

论 $n + k$ ($k \geq 3$) 相多体系 封闭网图的某些性质

郭 其 悌

蔡 晨

(中国科学院地球化学研究所, 贵阳) (中国科学院应用数学研究所, 北京)

摘 要

本文讨论了 $n + 3$ 及 $n + 4$ 相多体系封闭网图的某些性质, 提出了 $n + k$ ($k \geq 3$) 相多体系双变度组合特征稳定多边形定理, 说明: 任何 $n + k$ ($k \geq 3$) 相多体系的一个双变度组合, 最大可在封闭网图的一个无对角线的 k 边形中稳定, 最小可在一个三角形中稳定. 在给出这一定理的证明后, 文中着重指出, 此定理并不意味着在任何 $n + k$ 相多体系的封闭网图或实际相图中都必须存在无对角线的 k 边形, 即使该实际相图具有最大的闭合度.

最近, Roseboom 和 Zen^[1] 发现, 若把二元系的化学成分图解轴最边缘的两个相命名为外部相, 而把其它相称为内部相, 则在二元多体系的封闭网图中, 每一内部相都对应着一个自己在其中稳定的接续区域. 他们指出, 二元多体系的各种封闭网图正是由这些内部相所对应的所有连续区域的重叠所构成的. 基于此发现, 他们提出了“叠加稳定区方法”, 并用此方法推导了二元六相($n + 4$)多体系的全部可能的封闭网图^[2]. 据我们判断, Roseboom 和 Zen 的叠加稳定区方法不仅适用于二元六相($n + 4$)多体系, 也理应适用于二元 $n + k$ ($k \geq 4$) 相多体系. 但是, 看来这一方法不适用于一元系、三元系以及更复杂的体系. 在一元系, 由于所有各相化学组成均相同, 因此, 无所谓外部相与内部相的区别; 同时, 一元系中每一个双变度组合只有一个相, 每一个相在封闭网图中单独占据一个相区域, 区域之间只有邻接而无重叠. 在三元系, 化学成份图解关系是复杂的, 而且, 相数越多, 关系越复杂. 对叠加稳定区方法来说, 这时主要有两个困难. 第一, 并不是所有的化学成份图解都能区分出外部相和内部相. 例如, 当三元七相多体系的七个相, 在化学成份图解中形成七边形时, 这七个相的地位完全相同, 都只能是外部相, 而没有内部相. 第二, 即使在化学成份图解中区分出了外部相和内部相, 也不存在内部相与特定区域间的一一对应关系. 这样一来, 叠加稳定区方法不能适用于三元多体系封闭网图的推导就成为一个明显的事实. 不仅如此, 人们还会自然产生以下一系列问题: 为什么二元封闭网图同三元封闭网图之间会有这样的差别? 这种差别是不是一种本质的差别? 如果它不是一种本质的差别, 那么更本质的东西是什么? 也就是说, 有没有一种更本质的性质或规律

能将二元封闭网图和三元封闭网图的这种差异协调起来,以求得统一的解释?

作者的研究表明,二元封闭网图和三元封闭网图间的上述差异不是一种本质的差异,更本质的东西是,无论二元封闭网图还是三元封闭网图,其中每一双变度组合都对应着一个独特的自己在其中稳定的多边形;这样的多边形称为“双变度组合的特征稳定多边形”,或简称为“特征稳定多边形”.二元封闭网图和三元封闭网图都是由各自的特征稳定多边形的规律的相互叠加而形成的.不同的是,由于二元多体系的化学成份图解只是一个轴,每一个双变度组合都在这个轴上,所以,特征稳定多边形的相互重叠就自然形成了每一内部相对应一特定区域的现象;而三元系的化学成份图解是一个二维的平面图形,它可以有许多种变化,即使在某一确定的化学成份图解下,特征稳定多边形的重叠也不能形成任一内部相均对应一特定区域的结果.

一、二元和三元封闭网图的例证

先看二元六相多体系的两个任意选择的封闭网图.图 1a 是八点封闭网图 $\{1|4\}$;图 1b 是九点封闭网图 $\{1|2|4\}$ 或 $\{3|5|6\}$.

