



论文

共轨限制性三体问题及其应用

易照华^{①②}, 李广宇^{①*}, Gerhard HEINZEL^③, Albrecht RÜDIGER^③, 罗永杰^①,
夏炎^①, 赵海斌^①

① 中国科学院紫金山天文台, 南京 210008;

② 南京大学天文系, 南京 210008;

③ Max Planck Institute for Gravitational Physics, D-30167 Hannover, Germany

* 联系人, E-mail: pmoliguangyu@gmail.com

收稿日期: 2009-06-28; 接受日期: 2009-11-12

国家自然科学基金(批准号: 10503013)和紫金山天文台小行星基金资助项目

摘要 根据自然天体和航天器运动中的大量共轨现象, 提出了共轨限制性三体问题模型. 给出了平面圆形共轨限制性三体问题的基本结果: 变量和运动方程的选择; 一组近似公式和一种近似半分析解法. 应用于计划中的引力波天文台 LISA 星座质心的运动, 与高精度数值解符合很好.

关键词

共轨

限制性三体问题

LISA

天文学家很早就注意到了自然天体运动中的共轨现象. 1918 年, 日本的平山清次(K. Hirayama)发现一些小行星的轨道根数(特别是半长径 a , 偏心率 e , 轨道倾角 i)有互相接近的现象, 其中半长径 a 互相接近的小行星后来被称为小行星群(group). 平山清次把 3 个根数 a , e 和 i 中至少有两个互相接近的小行星称为小行星族(family); 如果 3 个根数都接近, 就是本文所要讨论的共轨现象. 为了讨论共同起源问题, 平山清次还提出了本征轨道根数(proper element)概念^[1]. 近年来随着已发现小行星数量的迅速增加, 小行星族的研究有了长足进展. 提出了很多定义和计算本征轨道根数的方法; 还出现了更加细致的对小行星次族(sub-family), 包括统计学、动力学和光谱型性质的多方面研究. Lemaître^[2]2005 年的论文给出了较全面的总结.

脱罗央群小行星(Trojans)是自然天体中最著名的共轨情况. 此群中已发现的有编号小行星的数量

已超过 2900. 银河系中的同一条旋臂内恒星的运动, 天然卫星和人造卫星的运动, 都有共轨现象. 计划中的 LISA 引力波天文台的 3 个航天器的质心与地球共轨, 各航天器到质心的距离很小(不到 0.02 天文单位), 可看作接近共轨. 我们参与了轨道设计和优化工作, 因航天器要求工作时间仅为 10 年, 只用粗略方法处理^[3,4], 即得到了比较理想的结果.

经典的限制性三体问题虽有广泛应用, 但并未完全解决. 近年来有不少主要针对类似卫星情况的关于共轨运动的研究, 如 Mikkola 等人^[5]的工作. 我们则根据自然和人造天体运动中广泛存在的共轨现象提出共轨限制性三体问题模型, 希望能得到更深入的结果, 应用于更多的对象.

1 变量选择和运动方程

以太阳系天体为例. 设 S 和 E 分别代表太阳和某

大行星, 行星 E 绕太阳 S 沿圆形轨道运动, 角速度为 n 且为常数. 取 S 为原点, SE 为 x 轴方向, 建立随 E 绕 S 旋转的旋转坐标系(会合坐标系). 为方便起见, 设 S 和 E 的质量分别为 $1-\mu$ 和 μ , 距离 SE 为单位长度. 在此平面上运动的小天体 P 的坐标 (x, y) 应满足下面的方程^[3]:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}; \quad \Omega = \Omega_0 + \mu\Omega_1, \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{n^2}{2} \left[(1-\mu)r^2 + \mu\Delta^2 \right] + n^2 \left(\frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right), \\ \Omega_0 &= n^2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} \right), \quad \Omega_1 = n^2 \left(\frac{1}{2} - x - \frac{1}{r} + \frac{1}{\Delta} \right), \\ r^2 &= x^2 + y^2, \\ \Delta^2 &= r^2 - 2x + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

为了计算方便, 没有完全采用无量纲单位系统, 式中保留了旋转坐标系的角速度 n .

现在把直角坐标变换为极坐标 r 和 ϑ , 即

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3)$$

代入(1)式, 化为以 r 和 ϑ 为变量的运动方程:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - 2nr\dot{\vartheta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ &= n^2 r - \frac{n^2}{r^2} + \mu n^2 \left(\frac{1}{r^2} - \cos \vartheta - \frac{r - \cos \vartheta}{\Delta^3} \right), \\ \frac{d}{dt} \left[r^2 (\dot{\vartheta} + n) \right] &= \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} = \mu n^2 r \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^3} \right), \\ \Delta^2 &= r^2 - 2r \cos \vartheta + 1. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式有Jacobi积分:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 = 2\Omega - n^2 C, \quad (5)$$

其中 C 即 Jacobi 积分常数.

