



论文

具有多种缺陷的船舶结构系统的可靠性分析

安海^{①*}, 安伟光^①, 赵维涛^②

① 哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001;

② 沈阳航空工业学院航空学院, 沈阳 110034

* E-mail: anhai@hrbeu.edu.cn

收稿日期: 2010-03-11; 接受日期: 2010-06-25

摘要 本文分析了含有初始变形、焊接残余应力、裂纹和局部凹陷等多种缺陷对板的极限强度的影响, 给出了该板单元的可靠性计算和敏度分析的表达式. 对含有多种缺陷板单元组成的结构系统, 进行了可靠性分析, 给出结构系统的失效机理、失效路径和总体可靠性指标的计算方法. 推出了含有多种缺陷板元失效后, 对残余结构影响的反向节点力计算公式, 及系统可靠性指标的敏度表达式. 保证了计算精度和可靠性分析的合理性, 同时也便于找到影响结构系统可靠性的薄弱板单元. 最后通过船舶结构的一个舱段, 对比开展了含有多种缺陷与不含缺陷的结构系统的可靠性计算及敏度分析, 以说明本文提出方法的有效性. 该方法提供的为结构系统的设计及制定合理的维修和更新策略提供了参考.

关键词 初始变形, 焊接残余应力, 裂纹和局部凹陷, 极限强度, 反向节点力, 敏度表达式, 可靠性分析

PACS: 21.10.Jx, 46.90.+s, 46.15.-x

船体结构在制作过程中由于采用各种冷热加工工艺, 因此在板格中会引起初始变形和残余应力, 通常把初始变形和残余应力称之为初始缺陷, 初始缺陷的存在会降低板格的极限承载能力^[1~7]. 另外由于人为的操作失误或意外的环境条件, 很可能遭遇到各种力学损伤, 如偶然荷载、局部撞击等等. 这将导致板元的机械损伤, 结构损伤也能使承载能力降低^[8]. 上述缺陷的综合作用, 有可能导致灾难性的后果. 因此对含有缺陷结构的可靠性评估问题, 一直是工程上所关心的热点. 这一问题对结构使用中的安全预测, 及提供维修和更新的决策有重要作用. 本文针对含有这些缺陷的板单元, 及组成的结构系统开展可靠性分析.

1 各种缺陷板的极限强度分析

1.1 初始缺陷(初始变形和焊接残余应力)板格的极限强度

1.1.1 初始缺陷的经验公式

Smith 等人^[9]提出了最大初始变形的近似计算公式为

$$\frac{w_{\text{opt}}}{t} = \begin{cases} 0.025\lambda^2, & \text{轻微情况,} \\ 0.1\lambda^2, & \text{一般情况,} \\ 0.3\lambda^2, & \text{严重情况,} \end{cases} \quad (1)$$

式中: w_{opt} 板格的最大初始变形; $\lambda = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_s}{E}}$ 板格的柔度, 并近似认为板的极限强度 σ_{u0} 等于材料的屈服

应力 σ_s , 则 $\lambda = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_s}{E}} \cong \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_{u0}}{E}}$; b 板格的宽度; t 板格的厚度; σ_s 板格的屈服应力; E 弹性模量.

Smith 等人^[9]同样提出了沿 X 方向上焊接引起的残余应力 σ_{rcx} 的近似公式为

$$\frac{\sigma_{rcx}}{\sigma_s} = \begin{cases} -0.05 & \text{轻微情况} \\ -0.15 & \text{一般情况} \\ -0.3 & \text{严重情况} \end{cases} \quad (2)$$

而 Y 方向的残余应力 σ_{rcy} 可以用如下的近似公式得到, 即

$$\sigma_{rcy} = \frac{b}{a} \sigma_{rcx}. \quad (3)$$

这样在实际设计过程中, 就可通过上述的几个公式得到近似的焊接残余应力.

1.1.2 考虑初始缺陷板格的极限强度经验公式

文献[10]中, 给出有初始缺陷的板格极限强度的计算公式, 如下

$$\sigma_u = R_d R_r \sigma_{u0}, \quad (4)$$

式中: σ_u 和 σ_{u0} 具有初始缺陷板格和完好板格的极限强度; R_d 和 R_r 初始变形和残余应力引起的强度折减系数, 有

$$R_d = 1 - 0.2433 f_1(\alpha) f_2(\lambda) \left(\frac{w_{opl}}{t} \right)^{0.911}, \quad (5)$$

$$f_1(\alpha) = 2.05 - 1.376\alpha + 0.366\alpha^2 - 0.0345\alpha^3, \quad (6)$$

$$f_2(\lambda) = \begin{cases} 2.28 - 2.568\lambda + 1.288\lambda^2, & 1.0 \leq \lambda \leq 1.9, \\ 8.191 - 4.224\lambda + 0.522\lambda^2, & 1.9 < \lambda \leq 2.5, \\ 4.593 - 2.162\lambda + 0.273\lambda^2, & 2.5 < \lambda \leq 4.0, \end{cases} \quad (7)$$

$$R_r = 1 - 0.46(\lambda - 1.5)^{0.275} \eta^{0.725}, \quad (8)$$

式中: $\alpha = \frac{a}{b}$; $\eta = -\frac{\sigma_{rcx}}{\sigma_s}$.

1.2 初始裂纹板单元的极限强度

1.2.1 板在单轴拉伸时强度分析

如图 1 所示. 板的长度和宽度分别为 a 和 b , 裂纹长度为 c , 板的边界条件为四边简支.

考虑材料应变强化作用下, 利用弹塑性有限元方法得到的极限拉伸强度为^[11]

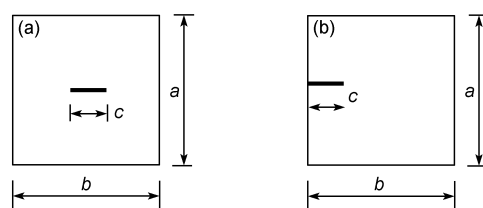


图 1 裂纹形式示意图

(a) 中心穿透裂纹; (b) 边缘穿透裂纹

(i) 中心裂纹时:

$$\begin{aligned} \varphi_{ux} &= \sigma_u / \sigma_{u0} \\ &= 1.2795 - 3.4973(c/b) + 8.9739(c/b)^2 \\ &\quad - 11.9747(c/b)^3 + 5.2302(c/b)^4; \end{aligned} \quad (9)$$

(ii) 边缘裂纹时:

$$\begin{aligned} \varphi'_{ux} &= \sigma_u / \sigma_{u0} \\ &= 1.281 - 4.0452(c/b) + 6.6161(c/b)^2 \\ &\quad - 5.194(c/b)^3 + 1.3546(c/b)^4. \end{aligned} \quad (10)$$

式中: φ_{ux} 和 φ'_{ux} 为强度折减系数; σ_u , σ_{u0} 分别表示具有裂纹板元和没有裂纹板元的极限强度.

