2020 年度陈嘉庚科学奖专辑

陈嘉庚青年科学奖——数理科学奖获奖人

关启安

北京大学数学科学学院教授. 2011 年毕业于中国科学院数学与系统科学研究院, 获博士学位. 从事多复变函数论的研究. 作为国内自主培养的青年学者, 他与合作者的一系列研究工作给多复分析这一研究领域带来了全新认识, 取得了系列令人瞩目的重要成就.

相关成果名称: 多复变中的强开性猜想和相关问题的解决

关启安与周向宇院士合作发展 L^2 方法解决了具最优估计的 L^2 延拓问题, 建立了具最优估计的 L^2 延拓定理, 以及发现其与许多不同问题的联系并予以解决, 打破了以往仅与一个问题有联系的局限; 解决了法国科学院院士 Demailly 提出的、“被认为是相当不可及的”关于乘子理想层的强开性猜想, 这是多复变与复几何发展的一个瓶颈问题, 不少数学家在假定该猜想成立下得到一些重要结果; 解决了 Demailly 与美国科学院院士 Kollár 提出的一个猜想及 Jonsson-Mustața 猜想等问题.

多复变中的强开性猜想和 L^2 解析延拓问题

关启安

北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: guanqian@math.pku.edu.cn

Strong openness conjecture and L^2 extension problem in several complex variables

Qi'an Guan

School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China

E-mail: guanqian@math.pku.edu.cn

doi: 10.1360/TB-2020-1055

乘子理想层是多次调和函数奇点的不变量, 在多复变和复几何中扮演了重要角色. 关启安和周向宇院士合作证明了Demailly提出的关于乘子理想层的强开性猜想, 被美国数学评论(Mathematical Reviews)称为“近年来复分析和代数几何交叉领域最重大的成就之一”. 作为应用, 关启安和周向宇院士合作证明了Demailly-Ein-Lazarsfeld、Boucksom-Favre-Jonsson、Demailly-Kollár和Jonsson-Mustața等提出的多个猜想.

L^2 解析延拓问题是多复变中一个重要前沿问题. 非最优估计的 L^2 解析延拓问题被Ohsawa与Takegoshi合作解决, 之后Berndtsson、Demailly、Ohsawa、Siu等都在该问题的研究与应用中做出重要的工作. 关启安和周向宇院士合作得到了统一的带最优估计的 L^2 解析延拓定理, 作为应用完整解决了1972年提出的Suita猜想, 特别是该猜想中的不等式等号成立的充要条件的猜想, 及几个开黎曼面上的相关问题. 回答了Ohsawa的若干公开问题, 发现了关启安和周向宇院士的最优 L^2 延拓定理的几何意义及该定理蕴含Berndtsson关于相对Bergman核的对数多次调和性的重要定理.

1 乘子理想层的强开性猜想及相关问题

1.1 强开性猜想的解决

令 φ 是 n 维复流形 X 上的一个多次调和函数^[1,2]. 定义乘子理想层 $I(\varphi)$: 满足 $|f|^2 e^{-2\varphi}$ 为局部可积的全纯函数芽 f 构成的层, φ 称为权^[3-9]. 习知 $I(\varphi)$ 为凝聚解析层(coherent sheaves). 对于一般乘子理想层, 研究的困难在于一般的具奇点的多次调和函数(权)很复杂. 定义 $I_+(\varphi) := U_{\epsilon>0}$

$I((1+\epsilon)\varphi)$, 易知 $I(\varphi)$ 包含 $I_+(\varphi)$. 由于 $I(\varphi)$ 的凝聚解析性, 可知在紧集上存在 $\epsilon>0$, 使得 $I_+(\varphi)=I((1+\epsilon)\varphi)$, 故 $I_+(\varphi)$ 也是乘子理想层.

Demailly(ICM大会报告人, 法国科学院院士)发现对于具有强开性质 $I_+(\varphi)=I(\varphi)$ 的乘子理想层可以具有解析权等重要性质, 因此提出强开性猜想(参见文献[10, 注15.4], 也可参见文献[11, Conjecture A'])

强开性猜想 $I_+(\varphi)=I(\varphi)$.

该猜想在近期出版的专著(参见文献[10, 注15.4])中被称为“probably quite hard to establish”.

特别地, 假定 $I(\varphi)$ 为平凡, 则强开性猜想退化为在文献[7]中提出的开性猜想. Favre和Jonsson^[12,13]利用代数几何中的赋值树理论(valuative tree)证明了二维的开性猜想. Jonsson和Mustața^[14]利用分次环的渐进jumping数理论解决了二维的强开性猜想. Berndtsson^[15](ICM邀请报告人, 瑞典皇家科学院院士)利用Brunn-Minkowski型不等式解决了开性猜想.

