



论 文

一类控制量非负的新型脉冲随机控制模型

刘晓鹏^{①*}, 刘坤会^②

① 中国科学院应用数学研究所, 北京 100080

② 北京交通大学理学院, 北京 100044

* 通信作者. E-mail: lkhww@263.net

收稿日期: 2008-01-30; 接受日期: 2010-05-18

国家自然科学基金 (批准号: 19671004) 资助项目

摘要 提出并研究了一类新型的脉冲随机控制模型, 其状态结构由关于半鞅的线性随机微分方程所确定, 其控制费用函数为关于控制前状态与控制量的二元函数且其控制量保持非负. 首先建立了一类新型的变分方程并证明了其解的存在性. 通过对变分方程的解函数进行一系列随机分析处理, 证明了最佳控制的存在性且对其结构进行了深入分析. 此外, 由于本文模型与以往文献中的随机控制模型有着重大差异, 因而在分析手法上与以往文献相比颇多差异之处. 可以预期, 本文不仅在随机控制的研究中将具有重要的理论意义, 而且在金融控制及证券管理方面也将有着广泛的应用价值.

关键词 脉冲随机控制 控制量 变分方程 最佳控制 半鞅

1 引言

在随机控制问题的研究中, 奇异型随机控制模型^[1–8]及脉冲控制模型^[9–19]无疑是最重要的两大类型, 而脉冲控制模型的研究更早些. 2006 年, 国际学术界提出了一类关于几何布朗运动的随机控制模型, 这是一类费用结构与以往不同的脉冲控制模型, 它在金融控制及投资管理中有着广泛的应用背景和重要的理论意义^[13]. 最近, 作者在文献 [20] 中提出并研究了另一类重要的折扣型脉冲随机控制模型, 它在很大程度上实质性地推广了文献 [13] 中模型的费用结构及状态结构. 本文则提出了一类控制量非负的新型脉冲随机控制模型, 它不同于其他类型的脉冲随机控制模型但却与文献 [20] 中的模型形成一种互补的关系. 本文用建立适当变分方程及随机分析的手法证明了新模型存在最佳控制且对其进行了刻画, 其处理手法与其他类型的脉冲随机控制模型也有很大不同.

下面介绍一下本文提出的模型. 首先有一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\{\mathcal{F}_t\}, t \geq 0$ 为一个上升的 $\mathcal{F}$ 的子 σ -域族且满足通常条件. $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_i \leq \dots$ 为一列非降的 $\mathcal{F}_t$ -停时且 $i \rightarrow \infty$ 时 $\tau_i \rightarrow \infty$, a.s. 又 $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ 为一列与之相应的 (实) 随机变量且 $\forall i \geq 1, \xi_i \in \mathcal{F}_{\tau_i}$, 其中 $\mathcal{F}_{\tau_i}$ 表示 τ_i 前事件 σ -域. 以 v 表示上述这样一个对列: $v = \{(\tau_i, \xi_i), i = 1, 2, \dots\}$, 则 v 称为一个脉冲随机控制. 所有脉冲控制的集合以 V 表之.

对于初值 x 及 $v = \{(\tau_i, \xi_i), i = 1, 2, \dots\} \in V$, 新模型与之相应的状态过程 $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 为由线性随机微分方程

$$X_t = x + \int_0^t \mu X_s dA_s + \int_0^t \sigma X_s dM_s + \sum_{\tau_i \leq t} \xi_i, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

所确定的唯一的右连左极 $\mathcal{F}_t^-$ 适应过程, 其中 μ 与 σ 皆为实常数, 又 M 为一个 0 初值 $\mathcal{F}_t^-$ 连续局部鞅, A 为与 M 对应的唯一的 0 初值 $\mathcal{F}_t^-$ 适应连续非降过程使得 $M^2 - A$ 为 0 初值 $\mathcal{F}_t^-$ 局部鞅 (当 M 为标准 Wiener 过程时相应的 $A_t = t, \forall t \geq 0$), 按通常的表示法, 即有 $A = \langle M, M \rangle$. 本文要求 $t \rightarrow \infty$ 时 $A_t \rightarrow \infty$, a.s.

