Α

辑

线形振子散射或辐射问题的严格解

沈 浩 明 (中国科学院电子研究所,北京)

摘 要

本文应用时序展开法和 Wiener-Hopf 技术求得圆管(或圆柱)状振子的脉冲散射或辐射问题的严格解. 在单脉冲激励下,振子的电流响应是一脉冲系列. 系列中每一个脉冲依次用时序递推积分方程来确定. 递推方程有两类: 一类是全区间积分方程. 它可以用富氏积分变换来求解; 另一类是带约束的半区间积分方程. 除了应用富氏变换外,还采用了 Wiener-Hopf 技术来求解. 本文求得两类递推方程的严格显式解并验证了解的正确性. 对于长振子,在引入描写相邻脉冲间关系的传输函数后,代表总电流的无穷级数可以求和,并得到形式十分简单的总体解. 后一结果可以推广到连续波情形电流响应的计算.

一、引 言

线形振子是最简单最基本的辐射或散射单元。它广泛地用来组成各种元天线或阵天线。许多线形导体的散射问题也可以归结为线形振子的散射问题。因此,振子是电磁理论最感兴趣的研究对象之一。遗憾的是,即使对结构如此简单的圆柱形导体,至今也没有一个严格的理论分析。 振子的基本问题是求解在外界激励下的表面电流响应。 只有知道了表面电流分布,才能进一步计算散射场或辐射场,从而确定散射截面或辐射方向图。只有知道振子输入端点的电流,才能计算振子的输入阻抗,并解决馈电匹配和辐射功率的计算问题。早在 1938 年,Hallén 就建立了振子电流积分方程,并用逐次逼近法求解^[2]。 后来,King 发展了它并对各种振子及其阵进行了系统的研究^[3-5]。由于这些工作都是建立在积分方程近似解的基础上,由于Hallén 型积分方程有内在缺陷^[6]; 人们企图建立更合理的振子模型, 并寻求相应的严格显式解。 1960 年, Duncan 等修改了实心圆柱模型,将之改为空心圆管^[7]。 这样虽然消除了积分方程的内在矛盾,但只有无穷长的振子才可以得到严格解^[8]。 当振子是有限长时,必须考虑两端反射,求解积分方程变得十分困难。 当很只是有限长时,必须考虑两端反射,求解积分方程变得十分困难。 当有限长的振子为一单脉冲激励时,电流响应是一脉冲系列。 它包括第一个初发脉冲和后面无数的反射脉冲。 显然,初发脉冲可以用无穷长振子的电流来描述^[8];但后面的反射脉冲却只能用近似法^[3]或数值法^[10]求解。 因此,寻找振子脉冲响应的严格显式解,无疑有很大的理论意义和实际意义。

本文首先用时序展开法¹⁹¹将圆管(或圆柱)振子的散射或辐射电流响应方程分解为统一形式的时序递推方程。对于第一个初发脉冲,相应的是全区间积分方程。应用拉氏和富氏变换很容易获得了严格的显式解。对于各个反射脉冲,相应的是带约束的半区间积分方程。对这

本文 1984 年 4 月 20 日收到.

类方程,除了上述积分变换外,还应用了 Wiener-Hopf 技术^[11]求得每个反射脉冲的严格显式解。对长振子,代表总电流的无穷级数,可以求和并得到形式十分简单的总体解。这就为严格计算连续波工作时长振子的总电流提供了实际可能性^[14]。

二、时序递推方程

1. 散射问题

图 1 是长为 h 半径为 a 的圆管(或圆柱)示意图. 在均匀的平行极化的脉冲电场作用下,圆管(或圆柱)表面切向总场应为零:

$$(\boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_i) \cdot \boldsymbol{z}^0 = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h. \tag{1}$$

式中 E_s 为散射场, $E_i(=E_i(t-r\cdot n^0))$ 为人射场, $n^0(=\alpha x^0+\beta y^0+rz^0)$ 是传播方向单位矢量,而 $t(=vt_0)$ 是以光程为量纲的时间。在圆管(或圆柱)表面 $(x=y=0)^0$ 人射场为 $E_i=E_i(t-rz)$ 。利用关系 $E_s=-\nabla\phi-v\frac{\partial A}{\partial t}$ 和 Lorentz 条件 $\frac{\partial\phi}{\partial t}+v\nabla\cdot A=0$,(1)式可写成²⁾

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} E_i(t-r_z), \qquad 0 \leqslant z \leqslant h.$$
 (2)

考虑到两端反射的时序,方程(2)的通解可以写成:

$$A(t, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \Big\{ F_0(T_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n^-(T_n^-) + F_n^+(T_n^+) \right] \Big\}, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{3}$$

式中 $T_0 = t - \gamma z$; $T_n^{\pm} = t$ $z_n^{\pm} - h_n^{\pm}$, $h_n^{\pm} = \begin{cases} (n + \gamma)h, \\ hh; \end{cases}$

$$z_{n}^{-} = \begin{cases} z, & n \text{ 为偶}, \\ h - z, n \text{ 为奇}, \end{cases} z_{n}^{+} = \begin{cases} h - z, n \text{ 为偶}, \\ z, & n \text{ 为奇}; \end{cases}$$

$$F_{0}(T_{0}) = \frac{4\pi}{\mu_{0}} \frac{1}{\nu\sqrt{1 - r^{2}}} \int_{-\infty}^{T_{0}} E_{i}(t)dt; \tag{3a}$$

 F_n 代表 t=0 开始,由下端点 z=0 初发的上下反射的脉冲系列; F_n 代表 t=rh 开始,由上端点 z=h 初发的上下反射的脉冲系列。 式中 F_n (T) 的具体形式还不知道,但 F_n ($T \le 0$) = 0.

