

文章编号: 1002-0268 (2004) 02-0053-04

索力测定常用公式精度分析

魏建东

(西南交通大学, 四川 成都 610031)

摘要: 本文分析了常用的频率法测定索力公式的精度。利用作者建立的索索非线性有限元法分析程序, 可得到对应特定索力的索索频率分布。基于此频率分布, 采用不同的索力公式可推算出对应的索力。通过对比所得索力与设定索力, 可判断各公式的精度。本文以某斜拉桥的索索为例, 对处于不同张紧程度、不同长度的索索进行了分析。分析结果给出了频率法测定索力时的注意事项, 以及各公式的适用范围, 并推荐了一种高精度的索力推算公式。

关键词: 斜拉桥; 斜拉索; 拉索; 索力; 索结构

中图分类号: U448.27

文献标识码: A

Precision Analysis of Conventional Formulas Calculating Cable Tension

WEI Jian-dong

(Southwest Jiaotong University, Sichuan Chengdu 610031, China)

Abstract: The precision of Conventional formulas calculating cable tension was studied in this paper. Using the nonlinear finite element analysis program developed by the author, the frequency distribution of a cable with given tension can be valued. Based on the frequency distribution, the corresponding cable tensions can be calculated by the formulas. Comparing the calculated tensions with the given one, the precision of every formula can be decided. Taking the cables in one cable-stayed bridge as example, this paper studied the cables with different length and slackness. The results show the cases that more attention should be paid, the applicable scope of every formula, and one high precision formula is proposed by the author.

Key words: Cable-stayed bridge; Stay-cable; Cable; Cable tension; Cable structure

0 前言

在斜拉桥的施工过程中, 需要对其拉索的张力进行多次测定, 结果的准确与否直接关系到施工控制能否顺利进行, 特别是能否精确合拢, 及成桥后各构件的受力及整个桥梁线形是否接近设计状态。另外, 在运营一段时间后, 由于斜拉桥主梁及索塔的徐变及斜拉索的松弛效应, 索力及桥形都会发生变化, 也需再次测定索力, 以便通过调整索力改善结构的受力状态。

目前常用的索力测定方法有压力表测定法、压力传感器测定法及振动法。前两种方法对某根索来说适用于其被张拉的瞬间, 虽第二种方法可进行长期在线

测定, 但代价昂贵, 很少使用。当需对施工完毕的拉索进行索力测定时, 振动法几乎是目前惟一的选择^[1]。振动法在理论上比较有成熟的公式, 测试过程中所需设备简单, 容易实现, 结果可靠、准确, 可满足施工过程多次反复测试的要求。常用的振动法采用受拉的弦或水平直梁来模拟拉索, 利用它们在不同边界条件下的频率方程, 得到索力与频率之间的关系式^[2~4], 利用测得的频率就可计算出索力, 因而又称为频率法。

由于振动法有多个索力计算公式可供选择, 有必要分析常用的索力计算公式的精度, 以及在满足一定误差要求情况下, 各公式的适用范围, 以便在采用振动法测定斜拉索索力时正确地选择计算式。

收稿日期: 2002-12-29

作者简介: 魏建东 (1968—), 男, 河南新密人, 工学博士, 副教授, 从事结构工程教研工作。

为此, 本文采用作者建立的平面非线性有限元法程序, 对常用的索力测试公式的精度进行分析。

1 常用的振动法索力计算公式

1.1 张紧弦模型

该模型利用两端固定的张紧弦模拟斜拉索, 由频率方程得索力

$$T=4ml^2f_1^2 \quad (1)$$

其中, m 为单位长度索的质量; l 为索的计算长度; f_1 为基频。张紧弦的频率之间成倍数关系, 即从低到高各阶频率之比为 $1:2:3:4:5:6\cdots$, 因而基频 $f_1=f_n/n$, 并且相邻频率的差值等于基频, 即存在

$$f_1=\Delta f=f_2-f_1=f_3-f_2=\cdots$$

只要确定出频差, 或者判断出某阶频率的阶数, 就可利用式 (1) 计算出索力。

1.2 两端铰支的受拉水平直梁

该模型利用两端铰支的受拉水平直梁模拟斜拉索, 由频率方程得索力

$$T=4ml^2(f_n/l_n)^2-n^2\pi^2EI/l^2 \quad (2)$$

其中, EI 为拉索的截面抗弯刚度。不考虑抗弯刚度的影响, 则式 (2) 转化为式 (1)。本模型由于考虑了抗弯刚度, 比水平弦模型更合理。

索力测定过程中, 只要根据频差确定出某阶频率的阶数, 就可利用式 (2) 计算出索力。

利用式 (2) 可根据测得的某阶频率推算出对应本模型的基频

$$f_1=\sqrt{(f_n/l_n)^2-(n^2-1)B/A} \quad (3)$$

其中, $A=4ml^2$, $B=\pi^2EI/l^2$ 。进而由 (2) 得到由基频计算索力的公式

$$T=Af_1^2-B \quad (4)$$

为利用形式简单的弦模型索力计算式, 由式 (1) 和式 (2) 可确定伪基频

$$f_1'=\sqrt{(f_n/l_n)^2-n^2B/A} \quad (5)$$

1.3 两端固支的受拉水平直梁^[2]