在文献[2]中已经特别指出过,二元六相多体系八点封闭网和九点封闭网间的一个重要不同是,八点封闭网缺失总数为 15 个的双变度组合中的某一个;而且,八点封闭网的标记符号若

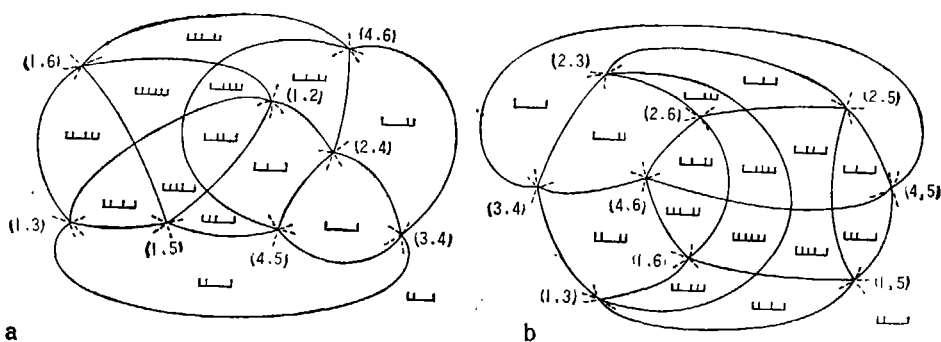


图 1 二元六相多体系八点和九点封闭网图中双变度组合的分布

a. 八点封闭网图 $\{1|4\}$, 15 个双变度组合中 $(2, 3, 5, 6)$ 缺失. 双变度组合分布如下:

1) $(1, 2, 3, 4)$ 在四边形(以下用符号 $\square$ 代表) $(1, 2)(1, 3)(3, 4)(2, 4)$ 中; 2) $(1, 2, 3, 5)$ 在三边形(以下用符号 $\triangle$ 代表) $(1, 2)(1, 3)(1, 5)$ 中; 3) $(1, 2, 3, 6)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 3)(1, 6)$ 中; 4) $(1, 2, 4, 5)$ 在 $\square(1, 2)(1, 5)(4, 5)(2, 4)$ 中; 5) $(1, 2, 4, 6)$ 在 $\square(1, 2)(2, 4)(4, 6)(1, 6)$ 中; 6) $(1, 2, 5, 6)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 5)(1, 6)$ 中; 7) $(1, 3, 4, 5)$ 在 $\square(1, 3)(3, 4)(4, 5)(1, 5)$ 中; 8) $(1, 3, 4, 6)$ 在 $\square(1, 3)(3, 4)(4, 6)(1, 6)$ 中; 9) $(1, 3, 5, 6)$ 在 $\triangle(1, 3)(1, 5)(1, 6)$ 中; 10) $(1, 4, 5, 6)$ 在 $\square(1, 6)(1, 5)(4, 5)(4, 6)$ 中; 11) $(2, 3, 4, 5)$ 在 $\triangle(2, 4)(4, 5)(3, 4)$ 中; 12) $(2, 3, 4, 6)$ 在 $\triangle(2, 4)(3, 4)(4, 6)$ 中; 13) $(2, 3, 5, 6)$ 缺失; 14) $(2, 4, 5, 6)$ 在 $\triangle(2, 4)(4, 5)(4, 6)$ 中; 15) $(3, 4, 5, 6)$ 在 $\triangle(3, 4)(4, 6)(4, 5)$ 中.

b. 九点封闭网图 $\{1|2|4\}$ 或 $\{3|5|6\}$. 15 个双变度组合均出现, 分布情况如下:

