 每个 $\eta_{p\bar{q}}$ 关于 $(\xi, z_2, \dots, z_n)$ 是 C^α 连续的. 记微分形式 $\eta \in C^{,\alpha;\beta}$, 如果 η 是 $C^{,\alpha;\beta}$ 连续的.

定义 3.2 实值函数 $f \in C^{,\alpha;\beta}$, 如果 $f \in C^\alpha(M \setminus D)$, 并且对任意 $p \in D$, 存在限制坐标系 $z = (z_1, \dots, z_n)$, 使得 f 关于 $(\xi, z_2, \dots, z_n)$ 是 C^α 连续的; $f \in C^{1,\alpha;\beta}$, 如果 $f, \partial f \in C^{,\alpha;\beta}$; $f \in C^{2,\alpha;\beta}$, $f, \partial f, \partial \bar{\partial} f \in C^{,\alpha;\beta}$.

注意, 在定义 $C^{2,\alpha;\beta}$ 空间时, 我们只要求函数的复 Hesse 张量是 Hölder 连续的.

定义 3.3 一个 $(1, 1)$ 形式 $\omega \in C^{,\alpha;\beta}$ 称为一个在 D 上有 $2\pi\beta$ 锥角的 C^α 锥状度量, 如果 ω 在 $M \setminus D$ 上是 C^α 度量, 并且对任意 $p \in D$, 存在限制坐标系 $z = (z_1, \dots, z_n)$, 使得

$$\omega = \omega_{1\bar{1}} \epsilon \wedge \bar{\epsilon} + \omega_{1\bar{j}} \epsilon \wedge d\bar{z}^j + \omega_{i\bar{1}} dz^i \wedge \bar{\epsilon} + \omega_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

满足 $\omega_{1\bar{1}}$ 在 D 上严格正.

关于锥状 Kähler 度量的存在性, 我们有如下引理:

引理 3.1^[1] 设 L 是由除子 D 定义的线丛, h 是 L 上的一个 Hermite 度量. 设 s 是 L 的一个全纯截面, $s^{-1}(0) = D$. 设 ω_0 是 M 上一个光滑 Kähler 度量, 则对任意充分小的 $\delta > 0$, $(1, 1)$ 形式

$$\omega_\beta = \omega_0 + \delta \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} |s|_h^{2\beta} \quad (3.12)$$

定义了 M 上一个在 D 上具有 $2\pi\beta$ 锥角的锥状度量, Hölder 指标为 $\alpha = \min(\beta^{-1} - 1, 1)$.

根据命题 3.2, 我们有 Laplace 算子的 $C^{2,\alpha;\beta}$ 局部正则性理论. 关于锥状度量的 Laplace 算子理论的一个命题如下:

引理 3.2^[1] 设 $0 < \alpha < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, $\omega \in C^{,\alpha;\beta}$ 是一个在 D 上具有 $2\pi\beta$ 锥角的锥状 Kähler 度量, 则 $\Delta_\omega : C^{2,\alpha;\beta} \rightarrow C^{,\alpha;\beta}$ 是一个 Fredholm 算子, Fredholm 指标为 0.

与光滑度量情形一样, 该命题的证明需要运用 Laplace 算子的 L^2 理论和局部正则性理论.

3.3 锥状 Kähler-Einstein 问题

设 M 是一个 n 维 Fano 流形, $D \in |K_M^{-\lambda}|$ 是一个光滑除子, 其中 λ 是一个正整数. 令 $\omega_0 \in 2\pi c_1(M)$ 是 M 上一个光滑 Kähler 度量. 定义 $C^{2,\alpha;\beta}$ 势函数空间

$$\mathcal{P}^{\alpha;\beta} = \{\varphi \in C^{2,\alpha;\beta} \mid \omega_\varphi = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \text{ 是 } D \text{ 上具有 } 2\pi\beta \text{ 角度的锥状度量}\}. \quad (3.13)$$

度量 ω_φ 称为一个锥角为 $2\pi\beta$ 的锥状 Kähler-Einstein 度量, 如果 $\varphi \in \mathcal{P}^{\alpha;\beta}$, ω_φ 满足流方程 (1.2). 显然, 锥状 Kähler-Einstein 度量在除子 D 外光滑, 在 D 附近也有更好的正则性.