与文献 [13,20] 中相同, 本文仍要求状态初值 x 为正数. 但对脉冲控制的要求恰与文献 [13,20] 相反, 设 $v = \{(\tau_i, \xi_i), i = 1, 2, \dots\} \in V$, 则本文模型对脉冲控制中控制量的要求为

$$\xi_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

设初值 $x > 0$, 脉冲控制 $v = \{(\tau_i, \xi_i), i = 1, 2, \dots\}$ 满足 (2) 式而 X 由 (1) 式确定, 则由指数公式 (参阅文献 [21] 中第 5 章) 可知 $X_t = (x + \sum_{\tau_i \leq t} \frac{\xi_i}{U_{\tau_i}})U_t, t \geq 0$, 其中 $U_t = \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)A_t + \sigma M_t\}$, 故知状态 X 将自然保持取正值. 本文模型中与 v 相应的费用结构可用 (3) 式来表达 (其中当 $\tau_i = \infty$ 时约定 $e^{-\alpha A_{\tau_i}} B(X_{\tau_i-}, \xi_i) = 0$):

$$J_v(x) = E \left[\int_0^\infty e^{-\alpha A_t} h(X_t) dA_t + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha A_{\tau_i}} B(X_{\tau_i-}, \xi_i) \right], \quad (3)$$

其中 α 为折扣因子, 它为正常数, $h(\cdot)$ 为保留费率函数, $B(\cdot, \cdot)$ 为控制费用函数. 由 (3) 式可知本文提出的模型与文献 [13,20] 中的模型相似, 仍保持了控制费用函数二元性这一重要特征. 和文献 [13,20] 中一样, 在 (3) 式中若 $\tau_1 = 0$ 则约定 $X_{\tau_1-} = x$ 且 $X_{\tau_1} = x + \xi_1$, 又若 $i > 1$ 且 $\tau_i = \tau_{i-1} < \infty$ 时约定 $X_{\tau_i-} = X_{\tau_{i-1}}$ 且 $X_{\tau_i} = X_{\tau_{i-1}} + \xi_i$.

此外, 本文放宽了文献 [13,20] 对状态方程中系数 μ, σ 的严格限制, 只要求

$$\sigma \neq 0. \quad (4)$$

当条件 (4) 成立时, 易知方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \lambda^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda - \alpha = 0 \quad (5)$$

有二根 $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}} > 0, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}} < 0$.

本文大大放宽了文献 [13] 中要求 $h(\cdot)$ 及 $B(\cdot, \cdot)$ 为二次函数的严格限制. 要求 $h(\cdot)$ 为 $(0, \infty)$ 上的非负连续函数且假定存在常数 $\lambda'_1, \lambda'_2: -\infty < \lambda'_1 < \lambda_1, \lambda_2 < \lambda'_2 < \infty$ 使得

$$\limsup_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{x^{\lambda'_2}} < \infty, \quad \limsup_{x \uparrow \infty} \frac{h(x)}{x^{\lambda'_1}} < \infty. \quad (6)$$

本文要求 $B(\cdot, \cdot)$ 为定义在 (x, ξ) 平面上区域 $\tilde{R} \triangleq \{(x, \xi): 0 < x < \infty, 0 \leq \xi < \infty\}$ 中的非负连续函数. 在某些情况下还进一步要求 $\limsup_{x \uparrow \infty} h(x) < \infty$ 或

$$\lim_{x \uparrow \infty} h(x) = 0; \quad \beta \triangleq \inf_{(x, \xi) \in \tilde{R}} B(x, \xi) > 0 \quad (7)$$

