中 国 科 学 (A 辑)
第 28 卷 第 1 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1998 年 1 月

线性规划的新算法 *

杨德庄
(华罗庚应用数学与信息科学研究中心, 北京 100039; 中国科学技术大学研究生院数学部, 北京 100039)

摘要 提出一种求解 LP 的新思想, 基于这种思想给出了一种求解 LP 的新算法, 其中从一个基准面到更深层基准面的推进算法是按算法与模型一体化思想构思的, 借助切割面, 把推进的模型与算法化为一维单峰函数求优的特殊模型与算法, 既简单又初等, 无需矩阵求逆, 计算量很少. 新算法的另一个意义在于, 它的核心算法可以有效地改进单纯形算法、Karmarkar 算法和一种新椭球算法的迭代过程, 还充分利用迭代过程解 x^k 的全部信息.

关键词 基准线 好方向 核心算法

线性优化技术的 3 个重要算法[1~3] 以及它们的变形算法[4], 已为它的进一步发展奠定了深厚的基础. 目前, 在这个领域里, 许多学者还在寻求 LP 更好更有效的算法, 本文提出的求解 LP 的新思想和新算法, 正是这样的一种尝试, 基本思路是: 从一个基准面, 通过在切割面上求优, 推进到更深层次的基准面, 直至推到 LP 约束集的支撑平面为止. 这种途径不同于 3 个重要算法的 3 条途径. 本文给出的新算法迭代过程既简单又初等, 计算量很小. 其中从一个基准面到更深层基准面的推进算法是按算法与模型一体化思想[5] 构思的, 在切割面上, 把推进的模型与算法化为一个特殊模型与算法. 它是一个简单的双层规划问题, 本质上是一维单峰函数的求优问题. 因此一维最有效的黄金分割法(0. 618 法)及二分法等技巧被融在模型之中, 华罗庚在中国开创应用数学时, 第 1 阶段——普及推广阶段工作中最有特色、最简单、最初等的优选法技巧被灵活地用上了, 在这高层次的复杂模型中起了决定性作用.

本文新算法的核心算法还可以有效地改进单纯形算法、Karmakar 算法[3] 和一种新椭球算法1) 及其各种变形算法.

1 新算法的基本思想

考虑 LP 的一般型

$$\begin{aligned} &\min\ c^{\mathrm{T}} x \\ &\text{s.t.}\ \ Ax \geqslant b,\ \ x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

1997-06-19 收稿, 1997-08-29 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19571079)

1) 杨德庄, 张敏洪, 张利华. 一种新的椭球算法

记可行解集为 $P=\left\{x\in \mathrm{R}^n \mid Ax\geqslant b,\ x\geqslant 0\right\}$.

首先引入一些概念：

(i)超平面：$H=\left\{x\in \mathrm{R}^n \mid \alpha^{\mathrm{T}}x=\lambda\right\}$，其中 α 为 n 维非零列向量，λ 为标量.

(ii)半空间：$H_{\mathrm{L}}=\left\{x\in \mathrm{R}^n \mid \alpha^{\mathrm{T}}x\leqslant\lambda\right\}$ 为下半空间，$H_{\mathrm{U}}=\left\{x\in \mathrm{R}^n \mid \alpha^{\mathrm{T}}x\geqslant\lambda\right\}$ 为上半空间.

(iii)支撑超平面：若超平面 H 与 P 的交集非空，且 $H_{\mathrm{U}}\supset P$，则称 H 为 P 的支撑超平面.

(iv)基准面：若 $x^k\in P$，则称超平面 $\left\{x\in \mathrm{R}^n \mid c^{\mathrm{T}}x=c^{\mathrm{T}}x^k\right\}$ 为过 x^k 点的基准面，记为 $Z(x^k)$，简记为 Z_k.

(v)基准线(段)：在基准面上，过 x^k 的直线 $L(x^k)=\{x\in \mathrm{R}^n \mid x=x^k+t\beta,\ c^{\mathrm{T}}\beta=0,\ -\infty<t<\infty\}$；称 $P\cap L(x^k)$ 直线段为基准线 $l(x^k)=P\cap L(x^k)=\{x\in \mathrm{R}^n \mid x=x^k+t\beta,\ c^{\mathrm{T}}\beta=0,\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$；显然 $l(x^k)\subset L(x^k)\subset Z(x^k)$，其中 β 为 n 维非零列向量，$x^k(1)=x^k+t_1\beta$，$x^k(2)=x^k+t_2\beta$ 为基准线的端点.