命题 3.3 ^[3,14,23] 若度量 $\omega_\varphi, \varphi \in \mathcal{P}^{\alpha;\beta}$ 是在 D 上具有 $2\pi\beta$ 角度的锥状 Kähler-Einstein 度量, 则对任意 $\alpha' < \min(\beta^{-1} - 1, 1)$, 有 $\varphi \in C^{2,\alpha';\beta} \cap C^\infty(M \setminus D)$.

设 u_0 是 ω_0 对应的 Ricci 势函数, 满足 $\text{Ric}(\omega_0) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_0 = \omega_0$; 设 h_0 是 $K_M^{-\lambda}$ 上的 Hermite 度量, Chern 联络的曲率形式等于 $\lambda\omega_0$. 对任意 $\varphi \in \mathcal{P}^{\alpha;\beta}$, 定义 log-Ricci 势函数

$$u_\varphi = u_0 + \mu\varphi + \log \frac{|s|_{h_0}^{2(1-\beta)} \omega_\varphi^n}{\omega_0^n} \in C^{\alpha;\beta}. \quad (3.14)$$

与光滑流形一样, 可以将锥状 Kähler-Einstein 度量存在性问题转化为解复 Monge-Ampère 方程问题:

命题 3.4 $\omega = \omega_\varphi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$, $\varphi + \psi \in \mathcal{P}^{\alpha;\beta}$ 是 D 上有 $2\pi\beta$ 角度的锥状 Kähler-Einstein 度量当且仅当 ψ 满足复 Monge-Ampère 方程

$$(\omega_\varphi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi)^n = e^{-u_\varphi - \mu\psi} \omega_\varphi^n. \quad (3.15)$$

4 开性定理的证明

设 M 是一个 n 维 Fano 流形, $D \in |K_M^{-\lambda}|$ 是一个光滑除子, 其中 λ 是一个正整数. 令 $\omega_0 \in 2\pi c_1(M)$ 是 M 上一个光滑 Kähler 度量, 如第 3.3 小节定义 $C^{2,\alpha;\beta}$ 势函数空间 $\mathcal{P}^{\alpha;\beta}$.

设 $\omega_{\beta_0} = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{\beta_0}$ ($\varphi_{\beta_0} \in \mathcal{P}^{\alpha;\beta_0}$) 是 D 上具有 $2\pi\beta_0$ 角度的锥状 Kähler-Einstein 度量. 根据命题 3.3, ω_{β_0} 的 Hölder 指标可取为任意的 $\alpha < \min(\beta_0^{-1} - 1, 1)$. 我们的目的是构造 D 上具有 $2\pi\beta$ 角度的锥状 Kähler-Einstein 度量.

与光滑情形类似, 基本策略是运用隐函数定理来解复 Monge-Ampère 方程 (3.15). 不同之处, 是这里的 Hölder 空间随着角度 β 的不同而变化, 需要的背景度量在 D 上的奇异性随着 β 的不同也在变化, 线性化算子的逆需要有一致估计.

首先, 取定 M 的一族坐标有限覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^N$, 要么 $U_i \cap D = \emptyset$, 要么取 U_i 上的限制坐标系, 即坐标系 $z = (z_1, \dots, z_n)$ 满足 $D \cap U_i = \{z_1 = 0\}$. 若 U_i 与 D 相交, 记 ω_{β_0} 在限制坐标系中表示为

$$\omega_{\beta_0} = \sqrt{-1} \left(\omega_{1\bar{1}} \epsilon \wedge \bar{\epsilon} + \sum_{j=2}^n \omega_{1\bar{j}} \epsilon \wedge d\bar{z}_j + \sum_{i=2}^n \omega_{i\bar{1}} dz_i \wedge \bar{\epsilon} + \sum_{i,j=2}^n \omega_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j \right), \quad (4.1)$$

其中 $\epsilon = dr + \sqrt{-1}\beta d\theta$, $r = \beta^{-1}|z_1|^\beta$. 对任意的 $\alpha < \min(\beta_0^{-1} - 1, 1)$ 和 $p, q = 1, \dots, n$, 系数 $\omega_{p\bar{q}}$ 关于 $(|z_1|^{\beta-1} z_1, z_2, \dots, z_n)$ 是 C^α 连续的.