1) $(1, 2, 3, 4)$ 在 $\triangle(1, 3)(2, 3)(3, 4)$ 中; 2) $(1, 2, 3, 5)$ 在 $\square(1, 3)(1, 5)(2, 5)(2, 3)$ 中; 3) $(1, 2, 3, 6)$ 在 $\square(1, 3)(2, 3)(2, 6)(1, 6)$ 中; 4) $(1, 2, 4, 5)$ 在 $\triangle(1, 5)(2, 5)(4, 5)$ 中; 5) $(1, 2, 4, 6)$ 在 $\triangle(1, 6)(2, 6)(4, 6)$ 中; 6) $(1, 2, 5, 6)$ 在 $\square(1, 5)(2, 5)(2, 6)(1, 6)$ 中; 7) $(1, 3, 4, 5)$ 在 $\square(1, 3)(1, 5)(4, 5)(3, 4)$ 中; 8) $(1, 3, 4, 6)$ 在 $\square(1, 3)(1, 6)(4, 6)(3, 4)$ 中; 9) $(1, 3, 5, 6)$ 在 $\triangle(1, 3)(1, 5)(1, 6)$ 中; 10) $(1, 4, 5, 6)$ 在 $\square(1, 5)(4, 5)(4, 6)(1, 6)$ 中; 11) $(2, 3, 4, 5)$ 在 $\square(2, 3)(2, 5)(4, 5)(3, 4)$ 中; 12) $(2, 3, 4, 6)$ 在 $\square(2, 3)(3, 4)(4, 6)(2, 6)$ 中; 13) $(2, 3, 5, 6)$ 在 $\triangle(2, 3)(2, 5)(2, 6)$ 中; 14) $(2, 4, 5, 6)$ 在 $\square(2, 5)(2, 6)(4, 6)(4, 5)$ 中; 15) $(3, 4, 5, 6)$ 在 $\triangle(3, 4)(4, 6)(4, 5)$ 中.

为 $\{r|k\}$, 缺失的双变度组合一定是 $r+k$. 九点封闭网不缺失任何双变度组合. 因此, 图 1a 中的封闭网图 $\{1|4\}$ 中缺失双变度组合 $(2, 3, 5, 6)$, 即 $1+4$. 也就是说, 封闭网图 $\{1|4\}$ 中尚有 14 个双变度组合. 现在让我们来看这 14 个双变度组合在封闭网图中是怎样分布的.

由图 1a 可看出, 无变度点 $(2, 4), (3, 4), (4, 5)$ 和 $(4, 6)$ 中的任两点间均有单变度直接连线, 而且, 这四个无变度点和它们之间的单变度连接线形成了四个三角形. 在三边形 $(2, 4)(3, 4)(4, 6)$ 中, 双变度组合 $(2, 3, 4, 6)$ 即 $1+5$ 稳定; 在三边形 $(2, 4)(4, 5)(4, 6)$ 中, 双变度组合 $(2, 4, 5, 6)$ 即 $1+3$ 稳定. 在三边形 $(2, 4)(3, 4)(4, 5)$ 中, 双变度组合 $(2, 3, 4, 5)$ 即 $1+6$ 稳定. 第四个三角形就是以上三个三角形以外的区域, 它的三个顶点分别为 $(3, 4), (4, 6)$ 和 $(4, 5)$, 在这个三角形中, 双变度组合 $(3, 4, 5, 6)$ 即 $1+2$ 稳定. 不仅如此, 以上每一双变度组合只在各自的三角形中稳定, 而不会在任何其它的区域中找到.

类似的分析可用于 $(1, 2), (1, 3), (1, 5)$ 和 $(1, 6)$ 四个彼此间有直接单变度连接线的无变度点所形成的四个三角形.

除此之外, 一个双变度组合还可能在一个没有对角线的四边形中稳定. 对图 1 来说, 四边形区域的出现是同网的拼合密切有关的. 在这里, 有必要特别定义一下多边形的对角线, 即: 一个多边形的任两个不相邻的顶点间的连线都是该多边形的对角线. 例如图 1a 中, 四边形 $(1, 2)(1, 5)(4, 5)(2, 4)$ 中没有对角线, 双变度组合 $(1, 2, 4, 5)$ 即 $3+6$ 在其中稳定; 四边形 $(1, 2)(2, 4)(4, 6)(1, 6)$ 亦是无对角线的四边形, 双变度组合 $(1, 2, 4, 6)$ 即 $3+5$ 在其中稳定, 如此等等. 同样, 除了在上述四边形中外, 不可能在其它多边形中找到与之相同的双变度组合. 在图 1a 的图题说明中已经详细列出了八点封闭网图 $\{1|4\}$ 中 14 个双变度组合所对应的特征稳定多边形, 供有兴趣的读者参阅.