以上各式中的 μ 接近于行星同太阳的质量之比, 在太阳系中是小于 0.001 的小量. 故先讨论 $\mu = 0$ 时的情况, 此即旋转坐标系中的二体问题. 取

$$\psi = \vartheta + nt \quad \text{或} \quad \dot{\psi} = \dot{\vartheta} + n, \quad (6)$$

则(4)式化为二体问题方程, 可按二体问题方法解出:

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\psi} &= h; \quad r = \frac{h^2/n^2}{1 + e \cos(\psi + B)}; \\ \dot{r} &= \frac{en^2}{h} \sin(\psi + B). \end{aligned} \quad (7)$$

还有包含另一积分常数的积分, 要根据圆锥曲线的

具体情况求出. 由此, 可选择限制性二体问题的积分常数为: h, e 和 B ; 另一常数从略.

以限制性二体问题为基础, 用常数变易法导出 $\mu \neq 0$ 时的运动方程为

$$\dot{h} = \mu n^2 r \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^3} \right), \quad (8)$$

$$\dot{e} = \mu h K \sin(\psi + B) + \frac{\dot{h}}{h} \left[e + \left(1 + \frac{h^2}{n^2 r} \right) \cos(\psi + B) \right], \quad (9)$$

$$e\dot{B} = \mu h K \cos(\psi + B) - \left(1 + \frac{h^2}{n^2 r} \right) \sin(\psi + B), \quad (10)$$

又由(6)和(7)式得

$$\dot{\vartheta} = \dot{\psi} - n = \frac{h}{r^2} - n, \quad (11)$$

其中

$$K = \frac{1}{r^2} - \cos \vartheta - \frac{r - \cos \vartheta}{\Delta^3}, \quad r = \frac{h^2/n^2}{1 + e \cos(\psi + B)}. \quad (12)$$

(8)~(11)式即平面圆形限制性三体问题的运动方程, 是受摄二体问题形式. 为了避免小偏心率困难, 引入 u, v 取代 e 和 B .

定义

$$u = e \cos(\psi + B), \quad v = e \sin(\psi + B), \quad (13)$$

可导出:

$$\dot{u} = \frac{2\dot{h}}{h}(1+u) - \frac{h}{r^2}v, \quad \dot{v} = \mu h K + \frac{\dot{h}}{h}v + \frac{h}{r^2}u, \quad (14)$$

其中

$$r = \frac{h^2/n^2}{1+u}. \quad (15)$$

这样(8)和(11)式同(14)式一起组成平面圆形限制性三体问题的运动方程, 而式中的 r 要用(15)式代入. 基本变量成为 h, ϑ, u 和 v .

2 共轨平面圆形限制性三体问题

以太阳为中心的单位圆上的任意点

$$r = 1, \quad \vartheta = \vartheta_0 \text{ (任意常数)} \quad (16)$$

是限制性二体问题的特解, 而且是平动点. 位于这些点的小天体都与行星共轨. 本文提出的共轨限制性三体问题, 研究的就是初始位置由(16)式给定的小天体的运动规律.

将初始条件(16)代入Jacobi积分(5)得

$$C = 3(1 - \mu) + \mu \left(4 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \csc \frac{\vartheta_0}{2} \right). \quad (17)$$

这是共轨限制性三体问题的 Jacobi 常数, 只与 ϑ_0 和 μ 有关. 图 1 给出的曲线为 $\mu = 3.0359 \times 10^{-6}$ (太阳-地月系) 时 C 与 ϑ_0 的关系.

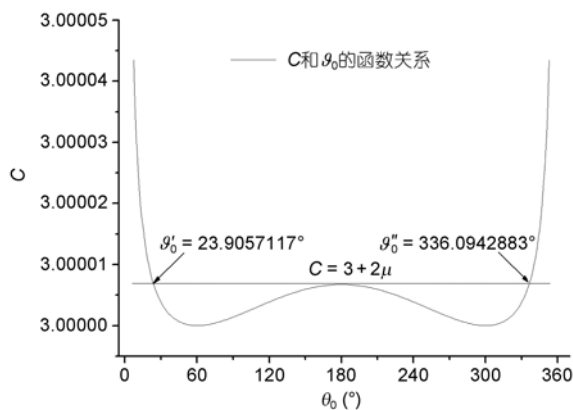


图 1 C 与 ϑ_0 的函数关系

当 $\vartheta_0 = 60^\circ$ 和 300° 时 (对应平动点 L_4 和 L_5), C 取极小值 3, 与 μ 无关. 当 $\vartheta_0 = 180^\circ$ 时, $C = 3 + 2\mu$ 为极大. 直线 $C = 3 + 2\mu$ 与曲线 C 另外交于 $\vartheta'_0 = 23.9057117^\circ$ 和 $\vartheta''_0 = 336.0942883^\circ$ 两点, 同样与 μ 无关.