(vi)切割面：超平面 $\Pi_k\supset L(x^k)$ 称为切割面.

(vii)好方向：起点在 $l(x^k)$ 上，终点在 Π_k 上的向量 α^k，$c^{\mathrm{T}}\alpha^k<0$，则称 α^k 为 Π_k 上的好方向.

(viii)可行方向：若 $x^k\in P$，$x^k+\lambda\eta\in P$，其中 η 是 n 维非零列向量，$\lambda>0$，则称 η 为可行方向.

新算法的基本思想：

步骤 1　从初始可行解 x^k 出发.

步骤 2　形成基准面：$Z(x^k)=\left\{x\in \mathrm{R}^n \mid c^{\mathrm{T}}x=c^{\mathrm{T}}x^k\right\}$.

步骤 3　确定基准线：在 $Z(x^k)$ 上确定一条过 x^k 的直线 $L(x^k)=\{x\in \mathrm{R}^n \mid x=x^k+t\beta,\ c^{\mathrm{T}}\beta=0,\ -\infty<t<\infty\}$，对确定的 β，求 t_1，t_2，使得 $l(x^k)=P\cap L(x^k)=\{x\in \mathrm{R}^n \mid x=x^k+t\beta,\ c^{\mathrm{T}}\beta=0,\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$.

步骤 4　形成切割面：确定一个超平面 Π_k，使得 $\Pi_k\supset L(x^k)$.

步骤 5　切割面 Π_k 上求优：

$$\begin{aligned}&\min\ c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\ \ x\in P\cap\Pi_k.\end{aligned}\tag{1.2}$$

得在 $P\cap\Pi_k$ 上的最优解 x^{k+1}.

步骤 6　决定重复或停止：若满足停机条件，比如 $c^{\mathrm{T}}x^{k+1}\geqslant c^{\mathrm{T}}x^k$，则停止(在具体算法中，有其特殊的停机条件)；否则 $k=k+1$ 返回到步骤 1.

显然，不同的确定基准线和切割面的方法，将导出不同的算法，好的算法必定是有好的确定基准线和切割面的方法．还必须指出，这种算法的关键在于切割面上的求优，称之为核心算法.

以下将给出一种确定基准线和切割面的方法，以及好的核心算法，形成本文给出的新算法.

2　切割面上求优——核心算法

在新算法的基本思想中，在切割面 Π_k 上求优

$$\begin{aligned}&\min\ c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\ \ x\in P\cap\Pi_k\end{aligned}$$

是求解 LP 问题的关键，它是新算法的核心算法．从这种描述的模型上看，它与原问题

$$\min\ c^{\mathrm{T}}x$$

$$\text{s.t.}\quad x \in P$$

有同样的难度, 但是, 下面的引理 1 揭示了在切割面 Π_k 上求优的特殊本质, 核心算法的目的在于求 x^{k+1}以推进 Z_k 到 Z_{k+1}. 因此, 构造特殊的模型与算法, 这是一种模型与算法一体化的构思.

首先, 基于引理 1, 可以视切割面 Π_k 为由从基准线 $l(x^k)$上每个点沿好方向 α^k 射出的射线组成的, 射线可表为: $x(t, q)= x^k+ t\beta+q\alpha^k$, 其中 $c^{\mathrm{T}}\beta=0$, $c^{\mathrm{T}}\alpha^k<0$, $q\geqslant 0$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

这样, 求解

$$\begin{aligned}&\min\ x^{\mathrm{T}}x\\ &\text{s.t.}\quad x\in P\cap\ \Pi_k\end{aligned}$$

的最优解 x^{k+1}, 由于 $x= x^k+t\beta+q\alpha^k$, 就是要确定 t^*, q^* 使得

$$x^{k+1} = x^k + t^*\beta + q^*\alpha^k.$$

不失一般性, 假定 P 是闭集(否则以 P 的闭包代之), 并记 P°是 P 的内点集.

引理 **1** 定义在点集 $P\cap\Pi_k\cap\left\{c^{\mathrm{T}}x\leqslant c^{\mathrm{T}}x^k\right\}-P^{\circ}$ 上的函数 $c^{\mathrm{T}}x$, 对于在超平面 Π_k 上以 $l(x^k)$为横坐标轴, t 为参变量的坐标系而言, 是单峰凸函数.