该模型利用两端固支的受拉水平直梁模拟斜拉索, 其频率方程为

$$2\alpha\beta(1-\cos\alpha\cosh\beta l)+(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha\sinh\beta l=0 \quad (6)$$

$$\text{其中, } \alpha^2=\sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2+\frac{m}{EI}\omega^2}-\frac{T}{2EI}$$

$$\beta^2=\sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2+\frac{m}{EI}\omega^2}+\frac{T}{2EI}$$

$$\omega=2\pi f$$

利用本模型计算索力, 只需直接将测得的某阶频

率代入式 (6), 不需要判断其阶数。一般的索力测定都使用笔记本电脑, 因而可通过求解非线性方程顺利定出索力。

本模型比两端铰支的受拉水平直梁模型更合理, 得到的索力也应该更接近真实值。

1.4 柔性拉索模型

两端点间弦线倾角为 θ 的柔性拉索, 其频率分布为^[5]: (1)面外振型的频率为 $\omega_n^*=n\pi$, n 为频率的阶数; (2)面内对称振型的频率由一非线性方程确定; (3)面内反对称振型的频率为 $\omega_n^*=2n\pi$, 其中, $\omega_n^*=\omega_n l^*/(H^*/l_m)^{1/2}$, $H^*=H\sec\theta$, H 为索力的水平分量。 H^* 为索力的一个近似, 因索力并非沿弦向。索力的水平分量 $H=4ml^2(f_n/l_n)^2\cos\theta$ 。因而索力近似计算式与弦模型的相同

$$T=4ml^2(f_n/l_n)^2 \quad (7)$$

根据该模型, 某些低阶的面内对称振型的频率较对应的面外频率有一定的上移, 上移量随索力的变化而变化, 索力越大, 差异越小。斜拉桥中拉索张力较大, 成桥状态只有一阶对称振型的频率出现上移现象, 而施工过程中二阶面内对称振型的频率可能也会有很小的上移量。如法国诺曼底大桥的最长拉索, 即使在工作状态, 基频与由张紧弦公式推测的基频也有 6.9% 的误差^[6], 施工过程中的就更大了。因此, 实际测定索力时应避免使用基频。

由于基频在索中央处有最大振幅, 而高次谐波在两端可以有最大振幅。实测中传感器常安装在拉索靠近桥面端附近, 因而一般得到的信号中基频成份就相对较小, 高次谐波成份占优势。在频谱图中基频不突出, 甚至为零。因而也没有必要苛求基频出现, 更不应该利用张紧弦模型对应的公式去推测基频, 进而采用基频法^[1]。

2 求解拉索问题的非线性有限元方法

有限元中常用于模拟拉索的单元有^[7]: 铰接杆单元、非线性两节点单元、多节点非线性单元、悬链线单元。由于垂度的影响, 拉索问题具有几何非线性。本文采用平面非线性梁单元^[8], 其几何刚度矩阵考虑了轴力、弯矩及扭矩的作用, 特别是考虑了轴力和弯矩的相互作用。采用 U. L 格式和双重平衡迭代法建立有限元法的求解过程。

非线性分析过程大致分为 3 部分: 预测、校正和平衡检查。预测阶段至多控制收敛的速度, 校正阶段控制最终精度。而校正阶段最重要的部分是计算单元

的节点力。在增量法非线性分析中，每一步我们都需要知道单元的节点力，这有两个用途——计算几何刚度矩阵和计算不平衡力。在修正拉格朗日法中，假设上一个构形为 C_1 ，作用力为 $\{^1f\}$ ，假设从 C_1 到 C_2 外力已有了一个小增量，并且在它的作用下，每个单元有了位移增量 $\{u\}$ 。我们需要求解在 C_2 构形作用于各单元的力 $\{^2f\}$ 。这也有两种途径——自然变形法和外部刚度法，在梁类结构分析中常用自然变形（纯变形）法。本文采用非线性梁单元的纯变形法，具体过程见文献 [8]。

本文建立的有限元分析分两步进行，首先使拉索两端点铰支，并求得平衡位置。这保证了成桥状态拉索端部不存在不希望出现的多余旋转约束力矩。随后再约束两端点的转角位移，即端部达到固支，这与实际的端部不转动相一致，进而可计算拉索的频率。