初始条件(16)表明小天体在初始时刻位于零速度线上; 此曲线为小天体的运动区和禁区分界线, 其中通过平动点 L_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 的零速度线 (对应 Jacobi 常数为 C_i , 按大小排序, C_1 最大) 特别重要; 它们同单位圆的交点是分界点, 相应的幅角为 $\vartheta_0 = \vartheta_{0i}$. 表 1 给出了各分界点幅角在 $\mu = 3.0359 \times 10^{-6}$ (日-地月系) 和 $\mu = 0.9538754 \times 10^{-3}$ (日-木系) 两种情况下的值.

由于对称性, $r = 1, \vartheta = -\vartheta_{0i}$ 也在 $C = C_i$ 的零速度线上. 这样, 运动平面就由各 ϑ_{0i} 值对应的零速度线划分成了不同的区域, 而相应初值的运动只能局限在某个区域内.

表 1 日-地月系和日-木系的不同 ϑ_0 值

μ	$\vartheta_{01} (^\circ)$	$\vartheta_{02} (^\circ)$	$\vartheta_{03} (^\circ)$	$\vartheta_{04} (^\circ)$	$\vartheta_{05} (^\circ)$
3.0359×10^{-6}	0.3828225	0.3845339	23.9056	60	300
0.9538754×10^{-3}	2.5675658	2.64665725	23.9069	60	300

ϑ_0 的绝对值小于 ϑ_{01} 时, 运动局限在行星附近接近圆形的区域内, 称为类卫星区(QS); ϑ_0 的绝对值在 ϑ_{01} 和 ϑ_{02} 之间时, 运动局限在哑铃形区域内部, 称为哑铃区(DB); ϑ_0 的绝对值在 ϑ_{02} 和 ϑ_{03} 之间时, 运动禁区为马蹄形区域内部, 运动局限在马蹄形外围, 称为马蹄区(HS); ϑ_0 的绝对值大于 ϑ_{03} 时, 运动禁区缩小为两个对称的蝌蚪形区域内部, 运动局限在蝌蚪形外围, 称为蝌蚪区(TP), 见图 2.

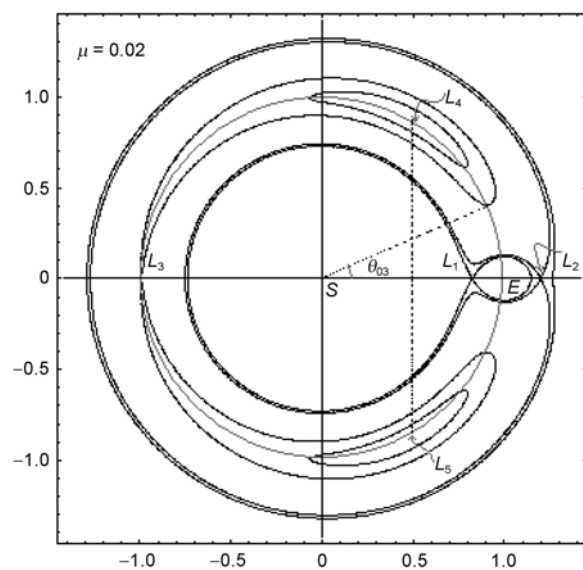


图 2 几个运动区域图示 (为了方便作图, 取 $\mu = 0.02$)

ϑ_{03} 同 ϑ'_0 略有差别, 对应的 Jacobi 常数 $C_3 < 3 + 2\mu$. 当 μ 值很小时 (如太阳和行星的情况), 在近似讨论中可以忽略此差别. 但因奇点关系, 应用中遇到 $\vartheta_0 \approx \vartheta_{0i}$ 的情况时, 要用更严格的方法处理.

3 近似分析法

从共轨初始条件出发, 虽然用数值解法可计算出任意 ϑ_0 值相应的轨道到要求的精度, 但为了讨论在不同运动区内的轨道特征以利应用, 分析法, 即使是近似的, 也具有重要的意义.