图 1b 是九点封闭网图 $\{1|2|4\}$ 或 $\{3|5|6\}$. 其中二元六相多体系的所有 15 个可能的双变度组合都有自己的特征稳定多边形. 各双变度组合的特征稳定多边形见图 1b 的图题说明.

由图 1 可以明显看出, 二元六相 $(n+4)$ 多体系的一个双变度组合, 若不在一个三角形中稳定, 就在一个无对角线的四边形中稳定. 而且, 八点封闭网图恰是它所含的 14 个双变度组合所对应的 14 个特征稳定多边形叠加而成的, 九点封闭网图则是由它所含的 15 个双变度组合特征稳定多边形叠加而成. 就化学成份图解来说, 每一特征稳定多边形中都有一个特征的双变度组合, 对应于化学成份图解轴上的相应小线段. 在特征稳定多边形相互重叠时, 这些小线段相互接拢, 以产生重叠区域中完整的化学成份图解轴, 而没有也不允许有这些小线段之间的相互重叠. 因此, 反过来, 我们可以从一个双变度区域中的化学成份图解轴立即判断出该区域是由多少个特征稳定多边形重叠而成.

二元多体系特征稳定多边形的相互重叠产生了两个自然的结果. 一是使每一内部相都在一个连续的区域中稳定; 另一是使每一外部相都在所有的区域中稳定. 其中后一结果若不从双变度组合的特征稳定多边形的相互重叠的观点看, 可能会是难于理解的.

在看过二元六相多体系的八点和九点封闭网图后, 让我们再看看三元七相 $(n+4)$ 多体系的十点和十二点封闭网图的两个例子. 如文献[3]所述, 十点封闭网和十二点封闭网都是三元七相 $(n+4)$ 多体系的特征封闭网. 图 2a 是十点封闭网图 $\{1|3\}$ 图 2b 是十二点封闭网图 $\{1|3|5\}$. 为简便起见, 我们任意指定该三元七相多体系的化学成份图解为七边形. 这样, 封闭网图中的每一线锥 (bundle) 在拓扑上都是相同的.