1.2.2 裂纹对加筋板极限强度影响分析

带有初始裂纹缺陷的加筋板如图 2 所示, 由断裂力学的方法可求得加筋板裂纹失稳扩展时的极限强度, 如下^[12,13]:

$$\sigma_u = \frac{K_C}{C_R \sqrt{\pi c \sec(\pi \bar{c} / b)}}, \quad (11)$$

式中: K_C 板材料的断裂韧性, 可由材料手册查得; C_R 加筋板裂纹尖端应力强度因子降低系数; $\bar{c}$ 计及加筋板加强影响的当量半裂纹长度, 可由下式计算:

$$\bar{c} = C_R^2 c. \quad (12)$$

当计及裂纹对截面的削弱并假定应力均匀分布时, 加筋板的极限强度可由下式计算:

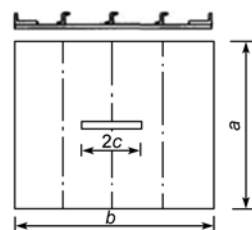


图 2 加筋板

$$\sigma_u = \frac{(b-2c)t + nA_s}{bt + nA_s} \sigma_{u0}, \quad (13)$$

式中: A_s 加强筋的面积; n 加强筋的个数.

当板和筋具有相同的极限强度 σ_{u0} 时, 则具有初始裂纹缺陷加筋板的极限强度可在(13)式的基础上进一步表示成如下形式:

$$\sigma_u = \frac{\varphi_{ux}bt + \varphi'_{ux}nA_s}{bt + nA_s} \sigma_{u0} = R_s \sigma_{u0}, \quad (14)$$

式中: R_s 初始裂纹对加筋板极限强度的折减系数,

有 $R_s = \frac{\varphi_{ux}bt + \varphi'_{ux}nA_s}{bt + nA_s}$, 是裂纹与其它变量的函数.

1.3 局部凹陷板单元的极限强度

1.3.1 局部凹陷的几何模型

考虑两种凹陷形状, 即球形和圆锥形, 图 3 为被尖锐物体撞击后矩形板产生的局部凹陷模型, 图 4 给出了凹陷的几何参数.

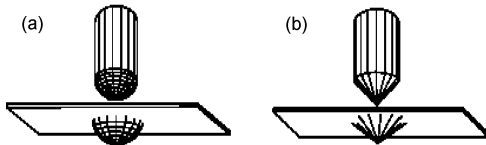


图 3 板的局部凹陷模型
(a) 球形凹陷; (b) 圆锥形凹陷

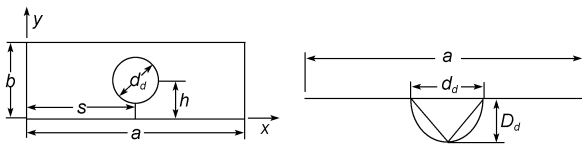


图 4 局部凹陷的几何参数

1.3.2 局部凹陷板的极限强度经验公式

文献[8]给出了局部凹陷板的极限强度经验公式为

$$R_u = \frac{\sigma_u}{\sigma_{u0}} = C_3 \left[C_1 \ln \left(\frac{D_d}{t} \right) + C_2 \right], \quad (15)$$

式中:

$$C_1 = -0.042 \left(\frac{d_d}{b} \right)^2 - 0.105 \left(\frac{d_d}{b} \right) + 0.014,$$

$$C_2 = -0.137 \left(\frac{d_d}{b} \right)^2 - 0.302 \left(\frac{d_d}{b} \right) + 1.042,$$

$$C_3 = -1.44 \left(\frac{h}{b} \right)^2 + 1.74 \left(\frac{h}{b} \right) + 0.48,$$

R_u 为由于局部凹陷而引起的板的极限强度折减系数; σ_u , σ_{u0} 分别表示有凹陷板元和没有凹陷板元的极限强度; b , t 分别表示板元的宽度和厚度; h , D_d , d_d 分别表示凹陷的位置、深度和大小.

2 可靠性指标的求解及敏度分析

2.1 安全余量的可靠性指标及对设计变量的敏度分析

由结构可靠性理论和随机有限元方法可知, 任一失效模式安全余量都可写成如式形式, 即

$$M_k = g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}), \quad (16)$$

式中: $\mathbf{X}$ 基本随机变量, 如外载、屈服应力、弹性模量等; $\boldsymbol{\delta}$ 节点位移向量.

在求解可靠性指标时, 一般采用改进的一次二阶矩方法^[14], 将安全余量在验算点处进行 Taylor 展开, 并取线性项, 则安全余量的均值、方差和可靠性指标分别如下:

$$\mu_{M_k} = \sum_{i=1}^N (\mu_{X_i} - X_i^*) \frac{\partial M_k}{\partial X_i} \bigg|_{X^*}, \quad (17)$$

$$\sigma_{M_k}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial M_k}{\partial X_i} \frac{\partial M_k}{\partial X_j} \right) \bigg|_{X^*} \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}, \quad (18)$$

式中: μ_{X_i} 为 X_i 的设计验算点值; X_i^* 为 X_i^* 的均值; $|_{X^*}$ 为在设计验算点 X^* 处取值; ρ_{ij} 为 X_i 和 X_j 的相关系数; σ_{X_i} 和 σ_{X_j} 分别为 X_i 和 X_j 的标准差;

而 $\frac{\partial M_k}{\partial X_i}$ 和 $\frac{\partial M_k}{\partial X_j}$ 可由(16)式求得, 即

$$\frac{\partial M_k}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial \delta_j} \frac{\partial \delta_j}{\partial X_i}, \quad (19)$$

式中: $\frac{\partial g}{\partial X_i}$, $\frac{\partial g}{\partial \delta_j}$ 可由 M_k 的具体表达形式求得,