3.1 参数 τ 及其近似公式

对于太阳系等 μ 值很小的情况, 先建立准确到 μ 一阶的, 方程(8), (11)和(14)的近似分析解法. 偏心率 e 的初值为零, $\dot{e}$ 含 μ 的因子; 故 e, u, v 都是一阶小量, 而且其中 u, v 还是短周期项. 可以分开讨论. 先设 u, v 为零, 由(15), (8)和(11)式可得

$$r = \frac{h^2}{n^2}, \quad \dot{h} = \mu r n^2 \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right), \quad \dot{\vartheta} = \frac{h}{r^2} - n.$$

由此可化为

$$\dot{h} = \mu h^2 \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right), \quad \dot{\vartheta} = \frac{n^4}{h^3} - n,$$

准确到一阶, 在 Δ 的表达式中可取 $r=1$, 则有 $\Delta = \sin(\vartheta/2) > 0$, 因 $(\vartheta \in (0^\circ, 360^\circ), \sin(\vartheta/2) > 0)$. 再令

$$h = n(1 + \tau), \quad (18)$$

引入在我们的讨论中具有重要意义的参数 τ , 上式化为

$$\left[(1 + \tau)^{-5} - (1 + \tau)^{-2}\right] d\tau = \mu \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{8} \sin^{-3} \frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta.$$

积分可得

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{(1 + \tau)^4} + \frac{1}{1 + \tau} \\ & = \mu \left[(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) + \frac{1}{2} \left(\csc \frac{\vartheta}{2} - \csc \frac{\vartheta_0}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

左端按 τ 展开得 $-\frac{3}{2}\tau^2 + 4\tau^3 + \dots$, 故若只准到 τ^2 , 则有

$$\tau^2 = \frac{2}{3} \mu Q(\vartheta), \quad (19)$$

其中

$$Q(\vartheta) = Y(\vartheta) - Y(\vartheta_0), \quad Y(\vartheta) = \cos \vartheta - \frac{1}{2} \csc \frac{\vartheta}{2}, \quad (20)$$

由此可看出, 当 μ 为小量时, τ 与 $\sqrt{\mu}$ 同量级. 图 3 给出 $\vartheta_0 = 20^\circ$ 时 τ^2 与 ϑ 的关系.

由(20)式可知, 运动有下面特性:

(i) 非负性: $Q(\vartheta) \geq 0$;

(ii) 对称性: $Q(-\vartheta) = Q(360^\circ - \vartheta) = Q(\vartheta)$; 故只需讨论 $0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$ 的情况;

(iii) $\vartheta_{02} < \vartheta_0 < \vartheta_{03}$ 时, 即 HS, ϑ 的变化范围是 $(\vartheta_0, 360^\circ - \vartheta_0)$;

(iv) $\vartheta_0 > \vartheta_{03}$ 时, 即 TP, ϑ 的变化范围是 $(\vartheta_0, \vartheta_1)$,

其中 ϑ_1 由下式定出

$$\sin \frac{\vartheta_1}{2} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \csc \frac{\vartheta_0}{2}}. \quad (21)$$

对于 $\vartheta_0 < \vartheta_{02}$ 的情况, 需另行讨论.

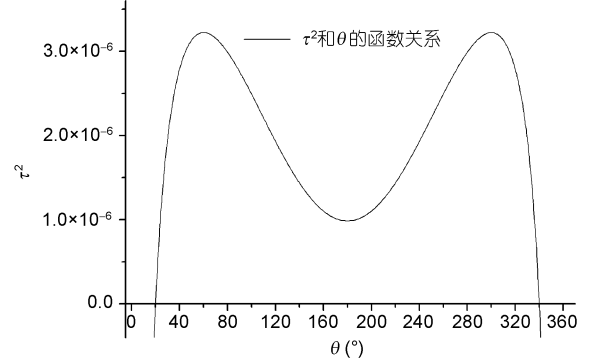


图 3 $\vartheta_0 = 20^\circ$ 时 τ^2 与 ϑ 的函数关系

3.2 忽略短周期项的近似解

现在针对HS和TP两种情况, 根据以上结果建立方程(8), (11)和(14)准确到 μ -阶的近似分析解法. 由于偏心率 e 的初值为零, 变率 $\dot{e}$ 为一阶小量, 在一般情况下, 偏心率应为一阶小量, 于是

$$u = e \cos(\psi + B) = e \cos(nt + \vartheta + B), \quad (22)$$

为一阶短周期项. 故在一阶分析解法中, 可同其他项分开求解, 然后再合并. 先忽略 u , 相应的方程为

$$\begin{aligned} r &= \frac{h^2}{n^2} = (1 + \tau)^2, \quad \tau^2 = \frac{2}{3} \mu Q(\vartheta), \\ \dot{\vartheta} &= n \left[\frac{1}{(1 + \tau)^3} - 1 \right] = n(-3\tau + 6\tau^2 - \dots), \end{aligned} \quad (23)$$