从另一方面,矢位A可以用表面电流I(t,z)表示为

$$A(t, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^h \hat{L}(z - z') I(t - R, z') dz', \tag{4}$$

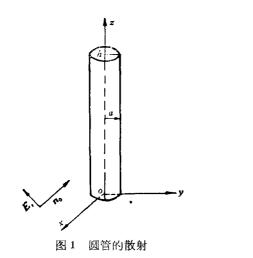
式中

$$\hat{L}(z-z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} d\theta \qquad (是一积分算子), \tag{4a}$$

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + b^2}, \ b = \begin{cases} 2a \sin \frac{\theta}{2}, \ \text{圆管} \\ a, \ \text{圆柱}. \end{cases}$$
 (4b)

¹⁾ 设圆管(或圆柱)较细,半径 a 《 脉宽 T.

²⁾ 圆管很细,仅有轴向表面电流,因而矢位 A 仅有轴向分量.



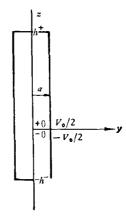


图 2 圆管的辐射

由(3)和(4)式,得到电流的积分方程

$$\int_0^h \hat{L}(z-z')I(t-R,z')dz' = F_0 + \sum_{n=0}^\infty (F_n^- + F_n^+), \qquad 0 \le z \le h.$$
 (5)

此外,电流在振子两端还满足边界条件

$$I(t, 0) = I(t, h) = 0. (6)$$

方程(5)和条件(6)就是求解电流的全部条件. 为了求解方便,将(5),(6)式改写成下面联立形式:

$$\begin{cases}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')I(t-R,z')dz' = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (F_n^- + F_n^+), \ 0 \le z \le h, \\
I(t,z) = 0, \\
z \le 0, \ h \le z,
\end{cases} \tag{7a}$$

仿照方程(7a)右边非齐次项的形式,令

$$I(t, z) = I_0(t, z) + \sum_{n=0}^{\infty} [I_{n,1}(t, z) + I_{n,2}(t, z)], \tag{8}$$

并将它代入(7a,b)式中,可将方程(7a)及条件(7b)分解为:

a
$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z') I_0(t-R,z') dz' = F_0(t-rz), \ 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{9a}$$

c
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z') I_{n,2}(t-R, z') dz' = F_n^+(t-z_n^+ - h_n^+), & 0 \leqslant z \leqslant h, \\ & n = 0, 1, 2, \cdots \\ I_{n,2}(t,z) = -I_{n-1,2}(t,z), & h \leqslant z, n 为偶 \\ & z \leqslant 0, n 为奇. \end{cases}$$
(9c)

式中 $I_{-1,1} = I_0$, $I_{-1,2} = I_0$.

方程(9a)和其它两组方程不同,对电流 I_0 没有附加限制,即 I_0 在区间($-\infty$,0) 和 (h, ∞)内可以任意.为了后面求解方便,在(h, ∞)内令 I_0 为方程(9a)向(h, ∞)开拓后的解;在($-\infty$,

0)内则令 $I_0(t,z) = I_0(t,-z)^0$. 这样方程(9a)就变成了全区间的积分方程.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z') I_0(t-R, z') dz' = F_0(t-r|z|), -\infty < z < \infty.$$
 (10)

对方程组(9b)和(9c)进行适当的坐标变换,并扩大方程的定义域,可将它们化为统一形式、为此,令 $z_1=z_n^2$, $z_1'=z_n^2$, I_n^2 (t,z_1),并将方程和 I_n^2 的定义域扩大到(t,∞);最后得到

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z_1 - z_1') I_n^{\pm}(t - R_1, z_1') dz_1' = F_n^{\pm}(t - - h_n^{\pm}), & z_1 \ge 0, \\ I_n^{\pm}(t, z_1) = -I_{n-1}^{\pm}(t, h - z_1), & z_1 \le 0, \end{cases}$$
(11)

式中 $R_1 = R(z_1 - z_1') = \sqrt{(z_1 - z_1')^2 + b^2}, I_{-1}^{\pm}(t, h - z_1) = I_0(t, z).$

2. 辐射问题

图 2 是长度为 $h(=h^+ + h^-)$ 半径为 a 的圆管(或圆柱). 在 $z=\pm 0$ 施以从 t=0 开始的脉冲电压 $V_0(t)$. 仿文献[9]类似步骤,得到矢位方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A = 0, \qquad -h^- \leqslant z \leqslant h^+. \tag{13}$$

根据在振子两端反射的时序,不难写出行波解为

$$A(t,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \Big\{ F_0(T_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n^+(T_n^+) + F_n^-(T_n^-) \right] \Big\}, \quad -h^- \leqslant z \leqslant h^+, \tag{14}$$

式中 $T_0 = t - |z|$, $T_n^{\pm} = i - z_n^{\pm} - h_n^{\pm}$, $h_n^{\pm} = nh + h^{\pm}$;

$$z_n^+ = \begin{cases} h^+ - z, n \text{ 为偶}, \\ h^- + z, n \text{ 为奇}, \end{cases}$$
 $z_n^- = \begin{cases} h^- + z, n \text{ 为偶}, \\ h^+ - z, n \text{ 为奇}; \end{cases}$ $F_0(t) = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} V_0(t).$ (14a)

 F_n^+ , F_n^- 则分别是上行和下行初发脉冲引起的多次反射脉冲系列。利用矢位和电流关系

$$A(t, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-h^-}^{h^+} \hat{L}(z - z') I(t - R, z') dz', \qquad (15)$$

得到 Hallén 型积分方程

$$\int_{-h^{-}}^{h^{+}} \hat{L}(z-z')I(t-R,z')dz' = F_{0} + \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n}^{+} + F_{n}^{-}), -h^{-} \leqslant z \leqslant h^{+}.$$
 (16)

方程(16)和边界条件

$$I(t, \pm h^{\pm}) = 0, \tag{17}$$

可以修改为

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')I(t-R, z')dz' = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (F_n^+ + F_n^-), -h^- \leq z \leq h^+, & (18a) \\ I(t, z) = 0, & z \leq -h^-, h^+ \leq z, & (18b) \end{cases}$$