且 $\forall x > 0$, 存在正常数 δ_x, M_x 及 k_x 且 $\delta_x \in (0, x)$, 使得

$$\frac{B(x', \xi'') - B(x', \xi')}{\xi'' - \xi'} > k_x \frac{1}{\xi''}, \quad \forall x', \xi', \xi'': x' \in (x - \delta_x, x + \delta_x), \infty > \xi'' > \xi' > M_x. \quad (8)$$

以 $\tilde{V}$ 表示 V 中所有的控制量非负的脉冲随机控制的全体, 它为 V 的一个真子集. 本文的目的是对每个状态初值 $x > 0$, 求 $v^* \in \tilde{V}$ 使得

$$J_{v^*}(x) = \inf_{v \in \tilde{V}} J_v(x). \quad (9)$$

v^* 称为本文模型初值为 x 时的最佳控制.

此外, 为了和右连左极符号系统相一致及推证中的方便, 此后本文将 (1) 及 (3) 式改写为等价的

$$X_t = x + \int_0^t \mu X_{s-} dA_s + \int_0^t \sigma X_{s-} dM_s + \sum_{\tau_i \leq t} \xi_i, \quad t \geq 0 \quad (1')$$

及

$$J_v(x) = E \left[\int_0^\infty e^{-\alpha A_t} h(X_{t-}) dA_t + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha A_{\tau_i}} B(X_{\tau_i-}, \xi_i) \right]. \quad (3')$$

(1) 与 (1') 式的等价性及 (3) 与 (3') 式的等价性皆不难由过程 $\nu_t = x + \sum_{\tau_i \leq t} \xi_i, t \geq 0$ 的间断点最多有可列个这一事实推知. 又 (3') 式中亦约定 $\tau_i = \infty$ 时 $e^{-\alpha A_{\tau_i}} B(X_{\tau_i-}, \xi_i) = 0$.

在第 2 节中, 我们将给出证明退化最佳控制存在的定理 1 和证明非退化最佳控制存在的定理 3, 4. 此外, 我们还将证明一些相应的预备引理及辅助定理.

2 主要结论及证明

引理 1 设 $h(x)$ 为 $(0, \infty)$ 上的非负连续函数且 (4), (6) 式成立, 则函数

$$y^*(x) = \frac{2}{\sigma^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[x^{\lambda_2} \int_0^x \frac{h(u)}{u^{\lambda_2+1}} du + x^{\lambda_1} \int_x^\infty \frac{h(u)}{u^{\lambda_1+1}} du \right]$$

在 $(0, \infty)$ 上有意义且二次连续可导, 式中 λ_1, λ_2 为方程 (5) 之正负二根. 又 $\forall A \in \mathbb{R}$, 函数 $y_A(x) = y^*(x) - Ax^{\lambda_2}, x \in (0, \infty)$ 皆为二阶微分方程

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 y''(x) + \mu x y'(x) + h(x) - \alpha y(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (10)$$

之一经典解. 上式中函数 $h(x)$ 为费用结构 (3') 式中的保留费率函数, $\alpha = \text{constant} > 0$ 为折扣因子.

证明 首先由 (4) 式及 $\alpha > 0$ 推知方程 (5) 有正负二根 λ_1 及 λ_2 , 再由 (6) 式及 $h(\cdot)$ 在 $(0, \infty)$ 上的连续非负性可知 $\forall x \in (0, \infty)$, 积分 $\int_0^x \frac{h(u)}{u^{\lambda_2+1}} du$ 与 $\int_x^\infty \frac{h(u)}{u^{\lambda_1+1}} du$ 有意义, 这样可知 $y^*(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上有意义. 再仿文献 [20] 中引理 1 之分析可证本引理结论.

引理 2 条件同引理 1, $A > 0$ 且 $y_A(x)$ 如引理 1 所定义. 令 $C_A = \inf\{x > 0 : y'_A(x) \leq 0\}$, 其中当 $\{\} = \phi$ 时约定 $C_A = \infty$. 则 $\forall A > 0$ 皆有 $0 < C_A \leq \infty$ 且 $x \in (0, C_A)$ 时 $y'_A(x) > 0$. 若 $C_A < \infty$ 还有 $y'_A(C_A) = 0$. 又 C_A 在 $(0, \infty)$ 上单调非降.