由此可得

$$\tau = \pm \sqrt{\frac{2}{3} \mu Q(\vartheta)}, \quad (24)$$

其中正负号由初值 ϑ_0 根据关系

$$\dot{\tau} = \frac{\dot{h}}{n} = \mu n \sin \vartheta_0 \left(1 - \frac{1}{8} \csc^3 \frac{\vartheta_0}{2}\right) \quad (25)$$

确定. 例如对于 LISA 航天器质心的情况, $\vartheta_0 = -20^\circ$ 或 340° , $\dot{\tau} > 0$; 但 $t=0$ 时, $\tau=0$, 因此有 $t>0$ 时(至少在附近);

$$\tau > 0, \quad \dot{\tau} < 0. \quad (26)$$

同理, 若 $\vartheta_0 = 20^\circ$ 时, 相应的 $\tau < 0$, $\dot{\vartheta} > 0$.

另外再由函数 $Q(\vartheta)$ 的性质(见图 3)可看出: 除 $Q(20^\circ) = Q(340^\circ) = 0$ 外, $Q(\vartheta)$ 在 $340^\circ > \vartheta > 20^\circ$ 不再有零点, 可保持 $\tau > 0$, $\dot{\vartheta} < 0$, 故 ϑ 由 340° 单调减小到 20° , 回到 $\tau = 0$ ($r = 1$); 同理, 再以 $\vartheta_0 = 20^\circ$ 作为新起点, 此时 $\dot{\tau} < 0$, 随着时间增加有 $\tau < 0$, $\dot{\vartheta} > 0$; 故 ϑ 由 20° 单调增加到 340° . 此过程可一直重复下去. 故这样构造的解是周期解, 只需给出一个周期内的计算公式. 由于上述特点, 要分为两部分计算. 对于 LISA 航天器质心的情况: 从 340° 出发有

$$\begin{aligned} nt &= \int_{340^\circ}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{-\sqrt{6\mu Q(\vartheta)} + 4\mu Q(\vartheta)} \\ &= \int_{\vartheta}^{340^\circ} \frac{d\vartheta}{\sqrt{6\mu Q(\vartheta)} - 4\mu Q(\vartheta)}; \end{aligned} \quad (27)$$

从 20° 出发有

$$nt = \int_{20^\circ}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{6\mu Q(\vartheta)} + 4\mu Q(\vartheta)}. \quad (28)$$

函数 $Q(\vartheta)$ 由(20)式定义, 上述积分无法用初等函数表示, 只能用数值方法计算, 从而得到幅角 ϑ 和时间 t 之间的函数关系. 用 T_1 和 T_2 分别表示 ϑ 从 340° 减小到 20° , 以及从 20° 增加到 340° 所需的时间(以年为单位), 则有

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{20^\circ}^{340^\circ} \frac{d\vartheta}{\sqrt{6\mu Q(\vartheta)} - 4\mu Q(\vartheta)}, \\ T_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{20^\circ}^{340^\circ} \frac{d\vartheta}{\sqrt{6\mu Q(\vartheta)} + 4\mu Q(\vartheta)}. \end{aligned} \quad (29)$$

周期

$$T = T_1 + T_2 \approx \frac{1}{\pi} \int_{20^\circ}^{340^\circ} \frac{d\vartheta}{\sqrt{6\mu Q(\vartheta)}}. \quad (30)$$

上述结果可直接用于一般马蹄(HS)区的情形, 对任意 $\vartheta_{02} < \vartheta_0 < \vartheta_{03}$, 相应的(28)式成为

$$nt = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{6\mu Q(\vartheta)} + 4\mu Q(\vartheta)}, \quad (31)$$

(27)式成为

$$nt = \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{6\mu Q(\vartheta)} - 4\mu Q(\vartheta)}. \quad (32)$$

而在周期 T 的表达式(29)和(30)中, 只需将积分上限改

为 $2\pi - \vartheta_0$, 下限改为 ϑ_0 即可.