同理,令 $I(t, z) = I_0(t, z) + \sum_{n=0}^{\infty} [I_{n,n}(t, z) + I_{n,n}(t, z)];$ 方程(18)分解为

¹⁾ 方程 (7) 的分解带有任**意性**. 在满足 (7a,b) 式的条件下, I_0 , I_{a} , ι , 和 I_{a} , ι 在 [0, ι] 以外允许任意选择。对它们加上适当限制,可使方程的形式统一,便于求解。

$$a \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z') I_0(t-R,z') dz' = F_0(t-|z|), \qquad -h^- \leqslant z \leqslant h^+.$$
 (19a)

b
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')I_{n,1}(t-R,z')dz' = F_n^+(t-z_n^+-h_n^+), -h^- \leqslant z \leqslant h^+, \\ n = 0, 1, 2, \cdots \\ I_{n,1}(t,z) = -I_{n-1,1}(t,z), & z \leqslant h^+, n \text{ 5d}, \\ z \leqslant -h^-, n \text{ 5d}. \end{cases}$$
(19b)

$$c \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')I_{n} \cdot (-R,z')dz' = F_{n}^{-}(t-z_{n}^{-}-h_{n}^{-}), -h^{-} \leqslant z \leqslant h^{+}, \\ n = 0, 1, 2 \cdots \\ I_{n,2}(t,z) = -I_{n-1,2}(t,z), \end{cases}$$

$$z \leqslant -h^{-}, n \text{ 为语},$$
 (19c)

仿前将(19a)式的定义域扩大到 $(-\infty, -h^-)$ 和 (h^+, ∞) ,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z') I_0(t-R, z') dz' = F_0(t-|z|), \quad -\infty < z < \infty.$$
 (20)

对 (19b,c) 式进行坐标变换: $z_1 = z_\pi^2$, $z_r' = z_\pi^2'$, $I_\pi^1 = I_{n,\frac{1}{2}}$; 并扩大方程及 I_π^2 的定义域;得到 (19b, c) 式的统一形式

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z_1 - z_1') I_n^{\pm}(t - R_1, z_1') dz_1' = F_n^{\pm}(t - z_1 - h_n^{\pm}), \ z_1 \ge 0, \\ I_n^{\pm}(t, z_1) = -I_{n-1}^{\pm}(t, h - z_1), \ z_1 \le 0. \end{cases}$$
 (21)

式中 $I_{-1}^{\pm}(t, h-z_1)=I_0(t, h^{\pm}-z_1)$.

3. 时序递推方程

总结散射和辐射两种情况,时序递推方程有两类: 一类是 (10) 和(20)式所示的全区间积分方程。它们定义在($-\infty$, ∞);另一类是(11)和(21)式所示的半区间积分方程。它们只定义在 $[0,\infty)$.另一半区间($-\infty$, 0],则由约束条件(12)和(22)式确定。这两类方程解法不同。前者可以用积分变换来求解。后者还要利用 Wiener-Hopf 技术来分离"半定函数" I_{π} . 下面依次介绍两种方法。

三、全区间积分方程

第一类时序递推方程为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z') I_0(t-R,z') dz' = F_0(t-\gamma|z|).$$
 (23)

式中 $F_0(z)$ 为已知函数(见(3a)和(14a)式); $\hat{L}(z-z')$ 为积分算符(4a)式,它作用于后面含 θ 的函数上; 当 $\gamma=1$ 时,(23)式为辐射问题.

对(23)式进行单边拉氏变换,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')e^{-sR}\tilde{I}_0(s,z')dz' = \tilde{F}_0(s)e^{-r|z|}, \quad \text{Re } s = \varepsilon > 0,$$
(24)

式中 $\tilde{I}_o(s,z)$, $\tilde{F}_o(s)$ 为 $I_o(t,z)$ 及 $F_o(t)$ 的像函数^D. 对(24)式作富氏变换,得到

$$L(s,k)\tilde{l}_0(s,k) = \tilde{F}_0(s,k), \tag{25}$$

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty F(t)e^{-st}dt; \ F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \tilde{F}(s)e^{st}ds.$$

¹⁾ 单边拉氏变换和反变换定义 ;

式中
$$\tilde{I}_0(s,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}_0(s,z) e^{ikz} dz,$$
 (25a)

$$\widetilde{F}_0(s,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}_0(s) e^{-r|z|+jkz} dz = \widetilde{F}_0(s) \frac{2\gamma s}{\gamma^2 s^2 + k^2}, \tag{25b}$$

$$L(s, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(x) e^{-\sqrt[3]{x^2 + b^2} + jkx} dx.$$
 (25c)

令 $\xi = kx + js \sqrt{x^2 + b^2}$,则(25c)式变成(参考(4a)式)

$$L(s, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi^{2} + b^{2}(s^{2} + k^{2})}} d\xi d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} 2K_{0}(b \sqrt{s^{2} + k^{2}}) d\theta$$

$$= \begin{cases} 2K_{0}(a\sqrt{s^{2} + k^{2}}), & \text{对圆柱,}^{2}\\ 2K_{0}(a\sqrt{s^{2} + k^{2}})I_{0}(a\sqrt{s^{2} + k^{2}}), \text{对圆管,} \end{cases}$$
(26)

式中 $I_0(x)$, $K_0(x)$ 为虚宗量 Bessel 和汉开尔函数.