证明 由 $y_A(x)$ 的定义, 可知 $\forall x \in (0, \infty)$, $y'_A(x) = y^{*'}(x) - A\lambda_2 x^{\lambda_2-1}$. 由引理 1, 可知 $y'_A(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续. 再由 (6) 式中的条件 $\limsup_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{x^{\lambda_2}} < \infty$ 及 $y^{*'}(x)$ 的结构式可推知存在正常数 x_0 及 C 使得 $y^{*'}(x) > -Cx^{\lambda_2-1}, \forall x \in (0, x_0]$.

由上式及 $\lambda_2' > \lambda_2$ 可知 $\forall A > 0$ 存在 $M = \text{constant} > 0$ 使得 $y'_A(x) = y^{*'}(x) - A\lambda_2 x^{\lambda_2-1} > 0, \forall x \in (0, M]$. 由此及 C_A 定义推知 $\forall A > 0$ 皆有 $0 < C_A \leq \infty$, 又 $x \in (0, C_A)$ 时由 C_A 的定义可知 $y'_A(x) > 0$. 引理其他结论易知.

引理 3 设 $B(x, \xi)$ 为 $\tilde{R}$ 上的非负连续函数且引理 1 的条件成立, 定义函数

$$N(A) = \inf_{(x, \xi) \in \tilde{R}} [B(x, \xi) + y_A(x + \xi) - y_A(x)], \quad A \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

则 $N(A)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上的单调非降函数. 进一步若再假定 $\limsup_{x \uparrow \infty} h(x) < \infty$, 则 $\forall A > 0$ 若 $N(A) \geq 0$, 那么 $\forall x > 0$ 皆有

$$y_A(x) \leq J_v(x), \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (12)$$

(11) 式中函数 $B(x, \xi)$ 表示 (3') 式中的控制费用函数且 $\tilde{R}$ 同 (7) 式前之定义, $y_A(x)$ 由引理 1 所定义, 而 $J_v(x)$ 由 (3') 式给出.

证明 注意 $\forall (x, \xi) \in \tilde{R}$ 皆有 $0 < x \leq x + \xi < \infty$, 若 $-\infty < A < A' < \infty$, 则由引理 2 证明中第 2 式可知

$$\begin{aligned} & [B(x, \xi) + y_{A'}(x + \xi) - y_{A'}(x)] - [B(x, \xi) + y_A(x + \xi) - y_A(x)] \\ &= \int_x^{x+\xi} [y'_{A'}(u) - y'_A(u)] du = -(A' - A) \lambda_2 \int_x^{x+\xi} u^{\lambda_2-1} du \geq 0. \end{aligned}$$

由上式又可推知 $-\infty < A < A' < \infty$ 时 $N(A) \leq N(A')$, 此即 $N(A)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的单调非降性. 再由 Ito 公式 (参阅文献 [21] 中第 2 章或文献 [22] 中第 8 章) 可以证明在本引理所述条件下 (12) 式成立 (参阅文献 [20] 中引理 3 的证明).

定理 1 设 $B(x, \xi)$ 为 $\tilde{R}$ 上的非负连续函数且引理 1 的条件成立, 又 $\limsup_{x \uparrow \infty} h(x) < \infty$. $N(A)$ 为由 (11) 式所定义的 $(-\infty, \infty)$ 上的单调非降函数, 令

$$N = \lim_{A \downarrow 0} N(A). \quad (13)$$

若 $N \geq 0$, 则本文定义的模型有“退化的”最佳控制 v^* , 即不对状态进行干预的控制方式 (或者说, v^* 中的 $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \infty$) 可以视为模型的一个最佳控制, 且 $y^*(x)$ 可视为值函数, 即 $J_{v^*}(x) = y^*(x) = \inf_{v \in \tilde{V}} J_v(x), \forall x > 0$. 其中 $y^*(x)$ 由引理 1 所定义.