$\frac{\partial \delta_j}{\partial X_i}$ 可通过随机有限元求得^[15], 即

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}, \quad (20)$$

式中: $\mathbf{K}$ 总体刚阵; $\mathbf{P}$ 载荷列阵. 上式对随机变量 X_i 求导, 经整理有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial X_i} = \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \boldsymbol{\delta} \right], \quad (21)$$

则可靠性指标为

$$\beta_k = \frac{\mu_{M_k}}{\sigma_{M_k}}. \quad (22)$$

假定 X_q 代表结构系统任一设计变量(如元件截面积、板厚等), 并且该设计变量为随机变量, 则失效模式可靠指标对设计变量均值的敏度可由(23)式求得, 有

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{X_q}} = \frac{\frac{\partial \mu_{M_k}}{\partial \mu_{X_q}} \sigma_{M_k} - \mu_{M_k} \frac{\partial \sigma_{M_k}}{\partial \mu_{X_q}}}{\sigma_{M_k}^2}, \quad (23)$$

式中:

$$\frac{\partial \mu_{M_k}}{\partial \mu_{X_q}} = \left\{ \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^N (\mu_{X_i} - X_i^*) \frac{\partial M_k}{\partial X_i} \right]}{\partial \mu_{X_q}} \right\}_{X^*} = \frac{\partial M_k}{\partial X_q} \bigg|_{X^*}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \sigma_{M_k}}{\partial \mu_{X_q}} = \left[\frac{\gamma_q \frac{\partial M_k}{\partial X_q} \sum_{j=1}^N \frac{\partial M_k}{\partial X_j} \rho_{qj} \mu_{X_j} \gamma_j}{\sigma_{M_k}} \right]_{X^*}, \quad (25)$$

式中: γ_i 和 γ_j 分别为随机变量 X_i 和 X_j 的变异系数; μ_{X_q} 为设计变量 X_q 的均值.

将(24), (25)式代入(23)式, 有

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{X_q}} = \frac{\frac{\partial M_k}{\partial X_q} \sigma_{M_k}^2 - \mu_{M_k} \gamma_q \frac{\partial M_k}{\partial X_q} \sum_{j=1}^N \frac{\partial M_k}{\partial X_j} \rho_{qj} \mu_{X_j} \gamma_j}{\sigma_{M_k}^3} \bigg|_{X^*}, \quad (26)$$

式中: $\frac{\partial M_k}{\partial X_q}$ 可由(19)式给出.

2.2 结构系统的可靠性指标及对设计变量的敏度分析

结构系统的失效概率 P_f 与对应的可靠性指标 β_s 有以下关系, 即

$$P_f = \Phi(-\beta_s) = 1 - \Phi(\beta_s), \quad (27)$$

上式对设计变量均值求导数, 有

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{X_q}} = \frac{\partial \Phi(-\beta_s)}{\partial (-\beta_s)} \frac{\partial (-\beta_s)}{\partial \mu_{X_q}} = -\phi(-\beta_s) \frac{\partial \beta_s}{\partial \mu_{X_q}}, \quad (28)$$

式中: $\Phi(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 分别为标准正态分布函数和概率密度函数.

结构系统可靠性分析具体如下, 首先采用分支限界法^[16]寻找主要失效模式, 并求出主要失效模式的相关系数^[17], 然后用 PNET^[18]方法给出结构系统 G 个代表失效模式, 则由代表失效模式的失效概率 P_i 及可靠性指标 β_i , 求得结构系统失效概率如下:

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^G (1 - P_i), \quad (29)$$

且有

$$P_i = \Phi(-\beta_i) = 1 - \Phi(\beta_i), \quad (30)$$

则

$$\beta_s = -\Phi^{-1} \left[1 - \prod_{i=1}^G \Phi(\beta_i) \right], \quad (31)$$

即

$$\Phi(-\beta_s) = 1 - \prod_{i=1}^G \Phi(\beta_i), \quad (32)$$

对(32)式的左、右端求导, 并整理有

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial \mu_{X_q}} = \frac{\prod_{i=1}^G \Phi(\beta_i)}{\phi(-\beta_s)} \sum_{k=1}^G \frac{\phi(\beta_k)}{\Phi(\beta_k)} \frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{X_q}}. \quad (33)$$

由(33)或(28)式即可求得结构系统可靠性指标或失效概率对各变量均值的敏度值, 从而分析各变量的变化对系统可靠性的影响.

2.3 具有多种缺陷板的安全余量敏度分析

当考虑板格具有多种缺陷时, 其安全余量表示如下:

$$M = \sigma_u - \sigma = R_d R_r R_s R_u \sigma_{u0} - \sigma, \quad (34)$$

式中: σ_u 有多种缺陷缺陷板元的极限强度; σ 板格的计算应力; R_d , R_r 和 R_u 分别由(5), (8)及(15)式给出; R_s 由(14)式给出.

假定 R_d 和 R_r 的主要随机变量为 λ , R_s 的主要随机变量为 c/b , R_u 的主要随机变量为 d_d/b , h/b 和 D_d/t , 并且这些随机变量与 σ_{u0} 及 σ 相互独立, 则

安全余量对各变量的敏度分别为

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma_{u0}} = R_d R_r R_s R_u, \quad (35)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma} = -1, \quad (36)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \frac{\partial R_d}{\partial \lambda} R_r R_s R_u \sigma_{u0} + \frac{\partial R_r}{\partial \lambda} R_d R_s R_u \sigma_{u0}, \quad (37)$$

由(5)式可求出 $\frac{\partial R_d}{\partial \lambda}$ 的表达式, 如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_d}{\partial \lambda} = & -0.2433 f_1(\alpha) \frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda} \left(\frac{w_{opl}}{t} \right)^{0.911} \\ & - 0.243 \times 0.911 f_1(\alpha) f_2(\lambda) \\ & \times \left(\frac{w_{opl}}{t} \right)^{-0.089} \frac{\partial (w_{opl}/t)}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (38)$$

式中: $\frac{\partial (w_{opl}/t)}{\partial \lambda}$ 可由(1)式求得, 如下

$$\frac{\partial (w_{opl}/t)}{\partial \lambda} = \begin{cases} 0.05\lambda, & \text{轻微情况,} \\ 0.2\lambda, & \text{一般情况,} \\ 0.6\lambda, & \text{严重情况,} \end{cases} \quad (39)$$