这是因为 P 是凸集, $c^{\mathrm{T}}x$ 是线性函数所决定的.

以上问题可视为求解一个双层规划问题:

$$\begin{aligned}&\min\ c^{\mathrm{T}}x(t, q),\\ &t\in[t_1, t_2],\\ &\max\ q\\ &\text{s.t.}\quad x^k+t\beta+q\alpha^k\in P.\end{aligned}\tag{2.1}$$

当 t 固定时, 求解

$$\begin{aligned}&\max\ q\\ &\text{s.t.}\quad x^k+t\beta+q\alpha^k\in P,\end{aligned}\tag{2.2}$$

实际上, 就是沿射线 $x=x^k+t\beta+q\alpha^k$ 在$\left\{x\in\mathrm{R}^n \mid Ax\geqslant b,\ x\geqslant 0\right\}$上求 $qc^{\mathrm{T}}\alpha^k$ 的最小值. 它的最优解就是射线与$\left\{x\in\mathrm{R}^n \mid Ax\geqslant b,\ x\geqslant 0\right\}$边界的交点. 这可以用二分法(binary search)求解.

根据引理 1, 求解

$$\begin{aligned}&\min\ c^{\mathrm{T}}x(t, q),\\ &t\in[t_1, t_2],\\ &\max\ q\\ &\text{s.t.}\quad x^k+t\beta+q\alpha^k\in P,\end{aligned}$$

最好的算法是黄金分割法[6](0.618 法[7]).

引理 **2** 若

$$\begin{aligned}&\max\ q\\ &\text{s.t.}\quad x^k+t\beta+q\alpha^k\in P\end{aligned}$$

无界, 则

$$\begin{aligned}&\min\ c^{T}x\\ &\text{s.t.}\quad x\in P\end{aligned}$$

无界.

二分法和黄金分割法都是非常简单、初等的优化算法, 但在使用时还有一些技巧要注意:

(i)对于固定的 t, 用二分法判断 $x^t+t\beta+q\alpha^k$ 是否属于 P, 只需检查 $Ax\geqslant b$, $x\geqslant 0$ 中的一部分不等式即可.

(ii)$t\in[t_1, t_2]$, 用黄金分割法(0.618 法)时, 还可用一次做多个探索的技巧.

(iii)由于 α^k 不一定与 $L(x^k)$正交和最优解可能在$[t_1, t_2]$端点达到, 所以, 可加某种判断后, 扩大$[t_1, t_2]$的区间, 以求更好的解.

核心算法可以编成标准软件, 这是一个非常有效的算法, 这样 x^{k+1}很容易被确定.

3　基准线的确定

可以如下确定基准线:

假如已有 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 个可行解, 记由 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 生成的最小凸包为 S_k, $S_k=\left\{x\in \mathrm{R}^n \mid x=\sum_{i=1}^{k}\mu_i x^i, \sum_{i=1}^{k}\mu_i=1, \mu_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,k\right\}$.

记 S_k 的中心为 x^{k*}, $x^{k*}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x^i$, x^{k*} 到 Z_k 的距离 $d_{x^{k*}}=\frac{c^{\mathrm{T}}x^{k*}-c^{\mathrm{T}}x^k}{\|c\|}$, 那么,

$$\beta=x^k-x^{k*}+\left(\frac{d_{x^{k*}}}{\|c\|}\right)c \tag{3.1}$$

就是所求基准线的方向, 基准线为

$$l(x^k)=x^k+t\beta,\ t_1\leqslant t\leqslant t_2. \tag{3.2}$$

可以从 x^k 出发, 沿 β 和 $-\beta$ 方向用二分法确定 t_1, t_2.

这种确定基准线既充分利用了已有可行解的信息, 同时由已有可行解生成的凸包的中心, 在 Z_k 上投影向量 β 作为基准线方向, 在仅有这些可行解的信息基础上, 是最适中、恰当的选择, 而且这种确定方法简单明了.

4　切割面 Π_k 和好方向 α_k 的选择

在新算法中, 切割面 Π_k 上的求优是其核心算法, 由于抓住了在切割面上求优的特殊本质, 提出了一种模型与算法一体化的特殊算法. 在这种特殊算法中 α^k 起了重要的作用. 在那里切割面仅是形式上存在的几何直观, 真正起作用的是其上的 α^k. 可以视切割面是由从基准线上每个点沿 α^k 方向射出的射线组成的. 这样, 在基准线和核心算法确定之后, 新算法好坏的关键在于选择好可行的好方向 α^k.