引理 4.1 存在线丛 $K_M^{-\lambda}$ 上的光滑 Hermite 度量 h_{β_0} , 使得在上述限制坐标系中,

$$\omega_{1\bar{1}} = D_{1\bar{1}} |s|_{h_{\beta_0}}^{2\beta_0}, \quad \text{在 } D \text{ 上}, \quad (4.2)$$

其中 $D_{1\bar{1}} = |z_1|^{2-2\beta_0} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}$ 是在第 3.1 小节中定义的算子.

引入在 D 上锥角为 $2\pi\beta$ 的背景度量

$$\omega_\beta = \omega_{\beta_0} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(|s|_{h_{\beta_0}}^{2\beta} - |s|_{h_{\beta_0}}^{2\beta_0}). \quad (4.3)$$

类比引理 4.1, 根据引理 3.1, 该度量除掉了在 D 上具有 $2\pi\beta_0$ 锥角的奇性, 然后加入了在 D 上具有 $2\pi\beta$ 角度的奇性. 经过基本的运算, 可以证明下面的命题:

命题 4.1 取定 $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \min(\beta_0^{-1} - 1, 1)$. 对任意充分接近 β_0 的 β , $(1, 1)$ 形式 $\omega_\beta \in C^{\bar{\alpha}; \beta}$ 定义了 D 上具有 $2\pi\beta$ 角度的锥状 Kähler 度量.

度量 ω_β 的 $2\pi\beta$ 锥角的 log-Ricci 势函数为

$$u_\beta = (\beta - \beta_0)\ell\varphi_{\beta_0} + \mu_\beta(|s|_{h_{\beta_0}}^{2\beta} - |s|_{h_{\beta_0}}^{2\beta_0}) + \log \frac{|s|_{h_0}^{2(\beta_0 - \beta)}\omega_\beta^n}{\omega_{\beta_0}^n}, \quad (4.4)$$

其中 $\mu_\beta = 1 - (1 - \beta)\lambda$, h_0 是 $K_M^{-\lambda}$ 上的 Hermite 度量, 满足 Chern 联络的曲率等于 $\lambda\omega_0$.

利用背景度量 ω_β , 我们在 M 上定义 $C^{\ell, \alpha; \beta}$ 空间的范数 $\|\cdot\|_{C^{\ell, \alpha; \beta}}$.

命题 4.2 当 β 趋于 β_0 时, $\|u_\beta\|_{C^{\bar{\alpha}; \beta}} \rightarrow 0$.

考虑算子

$$Q: C^{2, \bar{\alpha}; \beta} \rightarrow C^{\bar{\alpha}; \beta}, \quad \psi \mapsto \log \frac{(\omega_\beta + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi)^n}{\omega_\beta^n} + \mu_\beta\psi. \quad (4.5)$$

度量 $\omega_\beta + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$ 是 $2\pi\beta$ 角度的锥状 Kähler-Einstein 度量当且仅当 $Q(\psi) = -u_\beta$. Q 的线性化算子是 $\Delta_{\omega_\beta} + \mu_\beta$. 根据隐函数定理, 为了上述方程可解, 只需证明下面的命题:

命题 4.3^[1] 存在一致的常数 $C = C(\beta_0)$, 使得对任意距离 β_0 很近的 β , 有 $\Delta_{\omega_\beta} + \mu_\beta$ 可逆, 并且

$$\|(\Delta_{\omega_\beta} + \mu_\beta)^{-1}\| \leq C. \quad (4.6)$$

命题的证明依赖于命题 3.2 中的 Schauder 估计, 以及如下观察: 如果 $(\Delta_{\omega_\beta} + \mu_\beta)^{-1}$ 不一致有界, 则 $\ker(\Delta_{\omega_{\beta_0}} + \mu_{\beta_0})$ 非平凡. 根据 Bochner 公式, 如果 $f \in \ker(\Delta_{\omega_{\beta_0}} + \mu_{\beta_0})$, 则 f 的梯度向量场是全纯向量场, 平行于除子 D . 根据文献 [16, 定理 2.1] 知, M 上不存在平行于 D 的全纯向量场. 从而上述命题成立.