同理, 对于蝌蚪区(TP)的情形, 当 $60^\circ > \vartheta_0 > \vartheta_{03}$ 时, 先按(21)式计算出 ϑ_1 ; 容易判断出 $180^\circ > \vartheta_1 > 60^\circ$, ϑ 只能在 ϑ_0 和 ϑ_1 之间变化. 相应的(31)式形式不变, 而(32)式中需将积分上限改为 ϑ_1 . 周期 T 的表达式(30)中, 需将积分上限改为 ϑ_1 , 下限改为 ϑ_0 . 当 $180^\circ > \vartheta_0 > 60^\circ$ 时, 相应的 ϑ_1 应满足 $60^\circ > \vartheta_1 > \vartheta_{03}$; 与上面一样, 但需将 ϑ_0 和 ϑ_1 的位置调换. 当 $\vartheta_0 > 180^\circ$ 时, 可利用对称关系 $Q(360^\circ - \vartheta) = Q(\vartheta)$, 直接利用前面结果.

3.3 短周期项

在一阶理论中, 一阶短周期项可近似处理. r 和 ϑ 的表达中, 体现短周期项的量就是参数 u , 下面推导它的近似表达式. 由于 $t = 0$ 时, $e = 0$, $r = 1$, $h = n$, 故可简化得到:

$$\dot{e} = \mu n (K \sin f + 2L \cos f), \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} f &= \psi + B, \\ K &= (1 - \cos \vartheta_0) \left(1 - \frac{1}{8} \csc^3 \frac{\vartheta_0}{2} \right), \\ L &= \sin \vartheta_0 \left(1 - \frac{1}{8} \csc^3 \frac{\vartheta_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

K 和 L 为常数, 故有

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \alpha \sin(f + \gamma), \\ \alpha &= \sqrt{(\mu n K)^2 + (2\mu n L)^2}, \\ \cos \gamma &= \mu n K / \alpha, \quad \sin \gamma = 2\mu n L / \alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

α 为一阶小量, 可近似地取 $\dot{B} = 0$, $\dot{f} = \dot{\psi} + \dot{B} = h/r^2 = n$, 上式化为

$$\frac{de}{df} = \frac{\alpha}{n} \sin(f + \gamma) = \mu \sqrt{K^2 + 4L^2} \sin(f + \gamma),$$

e 的初值为 0, 故积分得

$$e = \mu \sqrt{K^2 + 4L^2} [\cos(f_0 + \gamma) - \cos(f + \gamma)].$$

但 $f = \psi + B = \vartheta + nt + B$ 可随时间变化达到任意值, 故要保持 $e \geq 0$, 必须 $\cos(f_0 + \gamma) = 1$, 即 $f_0 = \vartheta_0 + B = -\gamma$, 由此得 e 和 u 的表达式:

$$\begin{aligned} e &= \mu \sqrt{K^2 + 4L^2} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0 + nt)], \\ u &= e \cos(\vartheta - \vartheta_0 + nt - \gamma). \end{aligned} \quad (36)$$

其中 ϑ 可由所给时间 t 值按(31)或(32)式算出, 代入(24)和(36)式可得对应的 τ 和 u 值; 故含短周期项的 r , 可由准确公式

$$r = (1 + \tau)^2 / (1 + u) \quad (37)$$

算出. 至于 ϑ 中的短周期项, 可根据更准确的表达式

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{h}{r^2} - n = n \left[\frac{(1+u)^2}{(1+\tau)^3} - 1 \right] \\ &\approx n(-3\tau + 6\tau^2) + 2nu = \dot{\vartheta}_{u=0} + \delta \end{aligned} \quad (38)$$

得到, 其中 $\vartheta_{u=0}$ 就是 $u=0$ 时的 ϑ , 附加的短周期项为

$$\delta = \int_0^t 2nu \, dt = 2n \int_0^t e \cos(\vartheta - \vartheta_0 + nt - \gamma) \, dt, \quad (39)$$

此式只能用数值方法计算. 必要时, 可用 $\vartheta = \vartheta_{u=0} + \delta$ 迭代计算.

实际计算表明, ϑ 的变率几乎为常量, 设为 $\bar{n}$: 在不影响精度的条件下, 对 HS 区和 TP 区可分别取 $\bar{n} = 4(\pi - \vartheta_0)/T$ 和 $\bar{n} = 2|\vartheta_1 - \vartheta_0|/T$, 并取

$$\vartheta = \pm \bar{n}t + \vartheta_0. \quad (40)$$

其中在 ϑ 增加段取正号, 减小段取负号, 用(36)式的 e 代入(39)式可积分得出 δ 的分析式.

4 数值检验

上面给出的是一种周期项加短周期项的半分析解法, 因积分不能用初等函数表示, 需用数值方法计算. 本文主要针对 HS 区和 TP 区两种情况做了讨论, 对太阳系天体运动的情况, 已包括了初值范围的绝大部分. 下面的数值检验采用对运动方程进行数值积分得到的结果, 与上述半分析方法的计算结果进行比较, 符合程度令人满意.