由于新算法是在已有若干可行解 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 的基础上进行, 首先确定基准线, 然后选择好方向 α^k. α^k 的选择可以在原来好的算法基础上进行, LP 的 3 种主要算法及其变形算法中有 2 种给出了迭代的方向, 直接取原算法的迭代方向为好方向 α^k 或稍加变化即可.

(i)在 Karmarkar 算法中, 若已得可行解 $x^1, x^2, \cdots, x^k$, 下一步迭代方向 $d^k=-[I-B_k^{\mathrm{T}}(B_kB_k^{\mathrm{T}})^{-1}B_k]X_kc$, 在新算法中, 可取 $\alpha^k=d^k$.

新算法求 x^{k+1}利用了在切割面 Π_k 上的核心算法. 而 Karmarkar 算法, 仅沿 α^k 取一定的步长来定 x^{k+1}. 显然, 新算法的 x^{k+1}比 Karmarkar 算法的 x^{k+1}好. 也就是说, 可以用新算法来加速 Karmarkar 算法.

（ⅱ）仿射尺度法[4] 也可以用以上类似的方法来加速.

（ⅲ）单纯形算法也可以用两个相邻顶点确定的方向作为 α^k 的方向，但迭代要稍加变化.

（ⅳ）有些椭球算法在得到可行解 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 后也可以用本文的新算法来加速，但它必须有另一种结构来选择 α^k（中心法）.

以上这些加速算法，将分别另文讨论.

（ⅴ）下面介绍一种直观简单的选择 α^k 的方法——中心法.

中心法的几何背景：观察任何一种求解 LP 的好算法的迭代过程（Khachian 椭球法除外），每次迭代都产生一个好的可行解 x^k，如果注意所有 $x^1, x^2, \cdots, x^k, \cdots$，并注意到由前 k 个 x^k 生成的凸包 S_k，$S_k=\left\{x \in \mathrm{R}^n \mid x=\sum_{i=1}^{k} \mu_i x^i, \sum_{i=1}^{k} \mu_i=1,\ \mu_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k\right\}$，$P \supset S_{k+1} \supset S_k, k=1, 2, \cdots$，这串凸包 $\{S_k\}$ 仅是 P 的一些子集，而且这些子集的中心 x^{k*} 组成的向量串 $\{x^{k*}\}$ 集中反映整个迭代在可行解 P 的内部趋向过程. 显然，倒数的 x^k 组成的凸包串也含重要的优化信息. 如果取 $\{x^k\}$ 的最后 $[k/2]$ 个解生成凸包，以它的中心 x^{k**} 与 x^{k*} 构造（当 $k>n$ 时）

$$\alpha^k = x^{k**} - x^{k*} = \frac{1}{k-[k/2]} \sum_{i=[k/2]}^{k} x_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x^i. \tag{4.1}$$

由于 x^{k*} 与 x^{k**} 都在凸包的最适中的内部，它们的联线决定的方向必是优的好方向，显然，这样选择的 α^k 是好方向，因为 $c^{\mathrm{T}}\alpha^k < 0$.

中心法标准模型取约束等式型. 单纯形算法标准型、Karmarkar 算法标准型和仿射算法标准型，也都是约束等式型. 本文开始讨论时取的模型是 LP 一般式，那是为了研究的算法更具一般性. 在等式型的情形，α_k 不仅是好方向，而且是可行方向，即 $A\alpha^k=0$.

在这些前提下，有如下的引理：

引理 3 若 P 与 S_k 的维数相同，取以上定义的 x^{k*}，x^{k**} 构造的 α^k，$\alpha^k = x^{k**} - x^{k*}$，且 $c^{\mathrm{T}} x^{k+1} \geqslant c^{\mathrm{T}} x^k$，则 $Z(x^k)$ 是 P 的支撑超平面，x^k 为最优解.

证 用反证法即得.