以下以芜湖长江大桥的拉索为例，利用作者建立的平面非线性有限元法索力计算程序，考查以上所述的常用索力计算公式的精度。

3 常用的索力计算公式精度考查

芜湖长江大桥为主跨跨度达 312m 的公铁两用斜拉桥。鉴于在施工过程中，短索中 2 号索的索力变化较大（2 557~6 952 kN），长索中 7 号索的索力变化较大（4 191~5 750 kN），本文就分别以它们为短索和长索的代表进行讨论。

本文中 2 号索和 7 号索各参数的参考取值如表 1 所示。有限元计算中以拉索中部的索力代表拉索的索力。以下分别考查 2 号索和 7 号索处于松弛状态和张紧状态时以上各索力计算公式的精度。

2 号索和 7 号索各参数的参考取值 表 1					
索号	倾角 (度)	弹性模量 (GPa)	截面惯性矩 ($\times 10^{-5} \text{m}^4$)	单位长度 索重 (N/m)	索长 (m)
2	27.631	195	1.1344	898.3	51.438
7	16.077	195	1.4816	1055.2	109.762

3.1 松弛状态的短索

有限元计算时通过调整索原长，使 2 号索的索力为施工过程中该索的最小索力，即 2 557kN，并计算索的对应频率。对此频率分布由各公式计算的索力误差如表 2 所示。表中第 1 列为频率的阶数，第 2 列为有限元计算得到的频率，第 3 列为利用频差由弦模型计算索力的误差，第 4 列为利用频率与阶次的商由弦模型计算索力的误差，第 5 列为由两端铰支受拉水平梁模型计算索力的误差，第 6 列为由两端固支受拉水

平梁模型计算索力的误差。

用于松弛的短索时各索力计算式误差 (%) 表 2					
阶次	F_n	弦 (Δf)	弦 (f_n/n)	梁-铰支	梁-固支
1	1.702	9.87	9.87	9.55	1.81
2	3.394	8.47	9.17	7.88	0.12
3	5.132	14.54	10.94	8.04	0.14
4	6.917	20.81	13.37	8.21	0.13
5	8.765	29.53	16.52	8.45	0.13

由表 2 可知，只有由两端固支受拉水平梁模型计算索力的误差满足工程要求。利用频率与阶次的商由弦模型计算索力的误差小于利用频差由弦模型计算索力的误差，这主要是因为抗弯刚度的影响随频率阶次的提高而增加，使得各阶频率较弦模型相应频率的增量也逐渐增大，且频差也逐渐增大。频差的误差为频率误差的 2 倍，而频率与阶次的商将误差降为频率的 $1/n$ 。文献 [9] 也证明了这一点。由于考虑了刚度的影响，两端铰支受拉水平梁模型计算索力的误差小于弦模型的误差。两端固支受拉水平梁模型计算索力的误差最小，主要是因为它真实地模拟了边界条件。

观察还发现由一阶频率计算的索力偏大许多，这是因一阶频率发生了上移，这可由柔性索模型得到解释。在不考虑一阶频率的情况下，各模型的计算误差都随阶次依次增加，因而在采用频率法测量索力时应通过施加人工激励等办法得到低阶频率。

另外，文献 [4] 为避免求解非线性方程，将式 (6) 按索的长短及张力的大小简化为一些不同情况下的实用公式。本算例采用实用公式时，计算的索力误差为 1.46%，误差较小，满足工程要求。

3.2 张紧状态的短索

有限元计算时调整索原长，使 2 号索的索力为施工过程中该索的最大索力，即 6 952kN，并计算索的对应频率。进而由各公式计算的索力误差如表 3 所示。

用于张紧的短索时各索力计算式误差 (%) 表 3					
阶次	F_n	弦 (Δf)	弦 (f_n/n)	梁-铰支	梁-固支
1	2.745	5.094	5.094	4.976	0.425
2	5.498	5.669	5.381	4.907	0.339
3	8.271	7.271	6.009	4.941	0.343
4	11.074	9.534	6.885	4.986	0.346
5	13.915	12.580	8.012	5.045	0.351

表中各列如前所述。由表 3 可知，依然只有利用两端固支受拉水平梁模型计算索力的误差满足工程要求。误差随模型及阶次的变化规律也与上相同，相应

的误差减小了。文献 [4] 中实用公式计算的索力误差为 0. 12%, 误差很小。

3 3 松弛状态的长索

有限元计算时通过调整索原长, 使 7 号索的索力为施工过程中该索的最小索力, 即 4 191kN, 计算索的对应频率。进而由各公式计算的索力误差如表 4 所示。由表 4 可知, 除两端固支受拉水平梁模型外, 两端铰支受拉水平梁模型的误差也基本满足误差要求。误差随模型及阶次的变化规律也与上相同。文献 [4] 中实用公式计算的索力误差为 3. 33%, 仍满足工程要求。利用张紧弦模型, 并基于频差计算索力时, 只有利用第 3 阶和第 2 阶频率之差时, 索力误差才小于 3%; 基于频率与阶次之商计算索力时, 只有对阶次小于 5 阶的频率, 才勉强满足工程要求。