由(25)式解出 l。并对之作富氏反变换,得到像电流

$$\tilde{I}_{0}(s,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{s} \tilde{F}_{0}(s) e^{-jkz}}{(\gamma^{2} s^{2} + k^{2}) L(s,k)} dk.$$
 (27)

再对(27)式进行拉氏反变换,最后得到电流响应

$$I_0(t, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\varepsilon-j\infty}^{\varepsilon+j\infty} \frac{\gamma_s \widetilde{F}_0(s) e^{-jkz+st}}{(\gamma^2 s^2 + k^2) L(s, k)} ds dk.$$
 (28)

当 $V_0(t)$ 是一阶跃电压时,

$$\widetilde{F}_0(s) = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} V_0/s,$$

将它代入(28)式中,并令 $\gamma=1$, $\epsilon\to 0$; 再对 jk, -js 平面改用"极坐标"

$$jr = \sqrt{s^2 + k^2}$$
, $\Theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{k}{s}$;

得到圆管表面电流响应为

$$I_{0}(t,z) = \frac{V_{0}}{\pi^{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{0}}{\mu_{0}}} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{ir\sqrt{t^{2}-z^{2}}\cos\Theta}}{J_{0}(ar)H_{0}^{(1)}(ar)r} d\Theta dr$$

$$= \begin{cases} 0, & t \geq z, \\ \frac{2V_{0}}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_{0}}{\mu_{0}}} \int_{0}^{\infty} \frac{J_{0}(r\sqrt{t^{2}-z^{2}})dr}{J_{0}(ar)H_{0}^{(1)}(ar)r}, & t \leq r, \end{cases}$$
(29)

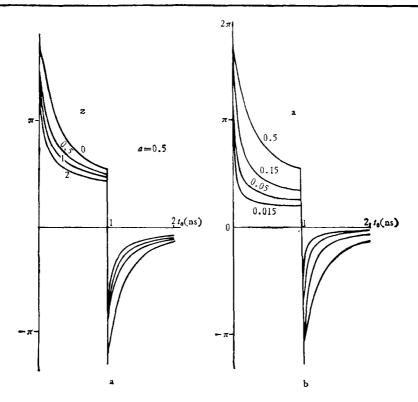
式中 J_0 , $H_0^{(1)}$ 分别是零阶 Bessel 和第一类汉开尔函数。此结果和文献[8]中(8.340)式完全一样,但解法简单得多。

图 3 给出由 (28) 式算得的方波电压激励的 $I_0(t,z)$ 图形。图 3a 是 I_0 沿圆管传播时波形的变化;图 3b 表明电流响应与圆管半径的关系。图 4,5 给出另外两种脉冲激励的电流响应与z 和 a 的关系。它们是

$$\widetilde{G}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{jkx}dx; G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(k)e^{-jkx}dk.$$

2) 参考有关 Bessel 函数的积分公式,如文献[12]中 P. 180, 183, 441; 文献[13]中 P. 482,

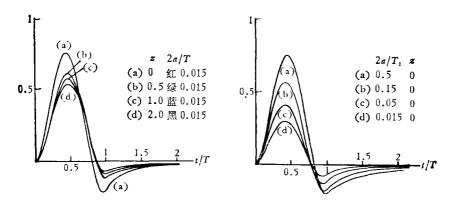
¹⁾ 正、反富氏变换定义为



a) 波形随 z 的变化

b) 波形随 a 的变化

图 3 阶跃方波的电流响应



a) 波形随 z 的变化

b) 波形随 a 的变化

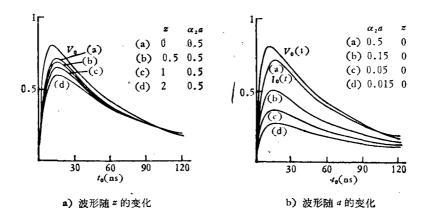
图 4 短脉冲的电流响应

$$V_{0}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, T < t, \\ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), & 0 \le t \le T; \end{cases}$$

$$V_{0}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\alpha_{1}t} - e^{-\alpha_{2}t}, & 0 \le t; \end{cases}$$
(30)

$$V_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}, & 0 \le t \end{cases}$$
 (31)

式中 $\alpha_1/\alpha_2 = 0.0536$.



核爆炸电脉冲的电流响应 图 5

四、半区间积分方程

1. 另一类时序递推方程具有下列形式(由(11),(12),(21),(22)式)

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')I(t-R,z')dz' = F(t-z-h), & z \ge 0, \\ I(t,z) = -I_0(t,h-z), & z \le 0. \end{cases}$$
 (32a)

为简单,式中各量都略去了上下标"±""n"。其中I和F未知待求。I。代表前一脉冲,已经从 前一个递推方程求出。利用(32b)式,可将(32a)式形式的变成全区间积分方程:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')I(t-R,z')dz' = G(t,z), & -\infty < z < \infty, \\ I(t,z) = -I_0(t,h-z), \end{cases}$$
 $z \le 0,$ (33a)

式中

$$G(t, z) = \begin{cases} F(t-z-h), & z \geq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')I(t-R, z')dz', & z \leq 0, \end{cases}$$
(33c)

是"半知函数"(G 当 z < 0 时未知)"。而且 I(t,z) 也是半知函数 ($z \ge 0$ 时未知)。下面仍仿 前节步骤对(33)式作拉氏变换:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')e^{-sR}\tilde{I}(s,z')dz' = \tilde{G}(s,z), \text{Re } s = \varepsilon > 0.$$

$$\tilde{I}(s,z) = -\tilde{I}_0(s,h-z), \quad z \leq 0,$$
(34a)

$$\tilde{I}(s,z) = -\tilde{I}_0(s,h-z), \qquad z \leq 0, \tag{34b}$$

$$\widetilde{G}(s,z) = \begin{cases} F(s)e^{-s(z+h)}, & z \ge 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(z-z')\widetilde{I}(s,z')e^{-sR}dz', & z \le 0. \end{cases}$$
(34c)

再将(34)式作富氏变换,得到形式解方程

$$L(s,k)\tilde{I}(s,k) = \tilde{G}(s,k), \tag{35}$$

¹⁾ 实际上 $z \ge 0$ 时 G(t, z) = F(t - z - h) 也是未知。 这儿先把它当已知,解出 I 以后,再利用边界条件确定 F(t).