注 新算法的推进过程，在每个基准面上一般是提供一对点的信息 $(x^i(1), x^i(2))$，$i=1, 2, \cdots$，它们对应于 $l(x^i)$ 的两个端点，x^i 的信息已含在其中. 因此，整个推进过程是

$$x^1(1), x^1(2);\ x^2(1), x^2(2);\ \cdots;\ x^k(1), x^k(2);\ \cdots,$$

这串信息对新算法 α^k 的选择更为有用. 它用成对解表达更好些：

$$\alpha^k = \frac{1}{2(k-[k/2])} \sum_{i=[k/2]}^{k} (x^i(1) + x^i(2)) - \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{k} (x^i(1) + x^i(2)). \tag{4.2}$$

（ⅵ）加速单纯型算法、Karmarkar 算法和仿射尺度算法，除了可以直接采用它们自身的迭代方向外，还可以采用中心法的方向，或在采用迭代方向作为 α^k 方向的进行过程中，从某时刻起改用中心法.

考虑的中心法主要是想在单纯形算法基础上进行开发，由单纯形算法得初始的 x^i，$1 \leqslant i \leqslant k$，新算法启动. 然后，新算法与单纯形算法可并行运行. 单纯形算法若得最优解，整体停止；否则，得可行解基础解，提供给新算法，丰富新算法的 $\{x^k\}$ 序列，扩展 S_k 凸包，使新算法获得更多信息，因此推进更快.

5　新算法的启动与停止

新算法的启动一般采用 LP 求初始解的最基本算法大 M 法或二阶段法，如果启动算法结果无解，则停止．只有当启动算法得出有可行解的结论时，推进算法才开始．

新算法的停止规则：

（i）如果新算法的 α^k 是利用 Karmarkar 算法和仿射尺度法的 d^k，或由单纯形法的相邻顶点决定的方向，可利用相关算法的停止规则，这时新算法是用来加速相关算法的．

（ii）如果新算法 α^k 由中心法决定，那么停止规则是引理 3．

6　计算复杂性

本文提出的求解 LP 的新思想，可以引发各种不同的新算法，本文给出的新算法除中心法外，其他的选择 α^k 都基于原有的 LP 算法的迭代方向，如 Karmarkar 算法、仿射尺度法、单纯形算法等，通过很小附加计算量，新算法都加速了原有的 LP 好算法，它的计算复杂性至少不会比原来的坏．

中心法、加速后的仿射尺度法和单纯形算法是否是多项式算法，有待于进一步研究．但是从数学直觉上看，它们是好算法．特别是中心法，决定 α^k 方法非常简单，整个算法的计算量仅为判定某个点是否属于 P，这里没有矩阵求逆的计算量，算法从一基准面 $Z(x^k)$推进到另一基准面$Z(x^{k+1})$，其核心算法所用的基本算法：二分法和黄金分割法（0.618 法）都不需要精确的结果，控制到一定精度或便于比较即可，目的在于产生好的 x^{k+1}．另外，它没有 Karmarkar 算法和单纯形算法中大矩阵求逆的计算量，也没有单纯形法和 Khachian 算法矩阵迭代的累积误差．黄金分割法还可以采用多点探索法（并行计算）．

7　讨论

一旦新算法启动，无论它是基于 LP 原算法中的哪一种算法，α^k 的选择都有两种，一种是原算法的迭代方向；另一种是中心法确定的方向．

按原算法迭代方向确定 α^k 便形成新 Karmarkar 算法、新仿射尺度算法和新单纯形算法．

按中心法确定 α^k 则统称中心法．在中心法推进过程中，若 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 都在过 x^k 且与 $Z(x^k)$正交的超平面上，则称之为退化现象．

退化现象的出现可能导致下层次推进不能进行，而此时的 $Z(x^k)$不是 P 的支撑超平面．在这种情形可以采用更动目标函数[5] 的方法，只要摄动一下目标函数，即摄动一下基准面 $Z(x^k)$即可（另文讨论）．

参　考　文　献

1　Dantzig G B. Linear Programming and Extensions. Princeton: Princeton University Press, 1963
2　Khachian L G. A polynomial algorithm in linear programming. Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20: 191～194
3　Karmarkar N. A new polynomial time algorithm for linear programming. Combinatorica, 1984, 4: 373～395
4　Fang S C, Puthenpura S. Linear Optimazation and Extensions, Theory and Algorithms. New Jersey: Prentice Hall, Inc, 1993
5　杨德庄．灵活的运筹学和应用数学．中国科学，A 辑，1995，25(2)：136～146
6　Hua Loo-Keng, Wang Yuan. Popularizing Mathematical Methods in the People's Republic of China. Boston: Birkhäuser, 1989
7　华罗庚．优选学．北京：科学出版社，1984