$\frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda}$ 可由(7)式求得, 如下

$$\frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda} = \begin{cases} -2.568 + 2.576\lambda, & 1.0 \leq \lambda \leq 1.9, \\ -4.224 + 1.044\lambda, & 1.9 < \lambda \leq 2.5, \\ -2.162 + 0.546\lambda, & 2.5 < \lambda \leq 4.0, \end{cases} \quad (40)$$

由(8)式可以求得 $\frac{\partial R_r}{\partial \lambda}$, 如下

$$\frac{\partial R_r}{\partial \lambda} = -0.46 \times 0.275 (\lambda - 1.5)^{-0.725} \eta^{0.725}, \quad (41)$$

式中: $\eta = -\sigma_{rcx} / \sigma_0$, 由(2)式求得, 如下

$$\eta = -\frac{\sigma_{rcx}}{\sigma_0} = \begin{cases} 0.05, & \text{轻微情况,} \\ 0.15, & \text{一般情况,} \\ 0.3, & \text{严重情况,} \end{cases} \quad (42)$$

$$\frac{\partial M}{\partial (c/b)} = R_d R_r \frac{\partial R_s}{\partial (c/b)} R_u \sigma_{u0}, \quad (43)$$

式中:

$$\frac{\partial R_s}{\partial (c/b)} = \frac{\partial \varphi_{ux} / \partial (c/b) b t + \partial \varphi'_{ux} / \partial (c/b) n A_s}{b t + n A_s}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \partial \varphi_{ux} / \partial (c/b) = & -3.4973 + 17.9478(c/b) \\ & - 35.9241(c/b)^2 + 20.9208(c/b)^3, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \partial \varphi'_{ux} / \partial (c/b) = & -4.0452 + 13.2322(c/b) \\ & - 15.582(c/b)^2 + 5.4184(c/b)^3, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial (d_d/b)} = & R_d R_r R_s \frac{\partial R_u}{\partial (d_d/b)} \sigma_{u0} \\ = & R_d R_r R_s C_3 \left[\frac{\partial C_1}{\partial (d_d/b)} \ln \left(\frac{D_t}{t} \right) + \frac{\partial C_2}{\partial (d_d/b)} \right] \sigma_{u0}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{\partial M}{\partial (h/b)} = R_d R_r R_s \frac{\partial C_3}{\partial (h/b)} \left[C_1 \ln \left(\frac{D_d}{t} \right) + C_2 \right] \sigma_{u0}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial M}{\partial (D_d/t)} = R_d R_r R_s C_3 C_1 \left(\frac{t}{D_d} \right) \sigma_{u0}, \quad (49)$$

式中: $\frac{\partial C_1}{\partial (d_d/b)}$, $\frac{\partial C_2}{\partial (d_d/b)}$ 和 $\frac{\partial C_3}{\partial (h/b)}$ 可由(15)式求得, 如下

$$\frac{\partial C_1}{\partial (d_d/b)} = -0.084 \left(\frac{d_d}{b} \right) - 0.105, \quad (50)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial (d_d/b)} = -0.274 \left(\frac{d_d}{b} \right) - 0.302, \quad (51)$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial (h/b)} = -2.88 \left(\frac{h}{b} \right) + 1.74. \quad (52)$$

当(34)式中的 σ 用板元形心的等效应力 σ_{e0} 表示时, 有

$$\sigma = \sigma_{e0} = (\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2 + 3\tau_{xy0}^2)^{1/2}, \quad (53)$$

式中: σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{xy0} 为板元形心处的应力, 由有限元可知

$$\sigma_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{B}_0 \mathbf{u} = \mathbf{S}_0 \mathbf{T}^e \boldsymbol{\delta}, \quad (54)$$

式中: σ_0 板元形心处的应力列阵; $\mathbf{D}$ 板元的弹性矩阵; $\mathbf{B}_0$ 板元形心处的几何矩阵; $\mathbf{S}_0$ 板元形心处的几何应力矩阵; $\mathbf{T}^e$ 单元坐标转换矩阵; $\boldsymbol{\delta}$ 总体坐标系下的节点位移。

在进行结构可靠性分析时, 如将板元的等效应力 σ_{e0} 和板元厚度 t 看成是随机变量, 那么板元的安全余量对其他随机变量 X_i (如板厚、梁元截面积、外载及缺陷等) 求敏度, 有

$$\frac{\partial M}{\partial X_i} = -\frac{\partial \sigma_{e0}}{\partial X_i}, \quad (55)$$

(53)式对随机变量 X_i 求导, 有

$$\frac{\partial \sigma_{e0}}{\partial X_i} = \frac{1}{2\sigma_{e0}} \{2\sigma_{x0} - \sigma_{y0}, 2\sigma_{y0} - \sigma_{x0}, 6\tau_{xy0}\} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial X_i} \\ \frac{\partial \sigma_{y0}}{\partial X_i} \\ \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial X_i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\sigma_{e0}} \mathbf{A} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial X_i}, \quad (56)$$

式中: $\mathbf{A} = \{2\sigma_{x0} - \sigma_{y0}, 2\sigma_{y0} - \sigma_{x0}, 6\tau_{xy0}\}$, 由(54)式可求得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial X_i} = \mathbf{S}_0 \mathbf{T}^e \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial X_i}, \quad (57)$$

将(57)式代入(56)式, 得

$$\frac{\partial \sigma_{e0}}{\partial X_i} = \frac{1}{2\sigma_{e0}} \mathbf{A} \mathbf{S}_0 \mathbf{T}^e \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial X_i}, \quad (58)$$

求出安全余量对各变量的敏度后, 利用式(31)求得具有多种缺陷板组成的系统可靠性指标. 而采用(26)或(33)式可求得具有多种缺陷板或该板组成的系统可靠性指标对各变量的敏度, 从而可分析多种缺陷对板或板组成的系统可靠性指标的影响.

3 刚阵的减缩及反向节点力

对高度静不定的弹塑性结构系统, 当一个或几个元件失效后, 并不导致结构系统的失效. 由于刚阵的减缩和反向节点力的增加, 将会对残余结构的内力产生影响, 因此必须给出减缩刚阵和反向节点力的计算表达式^[19-25]. 目前, 针对梁元减缩刚阵和反向节点力的计算表达式已较为成熟. 下面主要讨论板元的减缩刚阵和反向节点力的计算表达式^[15], 进而给出有裂纹缺陷板元的减缩刚阵和反向节点力的计算表达式.