关启安和周向宇院士合作利用对维数的归纳法, 并在每一步归纳中使用反证法和移动的 L^2 延拓定理, 解决了Demailly的强开性猜想^[16].

定理1.1 (强开性猜想的解决) $I_+(\varphi)=I(\varphi)$ ^[16].

作为上述工作的延续, 关启安和周向宇院士合作解决和证明了如下问题和猜想.

注1.2 解决了强开性猜想的有效性问题(本节第一段 $I_+(\varphi)=I((1+\epsilon)\varphi)$ 中 ϵ 和 φ 的关系)^[17].

注1.3 在文献[17]中, 应用定理1.1和一些新的想法, 解决了Demailly-Kollár(ICM大会报告人, 美国国家科学院院士)提出的关于多次调和函数的奇点附近的次水平集的

体积渐进性的猜想(参见文献[7, 注4.4], 也可参见文献[11, Conjecture B]).

注1.4 在文献[17]中, 应用定理1.1和一些新的想法, 解决了Jonsson-MustaŃ(ICM邀请报告人)提出的关于 $u\text{-log}|f|$ 形式函数的奇点附近次水平集的体积渐进性的猜想(参见文献[11, Conjecture B]), 其中 u 和 f 分别为多次调和函数和全纯函数.

1.2 强开性猜想的应用

应用定理1.1, 关启安和周向宇院士合作解决了如下Demailly-Ein(ICM邀请报告人)-Lazarsfeld(ICM邀请报告人)和Boucksom(ICM邀请报告人)-Favre-Jonsson提出的两个猜想和其他一些相关未解决问题.

猜想DEL 对于一个射影代数流形上的big线丛 L , 渐近乘子理想(asymptotic multiplier ideal) $J(\|L^m\|)$ 等于 $I(h_{\min}^m)$, 对任意正整数 m 成立^[18,19].

上述猜想参见文献[18]中定理1.10之前的讨论, 收录于文集*Dedicated to William Fulton on the Occasion of His 60th Birthday*, 并且在文献[19]的第275页注11.1.11中再次将上述猜想列为未解决的问题.

推论1.5 猜想DEL成立^[16].

猜想BFJ 令 u, v 为 n 维复线性空间 C^n 的原点 o 上两个多次调和函数芽. 如下命题(1)、(2)等价^[20]: (1) 对任意逆紧的变形 $\pi: X_\pi \rightarrow C^n$ 和所有属于 o 点的原像的点 p , 有 u 和 v 关于 π 的拉回在 p 点的Lelong数相同; (2) 对任意的 $t>0$, 有等式 $I(tu)=I(tv)$ 成立.

上述猜想参见文献[20]中定理A之后的讨论, 收录于文集*Dedicated to Heisuke Hironaka on the Occasion of His Seventy-seventh Birthday*.

推论1.6 猜想BFJ成立^[16].

设 (L, φ) 为pseudo-effective的线丛, 记 $nd(L, \varphi)$ 为numerical dimension^[21]. 利用定理1.1, 建立了紧Kähler流形 X 关于乘子理想层 $I(\varphi)$ 的Nadel消灭定理的推广.

推论1.7 典则丛 K_X 和 L 的张量积的乘子理想层 $I(\varphi)$ 的大于等于 $n-nd(L, \varphi)+1$ 阶上同调群为0^[16].

若 φ_A 可以局部表示为 $c \log(|f_1|^2 + \dots + |f_N|^2) + O(1)$, 则称 φ_A 为解析权, 其中 $f_i (1 \leq i \leq N)$ 为全纯函数, c 为非负实数. 利用定理1.1, 建立了一般的 $I(\varphi)$ 的解析权存在性.

推论1.8 局部存在一个解析权 φ_A , 使得等式 $I(\varphi_A)=I(\varphi)$ 成立^[16].

公开评价1.1 美国数学评论(MR3418526)指出: 强开性猜想“被认为是相当不可及的”(was thought to be rather inaccessible for $n>2$), 强开性猜想的证明即**定理1.1**是“近年来多复变与代数几何交叉领域中最重大的成就之一”.

应用定理1.1和一些新的想法, 建立了权的Lelong数(一个基本的全纯不变量^[22~24])=1的乘子理想层的结构.

定理1.9 若 φ 在 o 点的Lelong数等于1, 则 $I(\varphi)_o$ 为平凡或由某个过 o 的正则复超曲面的全纯定义函数在原点的函数芽生成^[25].

定理1.9完全解决了一个公开问题^[26], 维数 $n=2$ 的情形参见文献[13,27]. 最近的后续工作参见Guan和Li^[28]的工作.

公开评价1.2 定理1.9被美国数学评论(MR3406538)称为“an important theorem”, 被Ohsawa^[29]称为“a basic result on Lelong numbers”.

2 最优 L^2 延拓定理

著名的Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理的研究和应用参见文献[5,10,30~39]. 带最优估计的 L^2 延拓定理的研究参见文献[40~45]等.