证明 仿文献 [20] 中定理 1 之证明.

注 1 定理 1 中的条件 $N \geq 0$ 实际上等价于

$$B(x, \xi) + y^*(x + \xi) - y^*(x) \geq 0, \quad \forall (x, \xi) \in \tilde{R}. \quad (14)$$

定理 1 的结论表明, 当 (14) 式成立时退化控制可视为模型的一个最佳控制. 与条件 $N \geq 0$ 对立的条件为 $N < 0$, 它显然等价于存在 $(x, \xi) \in \tilde{R}$, 使得

$$B(x, \xi) + y^*(x + \xi) - y^*(x) < 0. \quad (15)$$

下面我们讨论 $N < 0$ (或存在 $(x, \xi) \in \tilde{R}$ 使 (15) 式成立) 时模型最佳控制的存在性问题. 为了讨论方便我们需要用比定理 1 更强一些的条件. 先在很一般的条件下讨论一下本文变分方程中有关的扩散方程解函数的性质, 这种讨论不但是有意义的而且还是必要的.

引理 4 设 μ, σ 及 α 皆为实常数且 $\sigma \neq 0, \alpha > 0$, 又 $h(x)$ 为 $(0, \infty)$ 上的非负连续函数, 若 $y(x)$ 为 $(0, \infty)$ 上的二次连续可导实函数且满足引理 1 中方程 (10), 那么必有

1) 若 $x_0 \in (0, \infty), y(x_0) < 0$ 且存在 $x' > x_0$ 使得 $y(x') \geq 0$, 则 $\forall x \in (0, x_0]$ 成立 $y'(x) > 0$. 若 $x_0 \in (0, \infty), y(x_0) < 0$ 且存在 $x' \in (0, x_0)$ 使得 $y(x') \geq 0$, 则 $\forall x \in [x_0, \infty)$ 成立 $y'(x) < 0$. 若 $x_0 \in (0, \infty), y(x_0) < 0$ 且 $\limsup_{x \uparrow \infty} y(x) \geq 0$, 则 $\forall x \in (0, x_0]$ 成立 $y'(x) > 0$.

2) 若 $x_0 \in (0, \infty), y(x_0) = 0$ 且存在 $x' > x_0$ 使得 $y(x') \geq 0$, 则 $\forall x \in (0, x_0]$ 成立 $y'(x) \geq 0$. 若 $x_0 \in (0, \infty), y(x_0) = 0$ 且存在 $x' \in (0, x_0)$ 使得 $y(x') \geq 0$, 则 $\forall x \in [x_0, \infty)$ 成立 $y'(x) \leq 0$. 若 $x_0 \in (0, \infty), y(x_0) = 0$ 且 $\limsup_{x \uparrow \infty} y(x) \geq 0$, 则 $\forall x \in (0, x_0]$ 成立 $y'(x) \geq 0$.

3) 若 $x_0 \in (0, \infty)$ 且 $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, 则: $x > x_0$ 时 $y'(x) \leq 0$ 且若有 $x' > x_0$ 使得 $y'(x') < 0$, 那么 $\forall x > x'$ 皆有 $y'(x) < 0$. $x < x_0$ 时 $y'(x) \geq 0$ 且若有 $x' \in (0, x_0)$ 使得 $y'(x') > 0$, 那么 $\forall x \in (0, x')$ 皆有 $y'(x) > 0$.

证明 只须证 1) 和 2) 之第 3 个结论, 其余结论的证明见文献 [20] 中引理 4.