式中 L(s, k) 和(26)式一样;而

$$\tilde{\tilde{I}}(s, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(s, z)e^{ikz}dz, \qquad (35a)$$

$$\tilde{G}(s, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(s, z) e^{jkz} dz.$$
 (35b)

由于 $\tilde{G}(s,z)$ 在 z<0 的区间还不知道,所以由(35)式并不能得到解 \tilde{I} . 下面应用 Wiener-Hopf 技术来分离 \tilde{G} 中未知部分。

- 2.(35)式是定义在 k 的实轴上的。现将它开拓到 k 平面。下面首先研究整个 k 平面上各函数的解析特性和渐近行为。
- a) L(s,k):由(26)式可知,L(s,k)有两个支点 $k=\pm is$. 所以 L 只在 $|I_mk|<\epsilon$ 的带内解析.

当 | 化 | 在这一带内趋向无穷时,利用虚宗量柱函数的渐近行为,知道

$$L(s, k) \approx O(1/|k|).$$
 (36)

b) Î(s, k): 由(35a)式,将 Ĩ 分为两部分

$$\tilde{I}(s, k) = I_{+}(k) + I_{-}(k),$$
 (37)

式中

$$I_{z}(k) = \int_{0}^{\infty} \tilde{I}(s,z)e^{jkz}dz \quad (\, \text{$\pm \chi$}), \tag{37a}$$

$$I_{-}(k) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{I}(s,z)e^{ikz}dz = -\int_{-\infty}^{0} \tilde{I}_{0}(s,h-z)e^{ikz}dz \quad (\exists \mathfrak{M}). \tag{37b}$$

利用 $\tilde{I}_o(s,z)$ 和 $\tilde{I}(s,z)$,当 $z\to\infty$ 的渐近特性,可以证明(见附录) $I_+(k)$ 在 $I_m(k)>-\delta$ ($\delta<\epsilon$) 的上半平面内解析 12 ; $I_-(k)$ 则在 $I_m(k)<\delta$ 的下半平面内的解析。因此 \tilde{I} 也只在 $|I_m(k)|<\delta$ 的带内解析。而且当 $|k|\to\infty$ 时,有

$$I_{+}(k) \approx O(1/|k|), \tag{38a}$$

$$I_{-}(k) \approx O(1/|k|).$$
 (38b)

c) $\tilde{G}(s,k)$: 由 (35b) 式定义的 \tilde{G} 也可分为两部分

$$\tilde{G}(s,k) = G_{+}(k) + G_{-}(k),$$
 (39)

式中

$$G_{-}(k) = \int_{-\infty}^{0} \widetilde{G}(s, z) e^{ikz} dz \qquad (\, \text{$\pm \mu$}). \tag{39b}$$

显然 $G_+(k)$ 在 $I_{mk} > -\delta$ 的上半平面⁰内解析. 因为 L 和 \hat{I} 都在 $\pm i\delta$ 的带内解析,由(35)式 \hat{G} 必在此带内解析. 因此 $G_-(k)$ (\Rightarrow $\hat{G}(s,k) - G_+(k)$) 在带内解析. 由 (39b) 式,进一步 $G_-(k)$ 可以解析延拓到整个 $I_{mk} < \delta$ 的下半平面. 而且 $|k| \to \infty$ 时,有

$$G_{+}(k) \approx O(1/|k|), \tag{40a}$$

$$G_{-}(k) \approx O(1/|k|).$$
 (40b)

3. Wiener-Hopf 技术的主要步骤是函数分解。即将一函数分解为两项和或积。这两项函

¹⁾ 此处"上半平面"是 $I_m k > -\delta$ 的区域。"下半平面"是 $I_m k < \delta$ 的区域。两个半平面在 $\pm i\delta$ 的带中是重叠的。今后,用下标"+"或"-"分别表示在上或下半平面内解析的函数。

数一个在上半平面内解析另一个则在下半平面内解析。(35)式中的 \tilde{l} 和 \tilde{c} 已经实现了这种分离(见(37)和(39)式)。剩下的是 L(s,k),由于它在 $\pm is$ 的带内解析,利用 Cauchy 积分公式

$$\ln L(s, k) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\ln L(s, \alpha)}{\alpha - k} d\alpha = l_{+}(k) - l_{-}(k), \tag{41}$$

式中

$$l_{+}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{-}}^{10} \frac{\ln L(s, \alpha)}{\alpha - k} d\alpha, \qquad (41a)$$

$$l_{-}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{+}} \frac{\ln L(s, \alpha)}{\alpha - k} d\alpha. \tag{41b}$$

它们分别在 $I_m k > -\delta$ 或 $I_m k < \delta$ 的上、下平面内解析、由(41)式

$$L(s, k) = \exp[l_{+}(k) - l_{-}(k)] = L_{+}(k)/L_{-}(k), \tag{42}$$

式中

$$L_{+}(k) = \exp[l_{+}(k)],$$
 (42a)

$$L_{-}(k) = \exp[l_{-}(k)].$$
 (42b)

它们分别在上、下半平面内解析。而且当 $|k| \rightarrow \infty$ 时,有

$$L_{+}(k) \approx O(|k|^{-\frac{1}{2}}),$$
 (43a)

$$L_{-}(k) \approx O(|k|^{\frac{1}{2}}).$$
 (43b)

各函数的解析区域,归纳起来如图 6 所示。

4. 将(37)(39)和(42)式代人(35)式中,得到

$$I_{+}(k)L_{+}(k) + I_{-}(k)L_{+}(k) = G_{-}(k)L_{-}(k) + G_{+}(k)L_{-}(k),$$
(44)

式中下标"+"或"-"分别表示上或下半平面解析的函数。因此 I_+L_+ 和 G_-L_- 分别在上、下平面内解析。而 I_-L_+ 和 G_+L_- 则不,它们只在 $\pm i\delta$ 的带