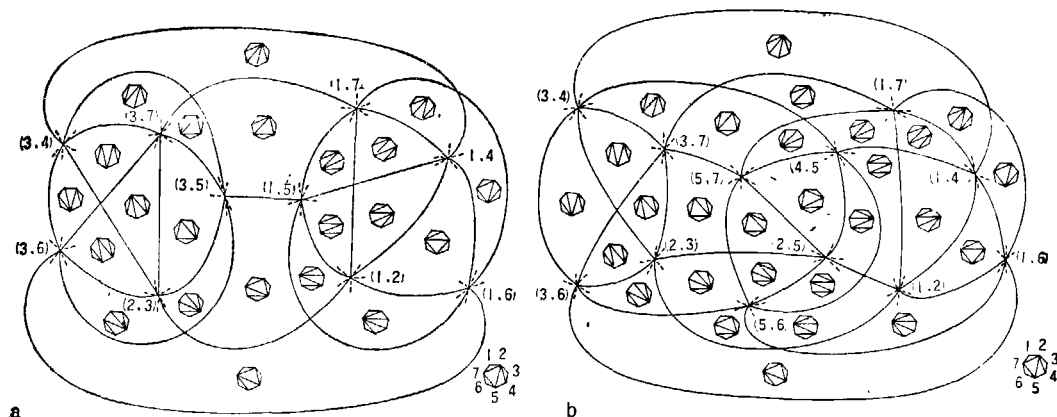


图 2 三元七相多体系十点和十二点封闭网图中双变度组合的分布

a. 十点封闭网图 $\{1|3\}$. 35 个双变度组合中 $(2, 4, 5, 6)$, $(2, 4, 5, 7)$, $(2, 4, 6, 7)$, $(2, 5, 6, 7)$ 和 $(4, 5, 6, 7)$ 缺失. 双变度组合的分布如下: 1) $(1, 2, 3, 4)$ 在 $\square(1, 2)(1, 4)(3, 4)(2, 3)$ 中; 2) $(1, 2, 3, 5)$ 在 $\square(1, 2)(1, 5)(3, 5)(2, 3)$ 中; 3) $(1, 2, 3, 6)$ 在 $\square(1, 2)(1, 6)(3, 6)(2, 3)$ 中; 4) $(1, 2, 3, 7)$ 在 $\square(1, 2)(2, 3)(3, 7)(1, 7)$ 中; 5) $(1, 2, 4, 5)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 4)(1, 5)$ 中; 6) $(1, 2, 4, 6)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 4)(1, 6)$ 中; 7) $(1, 2, 4, 7)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 4)(1, 7)$ 中; 8) $(1, 2, 5, 6)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 5)(1, 6)$ 中; 9) $(1, 2, 5, 7)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 5)(1, 7)$ 中; 10) $(1, 2, 6, 7)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 6)(1, 7)$ 中; 11) $(1, 3, 4, 5)$ 在 $\square(1, 4)(1, 5)(3, 5)(3, 4)$ 中; 12) $(1, 3, 4, 6)$ 在 $\square(1, 4)(1, 6)(3, 6)(3, 4)$ 中; 13) $(1, 3, 4, 7)$ 在 $\square(1, 4)(1, 7)(3, 7)(3, 4)$ 中; 14) $(1, 3, 5, 6)$ 在 $\square(1, 5)(3, 5)(3, 6)(1, 6)$ 中; 15) $(1, 3, 5, 7)$ 在 $\square(1, 5)(3, 5)(3, 7)(1, 7)$ 中; 16) $(1, 3, 6, 7)$ 在 $\square(1, 6)(3, 6)(3, 7)(1, 7)$ 中; 17) $(1, 4, 5, 6)$ 在 $\triangle(1, 4)(1, 5)(1, 6)$ 中; 18) $(1, 4, 5, 7)$ 在 $\triangle(1, 4)(1, 5)(1, 7)$ 中; 19) $(1, 4, 6, 7)$ 在 $\triangle(1, 4)(1, 6)(1, 7)$ 中; 20) $(1, 5, 6, 7)$ 在 $\triangle(1, 5)(1, 6)(1, 7)$ 中; 21) $(2, 3, 4, 5)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 4)(3, 5)$ 中; 22) $(2, 3, 4, 6)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 4)(3, 6)$ 中; 23) $(2, 3, 4, 7)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 4)(3, 7)$ 中; 24) $(2, 3, 5, 6)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 5)(3, 6)$ 中; 25) $(2, 3, 5, 7)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 5)(3, 7)$ 中; 26) $(2, 3, 6, 7)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 6)(3, 7)$ 中; 27) $(2, 4, 5, 6)$ 缺失; 28) $(2, 4, 5, 7)$ 缺失; 29) $(2, 4, 6, 7)$ 缺失; 30) $(2, 5, 6, 7)$ 缺失; 31) $(3, 4, 5, 6)$ 在 $\triangle(3, 4)(3, 5)(3, 6)$ 中; 32) $(3, 4, 5, 7)$ 在 $\triangle(3, 4)(3, 5)(3, 7)$ 中; 33) $(3, 4, 6, 7)$ 在 $\triangle(3, 4)(3, 6)(3, 7)$ 中; 34) $(3, 5, 6, 7)$ 在 $\triangle(3, 5)(3, 6)(3, 7)$ 中; 35) $(4, 5, 6, 7)$ 缺失.