由有限元虚功原理, 局部坐标系下单元的节点力向量 $\mathbf{F}$, 由下式求得

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (59)$$

式中: $\mathbf{B}$ 为板元的几何矩阵, $\boldsymbol{\sigma}$ 为板元的应力列阵, 有

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (60)$$

因此, 对应于抗力产生的反向节点力向量应为

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_a dV, \quad (61)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}_a$ 为容许应力列阵, 其表达式为

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \{\sigma_{xa}, \sigma_{ya}, \tau_{xya}\}^T, \quad (62)$$

式中: $\sigma_{xa}, \sigma_{ya}, \tau_{xya}$ 为对应于容许应力 $\boldsymbol{\sigma}_a$ 的三分量, 其等效容许应力为

$$\sigma_u = (\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 - \sigma_{xa} \sigma_{ya} + 3\tau_{xya}^2)^{1/2}, \quad (63)$$

由上式可求得

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (64)$$

式中: σ_e 为对应于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的等效应力, 即

$$\sigma_e = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}, \quad (65)$$

将(64)式代入(61)式, 有

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{B}^T \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (66)$$

取单元形心处的坐标和应力代入上式, 有

$$\mathbf{F} = - \frac{\sigma_u}{\sigma_{e0}} \int_V \mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV, \quad (67)$$

令 $\int_V \mathbf{B}_0^T dV = \mathbf{t} \mathbf{Q}$, 并将(54)式代入上式, 则上式

可写成如下形式

$$\mathbf{F} = - \frac{\mathbf{t} \sigma_u}{\sigma_{e0}} \mathbf{Q} \mathbf{S}_0 \mathbf{T}^e \boldsymbol{\delta}, \quad (68)$$

那么在总体坐标系下的反向节点力向量为

$$\bar{\mathbf{F}} = - \frac{\mathbf{t} \sigma_u}{\sigma_{e0}} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{Q} \mathbf{S}_0 \mathbf{T}^e \boldsymbol{\delta}. \quad (69)$$

经过以上的推导可以给出板元失效时反向节点力的具体表达形式. 另外, 由于板元失效较为复杂, 认为其减缩刚阵为零. 当考虑具有多种缺陷时, 结合(34)式, 则(69)式可以表示为

$$\bar{\mathbf{F}} = - \frac{\mathbf{t} R_d R_r R_s R_u \sigma_{u0}}{\sigma_{e0}} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{Q} \mathbf{S}_0 \mathbf{T}^e \boldsymbol{\delta}. \quad (70)$$

4 算例

某型船舶#165~#200 自然舱段的结构, 如图 5 所示. 先研究无缺陷条件下该舱段的结构可靠性, 然后

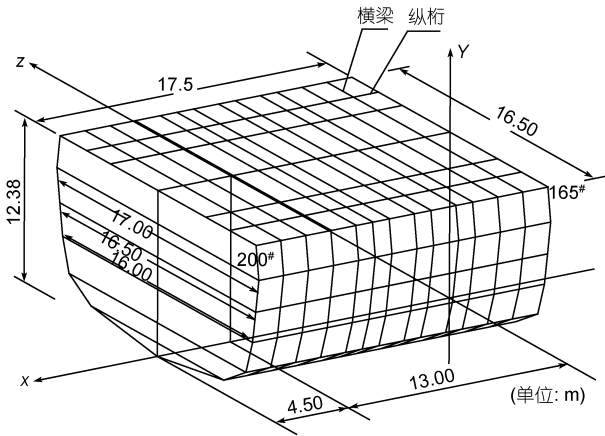


图5 船舶舱段结构示意图

设定有凹陷缺陷的单元, 进行该舱段的有缺陷单元的整体结构可靠性分析。

(i) 载荷及梁板元信息

弯矩按等效轴力作用在#165 横截面上, 剪力假定作用在#165 截面两侧的舷板上. 重量按梁、板分配到节点处的截面积分配, 波浪作用力按其作用面积分配, 舱段载荷分布图如图 6 所示。

舱段受分布载荷包括重力 g 与浮力 q , 分布重力载荷 g 为: $g_1=475.38$ kN/m; $g_2=479.57$ kN/m; $g_3=666.12$ kN/m; $g_4=561.18$ kN/m。

分布浮力载荷 q 为: $q_1=851.08$ kN/m; $q_2=969.75$ kN/m; $q_3=1004.40$ kN/m; $q_4=946.28$ kN/m. 由图 6 知, #165 的弯矩 M 和剪力 Q 为

$$M=328496 \text{ kN}\cdot\text{m}, Q=4760 \text{ kN}.$$

该船体是空间梁板结构, 且在各方向有加强件 (如横梁、纵桁等), 经大量的理论分析和实验研究发现^[26], 采用等剪应力矩形平面应力板元 (CSSR 元) 和均匀加强筋矩形元 (USR 元) 组合而成的加筋板格元 (SP 元) 以及空间梁元再加上带板组成的杂交梁元来模拟效果最好. 该船体结构总共分为 633 个板元和

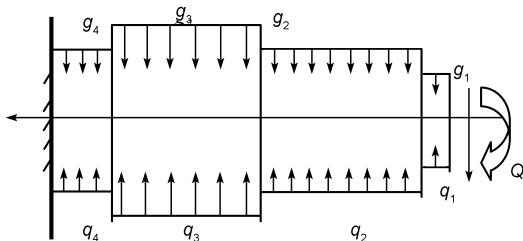


图6 舱段载荷分布图

611 个梁元, 梁元的面积、长度、及板元的厚度等尺寸信息见文献[27]。

(ii) 梁元安全余量及敏度分析

对任一编号为 q 的等直梁元, 假定左端面为 i , 右端面为 j . 当任一梁元 i 端面的安全余量为^[16]

$$M_i = \sigma_y k_8 A_q^{3/2} - \left[k_8 A_q^{1/2} sg(N_{xi}) N_{xi} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{k_8}{k_1} A_q^{1/2} sg(V_{yi}) V_{yi} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{k_8}{k_2} A_q^{1/2} sg(V_{zi}) V_{zi} + \frac{k_8}{k_6} sg(M_{xi}) M_{xi} + \frac{k_8}{k_7} sg(M_{yi}) M_{yi} + sg(M_{zi}) M_{zi} \right], \quad (71)$$