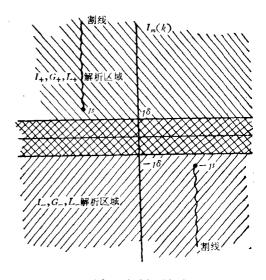


图 6 解析区域图

式中[]+,[]-分别代表上、下平面解析的函数2。 令(45)式左边或右边等于一新函数 C(k)。由左边各项知 C(k)在 $I_m k > -\delta$ 的上半平面内解析;而由右边各项知 C(k) 在 $I_m k < \delta$ 的下半平面内解析。因此 C(k) 在整个 k 平面上解析。又由各项的渐近行为 (38),(40) 和(43)式知道,当 $|k| \to \infty$ 时, $C(k) \to 0$ 。利用 Liouville 定理可知,C(k) 必为常数且等于零。由此,令(45)式左边等于零,得到

$$[I_{+}(k) + I_{-}(k)]L_{+}(k) = [G_{+}(k)L_{-}(k)]_{+} + [I_{-}(k)L_{+}(k)]_{-}.$$
(46)

$$[k]_{+} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{-}} \frac{[\alpha]}{\alpha - k} d\alpha, \text{在 } I_{m}k > -\delta \text{ 内解析}(\text{上半平面解析}),$$

$$[k]_{-} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{+}} \frac{[\alpha]}{\alpha - k} d\alpha, \text{在 } I_{m}k < \delta \text{ 内解析}(\text{下半平面解析}).$$

¹⁾ 符号 ≥ 分别代表积分路线 -∞±iδ→∞±iδ.

²⁾ 用 [k] 代表任意在 土ίδ 内解析的函数,则

利用(37)式和[]+、[]_的定义,得到解

$$\tilde{I}(s, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{-}} \frac{G_{+}(\alpha)L_{-}(\alpha)}{(\alpha - k)L_{+}(k)} d\alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{+}} \frac{I_{-}(\alpha)L_{+}(\alpha)}{(\alpha - k)L_{+}(k)} d\alpha. \tag{47}$$

再对(47)式作富氏反变换,得到

$$\tilde{I}(s, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_{+}} I_{-}(\alpha) L_{+}(\alpha) M(\alpha, z) d\alpha - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_{-}} G_{+}(\alpha) L_{-}(\alpha) M(\alpha, z) d\alpha, \quad (48)$$

式中

$$M(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{(k - \alpha)L_+(k)} dk^{1}.$$
 (48a)

5. 到此,我们得到的解(48)式仍是形式解。 因为(48)式中含 $G_+(\alpha)$,由定义(39a)式知, $\tilde{F}(s)$ 还不知道。 下面利用边界条件(34b)式来确定 $\tilde{F}(s)$. 令(48)式中 z=0,并将(34b)及(39a)式代入,求得

$$\widetilde{F}(s) = -e^{sh}L_{+}^{2}(js)\widetilde{I}_{0}(s,k)[1+\Delta(s)], \tag{49}$$

式中

$$\Delta(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\delta_+} \frac{l_-(\alpha)L_+(\alpha)M(\alpha,0)}{\tilde{I}_0(s,h)L_+(js)M(js,0)} d\alpha, \qquad (49a)$$

对于长振子 $I_{-}(\alpha) = -\tilde{I}_{0}(s, h)/(j\alpha + s), \Delta(s) = 0.$

6. 可以证明:利用 Wiener-Hopf 技术求得的解(48)式的确满足方程(34a)及条件(34b). 为此,由(45)式的右边,得到

$$G_{+}(k) + G_{-}(k) = \{ [G_{+}(k)L_{-}(k)]_{+} + [I_{-}(k)L_{+}(k)]_{-} \} / L_{-}(k).$$
(50)

根据[]_{*}的定义,得到 $\tilde{G}(s,k)$ 的有用关系.

$$\tilde{\tilde{G}}(s,k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{-}} \frac{G_{+}(\alpha)L_{-}(\alpha)}{(\alpha-k)L_{-}(k)} d\alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{+}} \frac{I_{-}(\alpha)L_{+}(\alpha)}{(\alpha-k)L_{-}(k)} d\alpha. \tag{51}$$

首先证明解(48)式满足方程(34a). 将解(48)式代入(34a)式左边的积分内,得到

$$LHS = \frac{1}{4\pi^{2}j} \int_{\delta_{-}} G_{+}(\alpha) L_{-}(\alpha) \int_{0} \frac{1}{(\alpha - k) L_{+}(k)} \int_{0} \hat{L}(z - z') e^{-iR - jkz'} dz'$$

$$- \frac{1}{4\pi^{2}j} \int_{\delta_{+}} I_{-}(\alpha) L_{+}(\alpha) \int_{0} \frac{1}{(\alpha - k) L_{+}(k)} \int_{0} \hat{L}(z - z') e^{-iR - jkz'} dz'.$$
 (52)

利用 L(s,k) 的定义(25c),(26)和(42)式,(52)式变为:

$$LHS = \frac{1}{4\pi^{2}j} \int_{\delta_{-}} G_{+}(\alpha) L_{-}(\alpha) \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-jkz}}{(\alpha - k) L_{-}(k)} dk d\alpha$$

$$- \frac{1}{4\pi^{2}j} \int_{\delta_{+}} I_{-}(\alpha) L_{+}(\alpha) \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-jkz}}{(\alpha - k) L_{-}(k)} dk d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-jkz} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\delta_{-}} \frac{G_{+}(\alpha) L_{-}(\alpha)}{(\alpha - k) L_{-}(k)} d\alpha - \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta_{+}} \frac{I_{-}(\alpha) L_{+}(\alpha)}{(\alpha - k) L_{-}(k)} d\alpha \right] dk.$$
(53)

¹⁾ 符号 \int_0^{∞} 代表积分路线 $-\infty--\infty$, $\int_{s_{\pm}}^{s_{\pm}}$ 代表 $-\infty\pm i\delta-\infty\pm i\delta$.