b. 十二点封闭网图 $\{1|3|5\}$. 35 个双变度组合中 $(2, 4, 6, 7)$ 缺失. 双变度组合的分布如下: 1) $(1, 2, 3, 4)$ 在 $\square(1, 2)(2, 3)(3, 4)(1, 4)$ 中; 2) $(1, 2, 3, 5)$ 在 $\triangle(1, 2)(2, 3)(2, 5)$ 中; 3) $(1, 2, 3, 6)$ 在 $\square(1, 2)(2, 3)(3, 6)(1, 6)$ 中; 4) $(1, 2, 3, 7)$ 在 $\square(1, 2)(2, 3)(3, 7)(1, 7)$ 中; 5) $(1, 2, 4, 5)$ 在 $\square(1, 2)(2, 5)(4, 5)(1, 4)$ 中; 6) $(1, 2, 4, 6)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 4)(1, 6)$ 中; 7) $(1, 2, 4, 7)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 4)(1, 7)$ 中; 8) $(1, 2, 5, 6)$ 在 $\square(1, 2)(1, 6)(5, 6)(2, 5)$ 中; 9) $(1, 2, 5, 7)$ 在 $\square(1, 2)(2, 5)(5, 7)(1, 7)$ 中; 10) $(1, 2, 6, 7)$ 在 $\triangle(1, 2)(1, 6)(1, 7)$ 中; 11) $(1, 3, 4, 5)$ 在 $\triangle(1, 4)(3, 4)(4, 5)$ 中; 12) $(1, 3, 4, 6)$ 在 $\square(1, 4)(1, 6)(3, 6)(3, 4)$ 中; 13) $(1, 3, 4, 7)$ 在 $\square(1, 4)(3, 4)(3, 7)(1, 7)$ 中; 14) $(1, 3, 5, 6)$ 在 $\triangle(1, 6)(3, 6)(5, 6)$ 中; 15) $(1, 3, 5, 7)$ 在 $\triangle(1, 7)(3, 7)(5, 7)$ 中; 16) $(1, 3, 6, 7)$ 在 $\square(1, 6)(1, 7)(3, 7)(3, 6)$ 中; 17) $(1, 4, 5, 6)$ 在 $\square(1, 4)(1, 6)(5, 6)(4, 5)$ 中; 18) $(1, 4, 5, 7)$ 在 $\square(1, 4)(4, 5)(5, 7)(1, 7)$ 中; 19) $(1, 4, 6, 7)$ 在 $\triangle(1, 4)(1, 6)(1, 7)$ 中; 20) $(1, 5, 6, 7)$ 在 $\square(1, 6)(5, 6)(5, 7)(1, 7)$ 中; 21) $(2, 3, 4, 5)$ 在 $\square(2, 3)(3, 4)(4, 5)(2, 5)$ 中; 22) $(2, 3, 4, 6)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 4)(3, 6)$ 中; 23) $(2, 3, 4, 7)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 4)(3, 7)$ 中; 24) $(2, 3, 5, 6)$ 在 $\square(2, 3)(2, 5)(5, 6)(3, 6)$ 中; 25) $(2, 3, 5, 7)$ 在 $\square(2, 3)(2, 5)(5, 7)(3, 7)$ 中; 26) $(2, 3, 6, 7)$ 在 $\triangle(2, 3)(3, 6)(3, 7)$ 中; 27) $(2, 4, 5, 6)$ 在 $\triangle(2, 5)(4, 5)(5, 6)$ 中; 28) $(2, 4, 5, 7)$ 在 $\triangle(2, 5)(4, 5)(5, 7)$ 中; 29) $(2, 4, 6, 7)$ 缺失; 30) $(2, 5, 6, 7)$ 在 $\triangle(2, 5)(5, 6)(5, 7)$ 中; 31) $(3, 4, 5, 6)$ 在 $\square(3, 4)(4, 5)(5, 6)(3, 6)$ 中; 32) $(3, 4, 5, 7)$ 在 $\square(3, 4)(4, 5)(5, 7)(3, 7)$ 中; 33) $(3, 4, 6, 7)$ 在 $\triangle(3, 4)(3, 6)(3, 7)$ 中; 34) $(3, 5, 6, 7)$ 在 $\square(3, 6)(3, 7)(5, 7)(5, 6)$ 中; 35) $(4, 5, 6, 7)$ 在 $\triangle(4, 5)(5, 6)(5, 7)$ 中.

图 2a 是封闭网 $\{1|3\}$ 的一个原始拼合封闭网图, 它含有 23 个双变度区域和 6 个呆性交义. 在三元系中, 每一双变度组合均为三相平衡共存. 三元七相多体系共有 $C_3^7 = 35$ 个不同

的双变度组合. 由图 2a 可知, 对十点封闭网图 $\{1|3\}$ 来说, 这 35 个双变度组合中缺失 5 个. 即缺失所有包含 $1+3$ 在内的双变度组合. 其余的 30 个双变度组合则各自在一个特征稳定多边形中稳定(详见图 2a 的图题说明).