式中: $sg(\cdot)$ 符号函数; A_q 等直梁 q 的截面积; N_{xi} 梁元 i 点的轴向力; V_{yi} 梁元 i 点沿 y 轴的剪力; V_{zi} 梁元 i 点沿 z 轴的剪力; M_{xi} 梁元 i 点 x 轴的扭矩; M_{yi} 梁元 i 点对 y 轴的弯矩; M_{zi} 梁元 i 点对 z 轴的弯矩. $k_1 = \frac{A_{yq}}{A_q}$, $k_2 = \frac{A_{zq}}{A_q}$, $k_6 = \frac{W_{xq}}{A_q^{3/2}}$, $k_7 = \frac{W_{yq}}{A_q^{3/2}}$, $k_8 = \frac{W_{zq}}{A_q^{3/2}}$, 其中: A_{yq} 和 A_{zq} 为等直梁 q 沿 y 和 z 方向抗剪截面积; w_{xq} 为等直梁 q 绕 x 轴的截面模量; w_{yq} 和 w_{zq} 为等直梁 q 对应于弯矩 M_z 和 M_y 的截面模量。

将梁元安全余量对屈服强度、梁元截面积、缺陷、外载等各变量求导, 可得出相应表达式, 完成的敏度分析。

(iii) 板元安全余量及敏度分析

具体公式参见 2.3 节。

(iv) 系统可靠性分析

针对如图 5 所示的船舶结构, 进行结构系统可靠性分析. 将材料屈服应力、梁元截面积、板元厚度和外载看成随机变量. 载荷如图 6 所示, 为了减少随机变量的个数, 在不影响可靠性精度的前提下, 按照载荷大小和变异性将载荷归为 10 类; 根据梁元和板元的几何特征, 将梁元分为 64 类, 板元分为 9 类, 共计 633 个板单元、611 个梁单元. 在可靠性分析时单元的编号为: 板元 1-633, 梁左截面 664-1274, 梁右截面 1275-1885。

假定强度、载荷及面积为服从正态分布的相互独立的随机变量, 强度 σ_s 的均值为 440 MPa, 变异系数为 0.05; 剪切强度 τ_s 的均值为 242 MPa, 变异系数为 0.05; 载荷变异系数为 0.3; 梁元面积变异系数为 0.01,

板元厚度变异系数为 0.01. 弹性模量 E 、剪切弹性模量 G 、梁元长度均为常量, $E=210\times 10^3$ MPa, $G=81\times 10^3$ MPa.

下面讨论没有缺陷结构和具有缺陷时该船体结构系统可靠性, 具体过程如下.

由于该结构是高次超静定问题, 为简化计算, 假定结构系统中有 5 个单元失效, 就认为结构系统失效^[27,28], 这样找出了主要失效模式, 并分析它们的相关性^[17]. 然后采用 PNET 法^[19], 给出代表的失效模式, 最后利用(31)和(33)式完成系统可靠性分析.

i) 不考虑缺陷时的船舶结构系统可靠性分析

经计算得该船舶结构系统可靠性指标为 $\beta_s = 4.139$, 失效概率 $P_f = 1.745\times 10^{-5}$. 该结构系统前五个主要失效模式及其可靠性指标见表 1. 此时, 结构系统可靠性指标对屈服应力在均值点处的敏度为 $\partial\beta_s/\partial\mu_{\sigma_s} = 5.31\times 10^{-6}$; 同样可计算结构系统可靠性指标对每类梁元截面积在均值点处的敏度 $\partial\beta_s/\partial\mu_{A_s}$, 及对每类板元厚度在均值点处的敏度 $\partial\beta_s/\partial\mu_{t_i}$.

ii) 考虑多种缺陷时的结构系统可靠性分析

在本课题进行舱段的可靠性分析中, 由于实测数据的缺乏, 假定在船舶中容易遭受机械损伤的部位板元存在一定的缺陷, 如初始缺陷(初始几何变形和焊接残余应力)、裂纹、凹陷等. 对假定存在缺陷的船舶结构, 极限强度可由(34)式给出.

(i) 缺陷设定

① 初始缺陷. 将缺陷分为轻微、一般、严重缺陷三种情况分别计算. 这里假定具有初始缺陷板元号分别为 74, 75, 85, 86, 125, 126, 136, 137, 142, 176, 177, 187, 188, 193, 227, 228, 238, 239, 244, 282, 283, 293, 294, 299, 337, 338, 348, 354, 394, 395, 405, 406, 411, 445, 446, 456, 457, 462, 496, 497, 507, 508, 513, 547, 548, 558, 559, 564, 636, 637, 647, 648, 并且假设以上各板元同时出现具有轻微、一般或严重缺陷, 且

假设具有轻微、一般和严重缺陷时相应具有轻微、一般和严重焊接残余应力, 其相应的极限强度公式由式(4)计算. 在可靠性分析时将 w_{opl}/t 看成随机变量, 其均值可结合具体板元的柔度 λ 通过(1)式给出, 其变异系数假定为 0.1. (37)式给出了元件安全余量对柔度 λ 的敏度公式, 通过以下变换可以给出元件安全余量对 w_{opl}/t 的敏度, 如下:

$$\frac{w_{opl}}{t} = \begin{cases} 0.025\lambda^2 \\ 0.1\lambda^2 \\ 0.3\lambda^2 \end{cases} = C\lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial w_{opl}/t} = \frac{1}{2\sqrt{C w_{opl}/t}} = \frac{1}{2\sqrt{CC\lambda^2}} = \frac{1}{2C\lambda} \quad (72)$$

$$\frac{\partial M}{\partial w_{opl}/t} = \frac{\partial M}{\partial\lambda} \frac{\partial\lambda}{\partial w_{opl}/t} = \frac{\partial M}{\partial\lambda} \frac{1}{2C\lambda}, \quad (73)$$

式中: C 为系数, 取值根据缺陷的轻微、一般和严重情况, 分别为 0.025, 0.1 和 0.3.

将上式代入(26)和(33)式即可求得结构系统可靠性指标对 $\mu_{w_{opl}/t}$ 的敏度.

② 凹陷缺陷. 将缺陷大小设为两组: 凹陷缺陷 I: $\mu_{d_d/b} = 0.2$, $\mu_{D_d/t} = 3$, $\mu_{h/b} = 0.5$; 凹陷缺陷 II: $\mu_{d_d/b} = 0.9$, $\mu_{D_d/t} = 10$, $\mu_{h/b} = 0.5$, 两组凹陷的变异系数均为 0.1. 其中第 I 组可以认为是较小缺陷(相对而言), 第 II 组可以认为是较大缺陷, 且假设凹陷板元位置在 74 板元上.