先证 1) 中第 3 个结论. 首先由方程 (10), 可以推知

$$[x^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} y'(x)]' = x^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \frac{2}{\sigma^2 x^2} [\alpha y(x) - h(x)], \quad x \in (0, \infty). \quad (16)$$

设 $x_0 \in (0, \infty)$ 且 $y(x_0) < 0$. 再设 $\limsup_{x \uparrow \infty} y(x) \geq 0$. 首先若存在 $x' > x_0$ 使得 $y(x') \geq 0$, 则由 1) 中第 1 个结论可以推知

$$y'(x) > 0, \quad \forall x \in (0, x_0]. \quad (17)$$

又若假定 $\forall x \in [x_0, \infty)$ 皆有 $y(x) < 0$, 则由 (16) 式可以推知函数 $x^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} y'(x)$ 在 $[x_0, \infty)$ 上严格减. 首先若 $x^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} y'(x)$ 在 (x_0, ∞) 上皆取负值, 则此时 $y'(x)$ 在 (x_0, ∞) 上皆取负值, 这将导致

$$\limsup_{x \uparrow \infty} y(x) < y(x_0) < 0,$$

故知这种情况不可能发生. 由此可知 $x^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} y'(x)$ 在 (x_0, ∞) 可以取到非负值, 由该函数在 $[x_0, \infty)$ 上的严格减性质可知必有 $x_0^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} y'(x_0) > 0$, 由此又推知 $y'(x_0) > 0$. 下面再证

$$y(x) < 0, \quad \forall x \in (0, x_0]. \quad (18)$$

实际上, 如若不然, 设 $y(x)$ 在 $(0, x_0]$ 上可以取到非负值, 令 $\tilde{x} = \sup\{x < x_0 : y(x) \geq 0\}$, 则可知 $0 < \tilde{x} < x_0$ 且 $\forall x \in (\tilde{x}, x_0]$ 皆有 $y(x) < 0$, 再由 $\tilde{x}$ 的定义及 $y(x)$ 的连续性又可知 $y(\tilde{x}) = 0$. 由此又可推知 $y'(\tilde{x}) \leq 0$. 但因 $y(x)$ 在 $(\tilde{x}, x_0]$ 中取负值, 则由 (16) 式又可推知必有 $y'(x_0) < 0$, 此与前述 $y'(x_0) > 0$ 矛盾, 故不可. 这样证出了 (18) 式成立. 由 (16) 及 (18) 式又可知函数 $x^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} y'(x)$ 在 $(0, x_0]$ 中严格减, 由 $y'(x_0) > 0$ 我们又推知 (17) 式成立. 即 1) 中第 3 个结论成立.

再证 2) 中的第 3 个结论. 首先设 $x_0 \in (0, \infty)$ 且 $y(x_0) = 0$. 又 λ_1, λ_2 为方程 (5) 之正负二根. 则仿引理 1 之分析可知 $\forall A_1 \in \mathbb{R}, A_2 \in \mathbb{R}, y(x) + A_1 x^{\lambda_1} + A_2 x^{\lambda_2}$ 亦满足方程 (10). 再设 $\limsup_{x \uparrow \infty} y(x) \geq 0$. 注意 $\forall A > 0, y(x) - Ax^{\lambda_2}$ 满足方程 (10) 且 $y(x_0) - Ax_0^{\lambda_2} < 0$, 又亦有 $\limsup_{x \uparrow \infty} [y(x) - Ax^{\lambda_2}] = \limsup_{x \uparrow \infty} y(x) \geq 0$, 由以上事实及 1) 中的第 3 个结论可以推知 $\forall A > 0$ 有 $y'(x) - A\lambda_2 x^{\lambda_2-1} > 0, \forall x \in (0, x_0]$. 令 $A \downarrow 0$, 由前式即推知 2) 中第 3 个结论亦成立. 引理得证.