图 2b 是封闭网 $\{1|3|5\}$ 的一个原始拼合封闭网图, 它含 29 个双变度区域和 9 个呆性交叉. 其中, 双变度组合 $(2, 4, 6, 7)$ 即 $1+3+5$ 缺失. 其余 34 个双变度组合在封闭网图中的分布情形见图 2b 的图题说明.

一般地说, 三元七相多体系的封闭网中都有双变度组合的缺失. 十点封闭网缺失 5 个双变度组合, 十二点封闭网缺失 1 个双变度组合. 这是同二元六相多体系封闭网的不同处.

由图 2a 和 b 可以获得以下类似的规律:

1. 三元 $n+4$ 相多体系的每一个双变度组合亦对应着一个自己在其中稳定的特征稳定多边形, 这个多边形若不是一个三角形就是一个无对角线存在的四边形.

2. 三元 $n+4$ 相多体系的封闭网图是它所含的全部双变度组合所对应的特征稳定多边形的规律性重叠的结果.

3. 三元系的每一个双变度组合在无组成退化的化学成份图解中都对应一个三角形. 三元 $n+4$ 相多体系封闭网图中的每一个双变度区域都是由若干特征稳定多边形重叠形成的. 因此, 每一双变度区域内的化学成份图解都是由这些特征稳定多边形所对应的化学成份图解三角形拼接而成的. 这种拼接使得多体系在每一区域中其总成份均可在合理的范围内任意取值. 因此, 每一化学成份图解的外部轮廓均完全相同, 这样, 凡是被称为外部相的相在封闭网图的每一区域中都有可能稳定.

以上从二元和三元 $n+4$ 相多体系封闭网图所获得的认识是重要的. 认识的核心是双变度组合与封闭网图中特定的多边形的一一对应关系以及封闭网图实际上可看作是由其所含的全部双变度组合所对应的特征稳定多边形的重叠.

二、 $n+k$ 相多体系双变度组合特征稳定多边形定理

由前节知, $n+4$ 相多体系中, 一个双变度组合只在一个三角形或无对角线的四边形中稳定, 由此自然会问, 这是否是一个更普遍的规律在 $n+4$ 相多体系中的一个具体体现? 换句话说, 对 $n+k$ 相多体系来说, 一个双变度组合是否只在一个三角形到一个无对角线的 l 边形 ($l \leq k$) 中稳定? 研究表明, 这一更普遍的规律确实存在, 我们将它命名为 $n+k$ 相多体系双变度组合特征稳定多边形定理. 这个定理的完整陈述是: 任何 $n+k$ ($k \geq 3$) 相多体系的一个双变度组合, 最大可在封闭网图中的一个无对角线的 k 边形中稳定, 最小可在一个三角形中稳定. 以下将对这定理给出一个证明. 在证明之前, 有必要给出一些预备性知识.

在文献[4]中曾系统地给出了描述 $n+k$ 相多体系的各种标记符号. 总地说来, 在 $n+k$ 相多体系中, 一个双变度组合可用集合 A 来代表, A 则是由 k 个代表缺失相的相符号构成的. 同时, 一个单变度组合(曲线)则可用集合 L 来代表, L 是一个由 $k-1$ 个缺失相符号所组成的集合; 一个无变度组合(点)可用集合 P 来代表, P 是一个由 $k-2$ 个缺失相相符号所构成的集合.

现在对双变度组合、单变度组合和无变度组合间的关系作一规定.

设有任意双变度组合 A 、单变度组合(曲线) L 和无变度组合(点) P .

1. 如果我们有 $L \subset A$, 我们就说, A 是由 L 衍生出来的. 在几何上, 单变度组合(曲线) L 就构成双变度组合 A 的一条边界.

2. 如果我们有 $P \subset A$, 我们就说 A 是由 P 衍生出来的. 在几何上, 无变度组合(点) P 就构成双变度组合 A 所在多边形的一个顶点.

3. 如果我们有 $P \subset L$, 我们就说, L 是由 P 衍生出来的. 在几何上, 无变度组合(点)就在单变度组合(曲线) L 上. 若 P 是稳定点, 根据多体系单变度曲线基本定理^[3,5], L 的稳定部份必以 P 为起点(或终点).