③ 裂纹缺陷. 将缺陷大小也设为两组: 裂纹缺陷 I: $\mu_{c/b} = 0.1$; 裂纹缺陷 II: $\mu_{c/b} = 0.45$, 其变异系数假定为 0.1, 且为边缘裂纹. 其中第 I 组可以认为是较小缺陷(相对而言), 第 II 组可以认为是较大缺陷, 且假设裂纹板元位置在 74 板元上.

(ii) 综合考虑各种缺陷时结构系统可靠性分析
当综合考虑各种缺陷情况时, 板元的强度由式

表 1 不考虑缺陷时, 结构系统前 5 个主要失效模式^{a)}

序号	失效路径					可靠性指标
1	390(右)	164(右)	164(左)	212(左)	196(左)	4.16
2	390(右)	164(右)	164(左)	212(左)	212(右)	4.16
3	390(右)	164(右)	164(左)	212(左)	31(右)	4.16
4	390(右)	164(右)	164(左)	212(左)	195(右)	4.16
5	390(右)	164(右)	164(左)	212(左)	169(右)	4.65

a) 说明: (左)、(右)分别表示梁元左右截面; 系统可靠性指标为 4.139

(34)计算. 这里假定两种情况, 综合缺陷 I: 考虑具有一般初始缺陷、凹陷 I 和裂纹 I 时的结构系统可靠性分析; 综合缺陷 II: 考虑具有严重初始缺陷、凹陷 II 和裂纹 II 时的结构系统可靠性分析, 经计算可得如下结果.

① 当综合缺陷 I 时, 所求得的结构失效路径和系统可靠性指标与完整结构相同. 其原因也是由于板元安全裕度较大, 强度下降不多(相对而言), 可靠性指标较大(相对梁元而言), 在分枝限时被删除了.

② 当综合缺陷 II 时, 经计算可得: 板元可靠性指标下降较多, 导致结构系统可靠性指标有所下降, 结构系统失效路径和系统可靠性指标如表 2 所示. 结构系统可靠性 $\beta_s=0.368$, 失效概率 $P_{fs}=3.565 \times 10^{-1}$. 此时, 结构系统可靠性指标对屈服应力在均值点处的灵敏度为 $\partial\beta_s/\partial\mu_{\sigma_s}=3.64 \times 10^{-5}$; 结构系统可靠性指标对假定缺陷在均值点处的灵敏度为 $\partial\beta_s/\partial\mu_{w_{opt}/t}=-7.359 \times 10^{-2}$, $\partial\beta_s/\partial\mu_{d_d/b}=-2.389$, $\partial\beta_s/\partial\mu_{d_d/t}=-0.122$, $\partial\beta_s/\partial\mu_{h/b}=0.639$ 及 $\partial\beta_s/\partial\mu_{c/b}=-2.487$; 同样可以给出结构系统可靠性指标对每类梁元截面积在均值点处的灵敏度 $\partial\beta_s/\partial\mu_{A_i}$, 及每类板元厚度在均值点处的灵敏度 $\partial\beta_s/\partial\mu_{t_i}$.

③ 当不考虑缺陷结构和具有综合缺陷 I 和 II 时, 按照分支限界的第 1 级, 板元可靠性指标由小到大的排列顺序, 前 3 个元件所对应的可靠性指标如表 3 所示. 从表 3 中可以看出: 当综合缺陷 I 时, 板元可靠性指标比不考虑缺陷时的可靠性指标要小. 当

综合缺陷 II 时, 板元可靠性指标有明显的下降, 尤其在 74 号板元上, 其对应的可靠性指标为负值, 导致结构系统可靠性指标有所下降.

5 结论

(i) 本文给出的具有综合缺陷的极限强度公式, 其各种缺陷的强度折减系数, 在初始缺陷和凹陷中, 是经验公式; 在裂纹缺陷中, 是参考以往文献, 通过力学分析得到的. 该极限强度公式, 主要是为有缺陷板元安全余量的建立提供判据, 在系统可靠性分析中, 仅作为一个参考. 本文最终目的, 是给出有综合缺陷板元的可靠性及可靠性指标的灵敏度分析方法.

(ii) 给出了有综合缺陷结构的系统可靠性分析方法, 使我们对缺陷大小对结构系统可靠性的影响程度有了量化的认识. 从表 1 和 2 看出, 当考虑综合缺陷 II 时, 板元和结构系统可靠性指标下降最为明显, 系统可靠性指标由 4.139 降为 0.368. 因此, 在船舶制造和使用过程中应该关注综合缺陷对结构系统可靠性的影响, 特别在生产过程, 要严格保证产品质量, 确保结构的可靠.

(iii) 给出具有综合缺陷板元失效模式和系统可靠性指标的灵敏度表达式, 由此可定量地看出结构系统中, 不同变量对可靠性指标的贡献, 这便于工程中结构元件的优化及合理设计.

(iv) 给出具有综合缺陷板元的减缩刚阵和反向节点力的表达式, 使失效过程中的残余结构的可靠性分析模型更趋于合理.

表 2 陷 II 时, 结构系统 5 个主要失效模式^{a)}

序号	失效路径					可靠性指标
1	74	244	354	462	513	1.30
2	74	244	354	462	411	1.30
3	74	244	354	462	299	1.30
4	74	244	354	462	271(右)	1.71
5	74	244	354	462	272(右)	1.82

a) 说明: (左)、(右)分别表示梁元左右截面, 其余为板元编号; 系统可靠性指标为 0.368

表 3 综合情况下前 3 个板元所对应的可靠性指标

完整	元件号	53	56	74
	可靠性指标	11.89	11.92	12.06
综合缺陷 I	元件号	74	75	86
	可靠性指标	7.34	8.82	9.23
综合缺陷 II	元件号	74	244	354
	可靠性指标	-1.35	1.23	1.28

表 4 考虑综合缺陷 II 和不考虑缺陷的灵敏度比较

类型	$\partial\beta_s/\partial\mu_{\sigma_s}$	$\partial\beta_s/\partial\mu_{\sigma_s}$ 范围	$\partial\beta_s/\partial\mu_{\sigma_s}$ 范围
不考虑缺陷	5.31×10^{-6}	$[-3.55\times 10^2, 1.52\times 10^3]$	$[-3.31\times 10^2, 2.48\times 10^2]$
考虑综合缺陷 II	3.64×10^{-5}	$[-4.62, 9.53]$	$[-8.26, 6.09\times 10^{-1}]$