关启安和周向宇院士合作建立了一个宽泛的带最优估计的 L^2 延拓定理, 作为应用给出了文献[5,34~37,39,46~48]等中的 L^2 延拓定理的最优 L^2 估计及统一版本^[49]. 结合一些新思想, 解决了Suita猜想^[50]和相关问题, 给出了Ohsawa^[51]提出的一个公开问题的肯定回答, 发现文献[49]中的最优 L^2 延拓定理蕴含Berndtsson的Bergman核的对数次调和性^[52~54].

公开评价2.1 Ohsawa^[29]介绍了部分关启安和周向宇院士合作的工作^[41,49](“Q. Guan and X.-Y. Zhou proved generalized variants and characterized those surfaces on which the inequality is strict”)之后, 称“Their work gave the author a decisive impetus to start writing a survey to cover these remarkable achievements”.

公开评价2.2 关启安和周向宇院士合作的发现(最优 L^2 延拓定理蕴含Berndtsson的Bergman核的对数次调和性)被Ohsawa^[29]称为“Guan-Zhou Method”, 并作为章节标题.

参考文献

- 1 Kiselman C O. Plurisubharmonic functions and potential theory in several complex variables. In: Pier J P, ed. Development of Mathematics 1950–2000. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. 655–714
- 2 Sibony N. Some extension problems for currents in complex analysis. Duke Math J, 1985, 52: 157–197
- 3 Tian G. On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M)>0$. Invent Math, 1987, 89: 225–246
- 4 Nadel A. Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature. Ann Math, 1990, 132: 549–596
- 5 Siu Y T. The Fujita conjecture and the extension theorem of Ohsawa-Takegoshi. In: Noguchi J, Fujimoto H, Kajiwaru J, et al., eds.

- Geometric Complex Analysis. Singapore: World Scientific, 1996. 577–592
- 6 Demailly J P. Multiplier ideal sheaves and analytic methods in algebraic geometry. Lectures Given at the ICTP School Held in Trieste, Italy, 2000. www-fourier.ujf-grenoble.fr
- 7 Demailly J P, Kollár J. Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds. *Ann Sci École Norm Sup*, 2001, 34: 525–556
- 8 Siu Y T. Multiplier ideal sheaves in complex and algebraic geometry. *Sci China Ser A Math*, 2005, 48(Suppl): 1–31
- 9 Siu Y T. Dynamic multiplier ideal sheaves and the construction of rational curves in Fano manifolds. In: Passare M, ed. *Complex Analysis and Digital Geometry*. Uppsala: Uppsala Universitet, 2009. 323–360
- 10 Demailly J P. *Analytic Methods in Algebraic Geometry*. Beijing: Higher Education Press, 2010
- 11 Jonsson M, Mustață M. An algebraic approach to the openness conjecture of Demailly and Kollár. *J Inst Math Jussieu*, 2013, 13: 1–26
- 12 Favre C, Jonsson M. Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions. *Invent Math*, 2005, 162: 271–311
- 13 Favre C, Jonsson M. Valuations and multiplier ideals. *J Amer Math Soc*, 2005, 18: 655–684
- 14 Jonsson M, Mustață M. Valuations and asymptotic invariants for sequences of ideals. *Ann Inst Fourier*, 2012, 62: 2145–2209
- 15 Berndtsson B. The openness conjecture and complex Brunn-Minkowski inequalities. In: Fornæss J, Irgens M, Wold E, eds. *Complex Geometry and Dynamics*. Abel Symposia, Vol 10. Cham: Springer, 2015. 29–44
- 16 Guan Q A, Zhou X Y. A proof of Demailly’s strong openness conjecture. *Ann Math*, 2015, 182: 605–616
- 17 Guan Q A, Zhou X Y. Effectiveness of Demailly’s strong openness conjecture and related problems. *Invent Math*, 2015, 202: 635–676
- 18 Demailly J P, Ein L, Lazarsfeld R. A subadditivity property of multiplier ideals. *Mich Math J*, 2000, 48: 137–156
- 19 Lazarsfeld R. *Positivity in Algebraic Geometry*. I. Classical Setting: Line Bundles and Linear Series; II. Positivity for Vector Bundles, and Multiplier Ideals. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 20 Boucksom S, Favre C, Jonsson M. Valuations and plurisubharmonic singularities. *Publ Res Inst Math Sci*, 2008, 44: 449–494
- 21 Cao J Y. Numerical dimension and a Kawamata-Viehweg-Nadel type vanishing theorem on compact Kähler manifolds. *Compos Math*, 2014, 150: 1869–1902
- 22 Siu Y T. Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent Math*, 1974, 27: 53–156
- 23 Demailly J P. Complex analytic and differential geometry, electronically. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>
- 24 Skoda H. Sous-ensembles analytiques d’ordre fini ou infini dans C^n . *Bull Soc Math France*, 1972, 100: 353–408
- 25 Guan Q A, Zhou X Y. Characterization of multiplier ideal sheaves with weights of Lelong number one. *Adv Math*, 2015, 285: 1688–1705
- 26 Rashkovskii A. Alexander Extremal cases for the log canonical threshold. *C R Math Acad Sci Paris*, 2015, 353: 21–24
- 27 Blel M, Mimouni S K. Singularities and integrability of plurisubharmonic functions. *Ann Inst Fourier*, 2005, 55: 319–351
- 28 Guan Q A, Li Z Q. Multiplier ideal sheaves associated with weights of log canonical threshold one. *Adv Math*, 2016, 302: 40–47
- 29 Ohsawa T. L^2 Approaches in Several Complex Variables. Development of Oka-Cartan Theory by L^2 Estimates for the $\bar{\partial}$ Operator. Springer Monographs in Mathematics. Tokyo: Springer, 2015
- 30 Ohsawa T. On the extension of L^2 holomorphic functions. III. Negligible weights. *Math Z*, 1995, 219: 215–225
- 31 Ohsawa T. On the extension of L^2 holomorphic functions. V. Effects of generalization. *Nagoya Math J*, 2001, 161: 1–21
- 32 Erratum to: “On the extension of L^2 holomorphic functions. V. Effects of generalization” [*Nagoya Math. J.* 161 (2001), 1–21]. *Nagoya Math J*, 2001, 163: 229
- 33 Ohsawa T, Takegoshi K. On the extension of L^2 holomorphic functions. *Math Z*, 1987, 195: 197–204
- 34 Berndtsson B. The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman. *Ann Inst Fourier*, 1996, 46: 1083–1094
- 35 Manivel L. Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d’un fibré vectoriel. *Math Z*, 1993, 212: 107–122
- 36 Demailly J P. On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 extension theorem. In: Dolbeault P, Iordan A, Henkin G, et al., eds. *Complex Analysis and Geometry: Proceedings of the Conference in Honour of the 85th Birthday of Pierre Lelong*, Paris, 1997. Progress in Mathematics. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000
- 37 McNeal J, Varolin D. Analytic inversion of adjunction: L^2 extension theorems with gain. *Ann Inst Fourier*, 2007, 57: 703–718
- 38 Siu Y T. Invariance of Plurigenera. *Invent Math*, 1998, 134: 661–673
- 39 Siu Y T. Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type. In: Bauer I, Catanese F, Peternell T, et al., eds. *Complex Geometry (Göttingen, 2000)*. Berlin: Springer, 2002. 223–277
- 40 Guan Q A, Zhou X Y, Zhu L F. On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the twisted Bochner-Kodaira identity. *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2011, 349: 797–800
- 41 Guan Q A, Zhou X Y. Optimal constant problem in the L^2 extension theorem. *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2012, 350: 753–756