用于处于松弛状态的长索时的误差 (%) 表 4

阶次	F_n	弦 (Δf)	弦 (f_n/n)	梁-铰支	梁-固支
1	0. 929	6. 783	6. 783	6. 726	3. 575
2	1. 829	0. 296	3. 514	3. 288	0. 181
3	2. 749	4. 541	3. 856	3. 347	0. 230
4	3. 671	5. 333	4. 224	3. 320	0. 190
5	4. 601	6. 909	4. 758	3. 346	0. 198

3 4 张紧状态的长索

有限元计算时通过调整索原长, 使 7 号索的索力为施工过程中该索的最大索力, 即 5 750kN, 并计算索的对应频率。进而由各公式计算的索力误差如表 5 所示。由表 5 可知, 除两个受拉水平梁模型的误差外, 基于弦模型, 并利用频率与阶次的商计算的索力, 对低阶频率也基本满足工程要求。误差随模型及阶次的变化规律也与上相同。文献 [4] 中实用公式计算的索力误差为 1. 37%, 误差较小。

用于处于张紧状态的长索时的误差 (%) 表 5

阶次	F_n	弦 (Δf)	弦 (f_n/n)	梁-铰支	梁-固支
1	1. 075	4. 281	4. 281	4. 240	1. 584
2	2. 138	1. 867	3. 071	2. 906	0. 263
3	3. 211	3. 769	3. 303	2. 933	0. 284
4	4. 287	4. 433	3. 585	2. 927	0. 269
5	5. 369	5. 523	3. 971	2. 942	0. 273

4 结论

本文通过对基于振动法的常用索力计算公式精度

的分析, 主要得出以下结论:

- (1) 应尽量避免使用基频计算索力。
- (2) 只有两端固支受拉水平直梁模型对应的计算公式精度很高, 适用于任何状态的拉索; 其简化后的实用公式, 也适用于任何状态的拉索, 但对于处于松弛状态的长索误差偏大, 超过 3. 0%, 拉索比本文中的长索更长, 误差将更大。
- (3) 基于弦模型和两端铰支受拉水平直梁模型的索力计算公式, 不适用于短索。
- (4) 对于长索, 在满足条件 (1) 的情况下, 两端铰支受拉水平直梁模型的索力计算公式适用于拉索的整个施工过程, 且对选择的频率的阶次不敏感, 索力误差不大于 4. 0%, 拉索比本文中的长索更长, 则误差更小; 利用频率与阶次之商的张紧弦模型索力计算公式, 只有对阶次小于 5 阶的情况才基本满足工程要求, 但误差大于 3. 0%, 拉索比本文中的长索更长, 误差会有所减小; 利用频差的张紧弦模型索力计算公式, 对第三阶和第二阶频率之差, 索力误差才小于 2. 0%, 满足工程要求, 拉索比本文中的长索更长, 误差才会有所减小。
- (5) 对于长索, 当利用基于弦模型和两端铰支受拉水平直梁模型的索力计算公式时, 应尽量利用环境振动或人工激励得到低阶频率。

根据本文分析, 建议索力测量时直接利用基于两端固支受拉水平直梁模型对应的计算公式。本文的分析结果同样适用于其它索工程中的索力测定。

参考文献:

[1] 林元培. 斜拉桥 [M] . 北京: 人民交通出版社, 1994

[2] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动 [M] . 北京: 中国铁道出版社, 1992

[3] 郭良友. 绳、索的振动特征及斜拉桥的索力测量 [J] . 桥梁建设, 1995 (1): 61—64.

[4] 郑宪政, 郝超. 用振动法估计拉索张力的实用公式 [J] . 国外桥梁, 1997 (3): 27—32

[5] Irvine H M. Cable Structures Cambridge [J] . The MIT Press, 1981

[6] J L Li'en. Vibration Amplitudes Caused by Parametric Excitation of Cable Stayed Structures [J] . Journal of sound and vibration, 1994, 174 (1): 69—73

[7] 魏建东. 斜拉桥拉索的参数振动及其控制 [D] . 西南交通大学博士学位论文, 1999.

[8] Yeong - bin Yang, Shyh - rong Kuo. Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures [J] . Simon & Schuster (Asia) Pte Ltd, 1994.

[9] 陈文革, 蔡键. 斜拉桥索力的测试方法 [J] . 华东公路, 1998 (1): 61—63.