4.1 LISA 航天器质心的运动

LISA 航天器质心运动的分析是平面共轨限制性三体问题的一个典型应用. 取 $t=0$ 时, $r=1$, $\dot{r}=\dot{\vartheta}=0$, $\vartheta_0=340^\circ$; 按原始极坐标运动方程(4)式进行精确数值积分. ϑ 从 340° 单调减小到 20° (有微小短周期扰动), 需时 85614.5 平太阳日 = 234.3997 儒略年 (即 T_1); 此时期内 $r > 1$, 变化中有两次极小, 一次极大. 继续计算, ϑ 又从 20° 单调增加到 340° , 需时 85343.51145 平太阳日 = 233.6578 儒略年 (即 T_2). 此时期内 $r < 1$, 两次极大, 一次极小, 变化相同. 此初始

条件对应的零速度线是马蹄形; 计算结果表明 LISA 质心从 $r=1$, $\vartheta = \vartheta_0 = 340^\circ$ 出发, 沿马蹄形外围附近运动, 到达 $\vartheta = 20^\circ$ 后, 又沿马蹄形内围附近绕回到 $\vartheta = 340^\circ$, 与本文半分析方法得到的结果一致. 具体比较参看下面图形: 图 4(a) 为用数值积分计算得到的 r 随时间变化的曲线和本文半分析方法计算结果的比较; 图 4(b) 为对应 ϑ 变化曲线的比较.

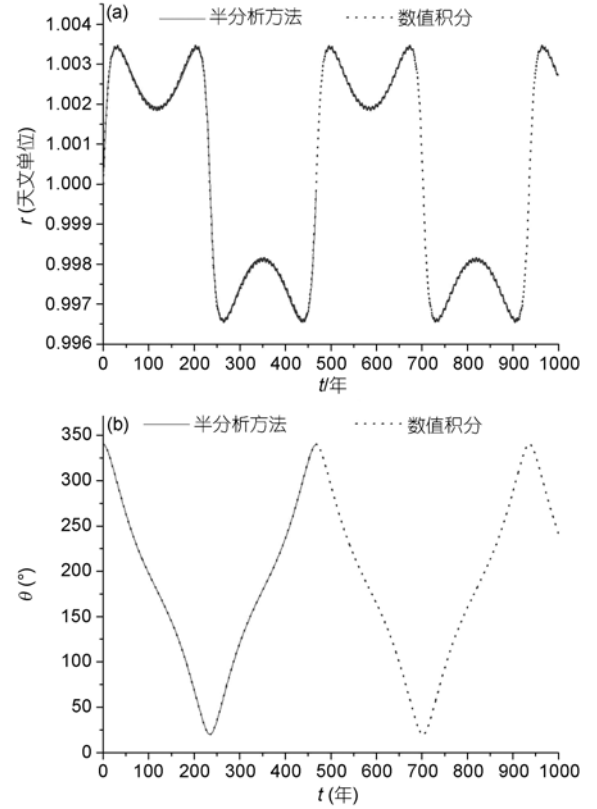


图 4

(a) 半分析方法计算的 r 与数值积分结果的比较; (b) 半分析方法计算的 θ 与数值积分结果的比较

用(29)式计算出的 T_1 和 T_2 如下:

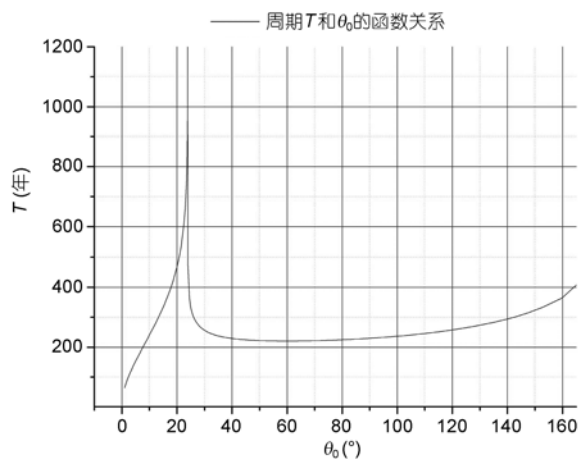
$$T_1 = 234.66 \text{ 儒略年}, T_2 = 233.47 \text{ 儒略年},$$

与数值积分结果接近.

这里用高精度数值方法和(30)式计算出周期 T 和 ϑ_0 的关系, 见图 5. 值得注意的是, $\vartheta_0 \approx \vartheta_{03}$ 时, T 趋于无穷大; 在 $\vartheta_0 = 60^\circ$ 处为极小 (约 220.7 年).