- 42 Blocki Z. On the Ohsawa-Takegoshi extension theorem. *Univ Iag Acta Math*, 2012, 50: 53–61
- 43 Blocki Z. Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem. *Invent Math*, 2013, 193: 149–158
- 44 Guan Q A, Zhou X Y. Optimal constant in an L^2 extension problem and a proof of a conjecture of Ohsawa. *Sci China Math*, 2015, 58: 35–59
- 45 Zhou X Y. A survey on L^2 extension problem. In: Fornæss J, Irgens M, Wold E, eds. *Complex Geometry and Dynamics*. Abel Symposia, Vol 10. Cham: Springer, 2015. 291–309
- 46 Ohsawa T. On the extension of L^2 holomorphic functions. II. *Publ Res Inst Math Sci*, 1988, 24: 265–275
- 47 Păun M. Siu's invariance of plurigenera: A one-tower proof. *J Diff Geom*, 2007, 76: 485–493
- 48 Demailly J P, Hacon C D, Păun M. Extension theorems, non-vanishing and the existence of good minimal models. *Acta Math*, 2013, 210: 203–259
- 49 Guan Q A, Zhou X Y. A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications. *Ann Math*, 2015, 181: 1139–1208
- 50 Suita N. Capacities and kernels on Riemann surfaces. *Arch Ration Mech Anal*, 1972, 46: 212–217
- 51 Ohsawa T. On the extension of L^2 holomorphic functions. VI. A limiting case. *Contemp Math*, 2003, 332: 235–239
- 52 Berndtsson B. Prekopa's theorem and Kiselman's minimal principle for plurisubharmonic functions. *Math Ann*, 1998, 312: 785–792
- 53 Berndtsson B. Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains. *Ann Inst Fourier*, 2006, 56: 1633–1662
- 54 Berndtsson B. Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations. *Ann Math*, 2009, 169: 531–560