(v) 上述灵敏度计算结果, 看出当考虑综合缺陷 II 的情况下, 结构系统可靠性指标对缺陷的灵敏度最严重的为 $\partial\beta_s/\partial\mu_{\sigma_s} = -2.487$, 远高于结构系统可靠性指标对屈服应力在均值点处的灵敏度为 $\partial\beta_s/\partial\mu_{\sigma_s} = 3.64\times 10^{-5}$. 这说明当考虑综合缺陷 II 的情况下, 如果只提高材料的屈服应力, 对提高结构系统可靠性的影响可能并不明显. 因此, 为了确保结构安全, 应及时对缺陷进行修理. 另外, 在考虑综合缺陷 II 和不考虑缺陷的情况下, 可看出结构系统可靠性指标对各变量的灵敏度是不同的. 这主要是由于考虑综合缺陷 II 的存在, 改变了相关元件的极限强度, 使结构系统主要失效路径发生了改变. 因此, 在两种情况下, 结构系统主要失效路径是不一样的, 导致各变量对结

构系统可靠性指标的贡献也不同, 表 4 做了对比.

考虑综合缺陷 II 情况下, 灵敏度分析的结果, 对制定维修和更新策略很有意义. 使得用户知道, 出现缺陷后, 除了对有缺陷板元关注外, 还可以分析由于综合缺陷的影响, 与缺陷板元相关的其它变量对可靠性的影响程度, 即哪些影响大, 哪些影响小, 以便根据这个结果, 制定总体维修和更新策略, 这必将提高决策的合理性和经济性.

(vi) 本文给出的综合缺陷中每一种缺陷大小及位置是做了假定, 这只是为了计算而说明本文提出方法的有效性采用的. 真实情况下, 不一定是这样, 缺陷也可能不是综合的, 但仍可以用本文给出的方法进行分析.

参考文献

- Paik J K, Thayamballi A K. Empirical formulation for predicting the ultimate compressive strength of stiffened panels. In: Proceedings of the seventh International Offshore and Polar Engineering Conference. Golden, CO: Int Soc of Offshore and Polar Engineers (ISOPE), 1997. 328—338
- Paik J K, Thayamballi A K, Park Y I. Local buckling of stiffeners in ship plating. J Ship Res, 1998, 42: 56—67
- Paik J K, Thayamballi A K, Lee W H. A numerical investigation of tripping. Mar Struct, 1998, 11: 159—183
- Paik J K, Thayamballi A K, Kim D H. An analytical method for the ultimate compressive strength of stiffened panels. J Construct Steel Res, 1999, 49: 43—68
- Paik J K, Thayamballi A K, Wang G, et al. On advanced buckling and ultimate strength design of ship plating. Trans SNAME, 2000. 108—141
- Paik J K, Thayamballi A K. Buckling strength of steel plating with elastically restrained edges. Thin-Walled Struct, 2000, 137(1): 27—57
- Paik J K, Thayamballi A K, Kim B J. Advanced ultimate strength formulations for ship plating under combined biaxial compression/tension, edge shear and lateral pressure loads. Mar technol, 2001, 138: 9—25
- 张少雄, 余友谊. 有凹陷的板在轴向压力作用下的极限强度. 武汉理工大学学报, 2004, 28(3): 315—333
- Smith C S, Davidson P C, Chapman J C, et al. Strength and stiffness of ship's plating under in-plane compression and tension. Trans RINA, 1988. 130
- Cui W C, Mansour A E. Effects of welding distortions and residual stress the ultimate strength of long rectangular plates under uniaxial compression. Mar Struct, 1988, 11: 251—269
- 胡勇, 崔维成. 具有裂纹缺陷的板和加筋板格在联合载荷作用下的剩余极限强度. 船舶力学, 2003, 7(1): 63—78
- 孙克淋. 具有缺陷板的船体极限强度可靠性分析. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2008. 53
- 孙克淋, 安伟光, 王滨生, 等. 航天飞机薄壁结构的可靠性分析. 哈尔滨工程大学学报, 2004, 25(3): 327—331
- An W G, Sun K L, Chen W D, et al. Optimum design based on reliability in stochastic structure systems. Appl Math Mech, 2005, 26(10): 1293—1302
- 安伟光, 孙克淋, 王滨生. 梁板结构系统可靠性分析的关键问题研究. 宇航学报, 2003, 24(6): 621—624
- 安伟光, 蔡荫林, 陈卫东. 随机结构系统可靠性分析与优化设计. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2005. 183—190
- 安伟光. 结构系统可靠性和基于可靠性的优化设计. 北京: 国防工业出版社, 1997. 153
- ANG A H-S, Tang W H. Probability Concepts in Engineering Planning and Design. New York: John Wiley and Sons, 1984, 2: 135—146

- 19 赵维涛, 安伟光. 随机空间梁板结构系统静强度可靠性分析. 兵工学报, 2007, 28(8): 953—956
- 20 严心池, 安伟光, 陈卫东. 大型舰船结构的可靠性研究. 哈尔滨工程大学学报, 2004, 25(2): 147—150
- 21 董聪. 现代结构系统可靠性理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2001. 35—45
- 22 胡云昌, 郭振邦. 结构系统可靠性分析原理及应用. 天津: 天津大学出版社, 1992. 1, 6—7, 76—155, 80—95
- 23 何水清, 王善. 结构可靠性分析与设计. 北京: 国防工业出版社, 1993. 55—98
- 24 黄兴棣. 工程结构可靠性设计. 北京: 人民交通出版社, 1992. 112—136
- 25 吴香国. 具有初始几何缺陷的不完整结构系统可靠性分析. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2004. 37—48
- 26 休斯 O F, 著. 张祥孝, 译. 船舶结构设计. 广州: 华南理工大学出版社, 1988. 1—6, 61—83, 360—368, 330—336, 369—382, 241, 279, 322
- 27 安伟光, 洪国钧, 蔡荫林, 等. 基于随机有限元的舰船结构可靠性优化设计方法. 哈尔滨: 国防科技报告, 2002. 135—155, 215—243
- 28 蔡荫林, 安伟光, 陈卫东. 舰船结构可靠性分析与优化设计. 哈尔滨: 中国船舶科技报告, 1997. 86—95