利用关系(51),(53)式变为

$$LHS = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{G}}(s, k) e^{-jkz} dk = \tilde{G}(k, z).$$
 (54)

(54)式的右边正是(34a)式的右边。从而证明(48a)式满足(34)式。

其次证明解(48) 式在 z < 0 时满足条件 (34b) 式。 当 z < 0 (但不等于 0) 时,对(48a) 式右边的积分补加上半大圆形成闭合迴路 C_+ ;得到

$$M(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{+}} \frac{e^{-jkz}}{(k-\alpha)L_{+}(k)} dk = \begin{cases} \frac{e^{-j\alpha z}}{L_{+}(\alpha)} & \text{if } l_{m}\alpha > 0, \\ 0, & l_{m}\alpha < 0, \end{cases}$$
 (55)

将(55)式代入(48)式内,得到

$$\tilde{I}(s,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_+} I_-(\alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha, \qquad z < 0.$$
 (56)

将(37b)式代入(56)式内,并令 $\delta \rightarrow 0$,得到

$$\tilde{I}(s,z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} I_0(s,h-z') \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha(z'-z)} d\alpha dz' = -I_0(s,h-z), \ z < 0.$$
 (57)

这就是条件(34b)式。

五、长振子的电流响应

由附录可知,当振子足够长时,像电流有下面渐近行为:

$$\tilde{I}_0(s, h-z) = \tilde{I}_0(s, h)e^{+sz}, \quad z < 0.$$
 (58)

将之代入(37b)式中,得到

$$I_{-}(k) = -\tilde{I}_{0}(s,h)/(s+jk). \tag{59}$$

将(59)和(39a)式代人(47)式,得到

$$\hat{I}(s, k) = j \frac{\tilde{F}(s)e^{-sh}L_{-}(-js)}{(k+js)L_{+}(k)} + j \frac{\tilde{I}_{0}(s,h)L_{+}(js)}{(k-js)L_{+}(k)}.$$
 (60)

将 F(s) 的解(49)式代入(60)式中,得到

$$\tilde{I}(s, k) = \frac{-2sL_{+}(js)}{(s^{2} + k^{2})L_{+}(k)} \tilde{I}_{0}(s, k).$$
(61)

由此,解(48)式简化为

$$\tilde{I}(s,z) = -K(s,z)\tilde{I}_0(s,h), \tag{62}$$

式中

$$K(s, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2sL_{+}(js)e^{-ikz}}{(k^2 + s^2)L_{+}(k)} dz^{2}$$
 (62a)

是传输函数。(62)式表明,振子足够长时,各次反射脉冲之间的关系可以用传输函数来表示。 后者只与振子形状有关而与脉冲波形和反射次数无关。这一特性十分重要。利用它可以求得 长振子总电流的级数和。

¹⁾ 由于 (42a) 式定义的 $L_+(k)$ 没有零点,被积函数只有一阶极点 $k=\alpha$. 当 $I_m\alpha>0$ 时,极点在 C_+ 内。

²⁾ 容易证明, z < 0 时, $K(s,z) = e^{sz}$.

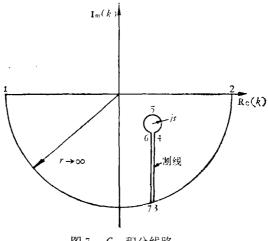


图 7 C_{∞} 积分线路

将各次反射脉冲的上、下标复原;对辐射问题,得到

$$\tilde{I}_{n}^{\pm}(s, z_{n}^{\pm}) = -K(s, z_{n}^{\pm})\tilde{I}_{n-1}^{\pm}(s, h) = -(-)^{n}K(s, z_{n}^{\pm})K^{n}I_{0}(s, h^{\pm}), \tag{63}$$

式中 K = K(s, h). 由(27)式

$$\widetilde{I}_0(s, h^{\pm}) = Y_0(s, h^{\pm})\widetilde{F}_0(s). \tag{63a}$$

$$Y_{\parallel}(s, h^{\pm}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{ikh^{\pm}}}{(s^2 + k^2)L(s, k)} dk.$$
 (63b)

由(8)或(18)式,总像电流为:

$$\tilde{I}(s, z) = \tilde{I}_0(s, z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[I_n^+(s, z_n^+) + I_n^-(s, z_n^-) \right]. \tag{64}$$

将(63)式代入(64)式,并由 z 前的定义(14)式,得到

$$\tilde{I}(s, z) = \tilde{I}_{0}(s, |z|) - \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n}K(s, h^{+} - z)\tilde{I}_{0}(s, h^{+})
+ \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n+1}K(s, h^{-} + z)\tilde{I}_{0}(s, h^{+}) - \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n}K(s, h^{-} + z)\tilde{I}_{0}(s, h^{-})
+ \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n+1}K(s, h^{+} - z)\tilde{I}_{0}(s, h^{-})
= \tilde{I}_{0}(s, |z|) + \frac{K\tilde{I}_{0}(s, h^{-}) - I_{0}(s, h^{+})}{1 - K^{2}}K(s, h^{+} - z)
+ \frac{KI_{0}(s, h^{+}) - I_{0}(s, h^{-})}{1 - K^{2}}K(s, h^{-} + z),$$
(65)

式中第一项是初发脉冲(向两端传播);第二项为向上传播的反射脉冲系列;第三项代表向下传播的脉冲系列。

当振子对称激励时, $h^+ = h^- = h/2$, (65)式进一步简化为:

$$\tilde{I}(s,z) = \tilde{I}_0(s,|z|) - \frac{\tilde{I}_0(s,h/2)}{1+K} \left[K\left(s,\frac{h}{2}-z\right) + K\left(s,\frac{h}{2}+z\right) \right]. \tag{66}$$

这一结果和文献[9]中的总电流公式(4.3)—(4.11)十分相似。但这儿传输函数的表达式(62a) 是严格的"。

附 录

关于 $I_{+}(k)$ 和 $I_{-}(k)$ 的解析区域和渐近特性的说明:

1. 首先证明 [s(s, z) 具有下面特性

$$\lim_{|z| \to \infty} \tilde{l}_0(s, z) e^{\delta |z|} = 0, \ \delta < \varepsilon = \text{Re } s.$$
(A1)

由(27)式,可将 $\tilde{l}_0(s,z)$ 的解写成下面形式

$$\tilde{I}_0(s,z) = A(s,z)e^{-s|z|}, \qquad (\Lambda 2)$$

式中

$$A(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j s \tilde{F}_0(s) e^{(s-jk)|z|}}{(k^2 + s^2) L(s, k)} dk.$$
 (A3)

只要证明

$$\lim_{|z|\to\infty} d(s,z) = C(s), \tag{A4}$$

则(A1)式就成立. 为此将(A3)式右边沿实轴的积分补上下半圆弧并沿割线挖去支点 k = 一i, 形成图 7 的 闭合迴路 Cm. 这样(A3)式可写成

$$A(s, z) = \left[\oint_{c_{\infty}} + \int_{t_1} + \int_{t_2} + \oint_{c_{s}} \right] \frac{js\tilde{F}_0(s)e^{(s-jk)|z|}}{2\pi j(k^2 + s^2)L(s,k)} dk, \tag{A5}$$

式中
$$C_{\infty}$$
的积分路径是 12345671. 其值决定于迴路内奇点的留数
$$A_{i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a^{2}js\tilde{F}_{0}(s)e^{(s-jk_{n})!z!}}{\alpha_{n}^{2}I_{1}(j\alpha_{n})K_{0}(j\alpha_{n})} \qquad \left(k_{n} = -i\sqrt{\left(\frac{\alpha_{n}}{a}\right)^{2} + s^{2}} \, n = 1, 2, 3\cdots\right), \tag{A6}$$

式中 α_n 为 Bessel 函数的根. 可以证明,对任何n,Re $(s-ik_n)<0$. 因此当|z|→ ∞ 时,(A6)式为零. l_i , l_i 的 积分路径分别为 176,432. 在此路径上,Re(s-ik) < 0;因此 $[z] \to \infty$ 时,第二、三项积分 A_2 , A_3 也趋于零。 最后剩下沿小圆 C_s 的积分、其路径为 654。 令 $x=k-js=be^{j\theta}$,积分 (A_4) 式可写成

$$A_{4} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{s}} \frac{js\tilde{F}_{0}(s)e^{-jx|z|}}{x(2js+x)I_{0}(a\sqrt{2jsx})K_{0}(a\sqrt{2jsx})} dx. \tag{A7}$$

当 $|x|=b\rightarrow 0$ 时,考虑到 $K_0(x)=-\ln\frac{x}{x}$,(A7)式变成

$$A_{4} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \to 0} \oint \frac{-\tilde{F}_{0}(s)e^{-jx|x|}}{c_{s} \frac{2I_{0}(a\sqrt{2jsx})\ln\frac{a\sqrt{2jsx}}{2}}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_{0}^{2\pi} \frac{\tilde{F}_{0}(s)}{I_{0}(0)} d\theta^{2} = -2\pi i \tilde{F}_{0}(s)/I_{0}(0). \tag{A8}$$

因此(A4)式成立,从而(A1)式得证.

2. 其次说明当 $z \to \infty$ 时, I 有和 I_0 一样的渐近特性,由(24)和(33)式可知,当 $z \to \infty$ 时,方程左边下半 段积分 [将趋于零.于是 1 和 1。满足同样形式的渐近方程

$$\int_{0}^{\infty} \hat{L}(z-z') l(t-R, z') dz' = F(t-z). \tag{A9}$$

因此 Ĩ(s, z) 应也满足 (A1) 式。

3. 由定义 (37a, b) 式,利用性质(A1)式,显见

¹⁾ 需要指出的是,(66)式只适用于长振子。对于短振子,传输函数与反射次数 n 有关。当 n 很大时, 传输函数趋于稳 定。

$$I_{+}(k) = \int_{0}^{\infty} \tilde{I}(s, z)e^{ikz}dz$$
 在 $I_{m}k > -\delta$ 内解析;

$$I_{-}(k) = \int_{-\infty}^{0} \check{I}(s, z)e^{ikz}dz$$
 在 $I_{m}k < \delta$ 内解析.

4.当 |k|→∞ 时,仅 z = 0 点对上面积分有贡献,因此

$$l_{+}(k) \approx -\tilde{l}(s, 0)/jk,$$

 $l_{-}(k) \approx \tilde{l}(s, 0)/jk.$

参考文献

- [1] Wu, T. T., Antenna Theory.
- [2] Hallen, E., Acta Regiae Soc. Sci. Upsliensis 4(1938), 11: 1.
- [3] King, R. W. P., Theory of Linear Antennas, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1956.
- [4] -----, Arrays of Cylindrical Dipoles, Cambridge University Press New York, 1968.
- [5] King, R. W. P. and Harrison, C. W., Antennas and Waves, MIT Press., 1969.
- [6] Schelkunoff, S. A., Advanced Antenna Theory, chap. 5, John Wiley and Sons Inc., New York, 1952.
- [7] Duncan, R. H. and Hinchey, F. A., J. Res. Natl. Dur. Std., 64D(1960), 569-584.
- [8] Wu, T. T., J. Math. Phys., 2(1961), July-Aug, 550.
- [9] 沈浩明,中国科学A辑, 1984, 2: 159-168; 3: 234-246.
- [10] Tesche, F. M., IEEE Trans., A-P Jan., 1963, 53-62.
- [11] Noble, B., Wiener-Hopf Technique and Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, Pergamon Press, New York, 1958, 1965.
- [12] Walson, G. N., Teory of Bessel Functions, 180, 183, 441.
- [13] 王竹溪、郭敦仁,特殊函数,科学出版社, 1965, 482.
- [14] Hallen, E., Electromagnetic Theory, John Wiley and Sons Inc. New York, 1962, 444-504.