综合上述讨论得到定理 1.1 的证明.

致谢 感谢韩青教授的邀请, 有机会在“几何分析与退化椭圆型方程”讲习班作相关报告; 感谢讲习班同学的热情讨论; 感谢审稿人的耐心审阅.

参考文献

- 1 Donaldson S K. Kähler metrics with cone singularities along a divisor. In: Essays in Mathematics and Its Applications. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2012, 49–79
- 2 Tian G. K-Stability and Kähler-Einstein metrics. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 1085–1156
- 3 Chen X X, Donaldson S K, Sun S. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, I: Approximation of metrics with cone singularities. J Amer Math Soc, 2015, 28: 183–197; Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, II: Limits with cone angle less than 2π . J Amer Math Soc, 2015, 28: 199–234; Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. J Amer Math Soc, 2015, 28: 235–278
- 4 Yau S T. On the ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I. Comm Pure Appl Math, 1978, 31: 339–411
- 5 Aubin T. Equation du type de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compacts. C R Math Acad Sci Paris, 1976, 283: 119–121

- 6 Tian G. On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class. *Invent Math*, 1990, 101: 101–172
- 7 Tian G. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. *Invent Math*, 1997, 130: 1–37
- 8 Troyanov M. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans Amer Math Soc*, 1991, 324: 793–821
- 9 Luo F, Tian G. Liouville equation and spherical convex polytopes. *Proc Amer Math Soc*, 1992, 116: 1119–1129
- 10 Tian G. Kähler-Einstein metrics on algebraic manifolds. In: *Transcendental Methods in Algebraic Geometry* (Cetraro, 1994). *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1646. New York: Springer-Verlag, 1996, 143–185
- 11 Mazzeo R. Kähler-Einstein metrics singular along a smooth divisor. *J Équ aux Dériv Partielles*, 1999, 6: 1–10
- 12 Jeffres T. Uniqueness of Kähler-Einstein cone metrics. *Publ Mat*, 2000, 44: 437–448
- 13 Brendle S. Ricci flat Kähler metrics with edge singularities. *Int Math Res Not IMRN*, 2013, 2013: 5727–5766
- 14 Jeffres T, Mazzeo R, Rubinstein Y A. Kähler-Einstein metrics with edge singularities. *Ann of Math (2)*, 2016, 183: 95–176
- 15 Li C, Sun S. Conical Kähler-Einstein metrics revisited. *Comm Math Phys*, 2014, 331: 927–973
- 16 Song J, Wang X. The greatest Ricci lower bound, conical Einstein metrics and Chern number inequality. *Geom Topol*, 2016, 20: 49–102
- 17 Jin X, Liu J, Zhang X. Twisted and conical Kähler-Ricci solitons on Fano manifolds. *J Funct Anal*, 2016, 271: 2396–2421
- 18 Guenancia H, Paun M. Conic singularities metrics with prescribed Ricci curvature: General cone angles along normal crossing divisors. *J Differential Geom*, 2016, 103: 15–57
- 19 Berman R J. A thermodynamical formalism for Monge-Ampère equations, Moser-Trudinger inequalities and Kähler-Einstein metrics. *Adv Math*, 2013, 248: 1254–1297
- 20 Guo B, Song J. Schauder estimates for equations with cone metrics, I. *ArXiv:1612.00075*, 2016; II, *arXiv:1809.03116*, 2018
- 21 Gui Y T, Yin H. Schauder estimates on smooth and singular spaces. *ArXiv:1803.0508*, 2018
- 22 Watson G N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1944
- 23 Tian G. A 3rd derivative estimate for conic Kähler metrics. Preprint

Openness theorem of conic Kähler-Einstein metrics

Zhenlei Zhang

Abstract This paper presents a brief introduction to Donaldson's openness theorem of conic Kähler-Einstein metrics.

Keywords conic Kähler-Einstein metric, openness theorem, Schauder estimate

MSC(2010) 53C07, 53C23, 53C25

doi: 10.1360/N012018-00141