由以上规定可知, 若有一 l 边形, 双变度组合 A 在其中稳定, 则该 l 边形的所有的边(单变度曲线, 共 l 条)所对应的集合都是 A 的子集, 即

$$L_1 \subset A, L_2 \subset A, \dots, L_l \subset A.$$

同时, 该 l 边形的所有顶点(无变度点, 共 l 个)所对应的集合也都是 A 的子集, 即有

$$P_1 \subset A, P_2 \subset A, \dots, P_l \subset A.$$

现在证明定理.

证. 假设有某一双变度组合 $A = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ 在一个无对角线的 l 边形内稳定, 显然, 不须证明即有

$$l \geq 3. \quad (1)$$

假定此多边形的各顶点按顺时针(或逆时针)方向分别为 $P_1, P_2, \dots, P_l$, 则因 $P_1, P_2, \dots, P_l$ 均是 A 的子集, 而有

$$|P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_l| \geq k. \quad (2)$$

也就是说,

$$|P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_l| \leq k. \quad (3)$$

但由于 P_1 与 P_2 同在同一条边(单变度曲线)上, 以及 P_2 与 P_3 也同在另一条相邻的边(单变度曲线)上, 我们有

$$|P_1 \cup P_2| = k - 1, \quad (4)$$

和

$$|P_2 \cup P_3| = k - 1. \quad (5)$$

由于 l 边形中没有任何对角线, 所以 P_1 和 P_3 之间没有单变度连接线. 由文献[4]可知, 必有

$$|P_1 \cap P_3| \leq k - 4. \quad (6)$$

由(4), (5)和(6)式即可推出

$$\begin{aligned} |P_1 \cup P_3| &= k, \\ |P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_l| &\geq k. \end{aligned} \quad (7)$$

由(3)及(7)式, 立即可得到

$$|P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_l| = k. \quad (8)$$

因为 $P_1 \cup P_2 = L_1, P_2 \cup P_3 = L_2, \dots, P_{l-1} \cup P_l = L_{l-1}, P_l \cup P_1 = L_l$ 表示 l 条单变度曲线, 它们显然互不相同. 然而 $A = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ 最多对应着 $C_k^{k-1} = k$ 条单变度曲线, 所以, 我们立即有

$$l \leq k. \quad (9)$$

否则 l 条单变度曲线中至少应出现两条相同, 这和前面的假定矛盾. 最后, 我们有

$$3 \leq l \leq k. \quad (10)$$

定理证毕.

三、讨 论

$n+k$ 相多体系双变度组合特征稳定多边形定理是我们认识、理解和制作多体系封闭网图 and 实际相图的一个重要定理. 在这里有必要特别指出的是, 虽然 $n+k$ 相多体系中一个双变度组合可在一个三边形至一个无对角线的 k 边形中存在和稳定, 但这并不意味着在任一封闭网图或实际相图中都必定得有一个或若干个特征稳定 k 边形. 例如, 一元六相($n+5$)多体系的八点封闭网图, 有两种不同拓扑关系的表象多面体, 其中一种表象多面体的六个面分别为两个三边形, 两个四边形和两个五边形. 由此种表象多面体所导出的实际相图中, 有可能出现五边形(即 k 边形, $k=5$). 然而, 另一种表象多面体为四方棱柱(或立方体), 即每一个面都是四边形. 这样, 由它所导出的实际相图即使具有最大的闭合度, 其中也不可能存在五边形. 一元六相($n+5$)多体系的全网系及封闭网图的详细推导将另文发表.

参 考 文 献

- [1] Roseboom, E. H., Jr. & E-an Zen. Unary and binary multisystems: topologic classification of phase diagrams and relation to Euler's theorem on polyhedra, *Amer. Jour. Sci.* (in press).
- [2] 郭其梯, 中国科学, 1980, 2:172—179.
- [3] 郭其梯, 中国科学, 1979, 8:800—808.
- [4] 郭其梯、王声远, 中国科学 B 辑, 1982, 1:79—86
- [5] 郭其梯, 科学通报, 1981, 6:360—362.