4.2 HS 区和 TP 区的其他例子

下面再选初值为 HS 区内 $\vartheta_0 = 21^\circ$, TP 区内 $\vartheta_0 =$

图 5 周期 T 和 θ_0 的函数关系

30° 和 70° 三种运动, 分别用半分析方法和数值积分计算得到的结果进行比较, 以期获得进一步的认识. 图 6(a) 为 $\theta_0 = 21^\circ, 30^\circ, 70^\circ$ 时, 半分析方法计算的 r 与数值积分结果的比较; 图 6(b) 是 $\theta_0 = 21^\circ, 30^\circ, 70^\circ$ 时, 半分析方法计算的 θ 与数值积分结果的比较. 比较表明, 符合程度对于研究和应用都是可以满意的.

5 展望

本文给出了一种共轨限制性三体问题的一阶近似半分析方法, 对初值在 HS 和 TP 区(占初值范围的绝大部分)的计算结果, 与数值积分结果比对, 在 1000 年的时间尺度上都符合得很好, 对于理论研究和实际应用都有一定的价值. 进一步的工作将一方面进行理论上的深入探讨, 一方面扩大应用的范围. 包括研究这种轨道的稳定性, 以及行星轨道偏心率

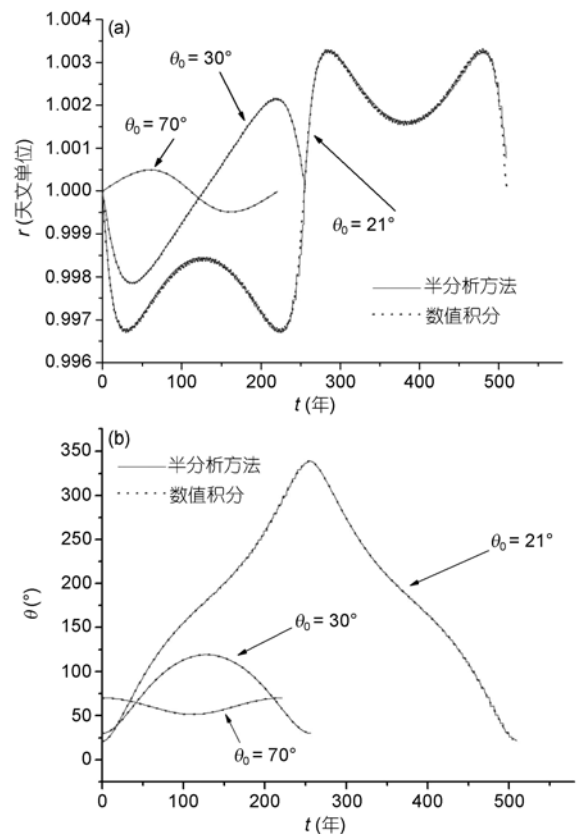


图 6

(a) $\theta_0 = 21^\circ, 30^\circ, 70^\circ$ 时, 半分析方法计算的 r 与数值积分结果的比较; (b) $\theta_0 = 21^\circ, 30^\circ, 70^\circ$ 时, 半分析方法计算的 θ 与数值积分结果的比较

的影响; 探索更精确的分析解法; 用于研究脱罗央 (Trojans) 群小行星的轨道演化; 用于研究近地小行星轨道; 用于研究接近共轨情况的航天器轨道设计; 探索研究银河系内的共轨恒星族运动.

致谢 作者感谢德国马普引力物理研究所(爱因斯坦研究所)Karsten DANZMANN 教授、中国科学院紫金山天文台马月华、倪维斗研究员对本文工作的关心和支持.

参考文献

- Hirayama K. Groups of asteroids probably of common origin. *Astron J*, 1918, 31(734): 185—188[DOI]
- Lemaitre A. Asteroid family classification from very large catalogues. In: *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2004. Cambridge: Cambridge University Press, 2005, 135—144
- Yi Z, Li G, Heinzel G, et al. Coorbital restricted problem and its application in the design of the orbits of the LISA spacecraft. *Int J Mod Phys D*, 2008, 17, 7: 1005—1020[DOI]
- Li G, Yi Z, Heinzel G, et al. Methods for orbit optimization for the LISA gravitational wave observatory. *Int J Mod Phys D*, 2008, 17(7): 1021—1042[DOI]
- Mikkola S, Innanen K, Wiegert P. Stability limits for the quasi-satellite orbit. *Mon Not R Astron Soc*, 2006, 369, 1: 15—24[DOI]