引理 5 设引理 1 的条件成立, $A > 0$ 且 $y_A(x)$ 由引理 1 所定义, 又 C_A 的定义同引理 2. 再令 $C'_A = \inf\{x > 0 : y_A(x) \geq 0\}$, 若式中 $\{\} = \phi$ 则令 $C'_A = \infty$. 则 C'_A 在 $(0, \infty)$ 上单调非降且当 $y_A(x), x \in (0, \infty)$ 的值域不含于 $(-\infty, 0]$ (即存在 $x \in (0, \infty)$ 使得 $y_A(x) > 0$) 时, 必有

$$0 < C'_A < C_A \leq \infty; \quad y_A(x) < 0, \quad x \in (0, C'_A); \quad y_A(C'_A) = 0; \quad y_A(x) > 0, \quad x \in (C'_A, \infty).$$

又 $y'_A(x)$ 在 $(0, C'_A]$ 中取正值因而 $y_A(x)$ 在 $(0, C'_A]$ 中严格增.

证明 注意 $\{y_A(x), A \in (0, \infty)\}$ 关于 A 为非增函数序集, 由此事实不难推知 C'_A 在 $(0, \infty)$ 上单调非降. 再设 $x_1 \in (0, \infty)$ 使得 $y_A(x_1) > 0$. 首先注意由引理 1 可知 $y_A(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上二次连续可导且满足方程 (10). 由 (6) 式及 C'_A 的定义可以推知 $0 < C'_A \leq x_1 < \infty$. 再由 $y_A(x)$ 的连续性 & C'_A 的定义可以推知

$$y_A(C'_A) = 0; \quad y_A(x) < 0, \quad x \in (0, C'_A). \quad (19)$$

注意 $\limsup_{x \uparrow \infty} y_A(x) = \limsup_{x \uparrow \infty} y^*(x) \geq 0$. 再由 (19) 式及引理 4 中 1) 之第 3 个结论, 可知

$$y'_A(x) > 0, \quad \forall x \in (0, C'_A). \quad (20)$$

由 (20) 式及引理 2 中 C_A 的定义可以推知 $C'_A \leq C_A$. 再证 $C'_A \neq C_A$. 若 $C_A = \infty$, 这一事实显然成立. 若 $C_A < \infty$ 且 $C'_A = C_A$, 则由引理 2 及 (19) 式可知有 $y_A(C'_A) = y'_A(C'_A) = 0$, 又由引理 4 中 3) 之第 1 个结论及 $\limsup_{x \uparrow \infty} y_A(x) \geq 0$ 可以推知 $x \in (C'_A, \infty)$ 时 $y'_A(x) = 0$ 从而又有 $y_A(x) = 0$, 由此结论再结合 (19) 式可知 $\forall x \in (0, \infty)$ 皆有 $y_A(x) \leq 0$, 这与 $y_A(x_1) > 0$ 之假定矛盾, 故不可. 由上面一段分析已证得

$$C'_A < C_A. \quad (21)$$

再由引理 4 又可证明 $y_A(x) > 0, \forall x \in (C'_A, \infty)$.

而由引理 2, $y'_A(x)$ 在 $(0, C_A)$ 中取正值, 故由 (21) 式中的 $C'_A < C_A$ 推知 $y'_A(x)$ 在 $(0, C'_A]$ 中取正值, 因此还推知 $y_A(x)$ 在 $(0, C'_A]$ 中严格增. 至此引理的所有结论都已得出. 证毕.

下面讨论本文起关键作用的变分方程问题. 变分方程在随机控制的研究中是一个有力的工具, 近期专门研究变分方程的文献有文献 [23–27] 等.

定理 2 设 $h(x)$ 为 $(0, \infty)$ 上的非负连续函数, $B(x, \xi)$ 为 $\tilde{R}$ 上的非负连续函数且 (4), (6), (7) 及 (8) 式成立, N 由 (13) 式给出. 若 $N < 0$ (或者等价地: 存在 $(x, \xi) \in \tilde{R}$ 使得 (15) 式成立), 则存在 $A^* \in (0, \infty)$ 使得 $N(A^*) = 0$, 其中 $N(A^*)$ 由 (11) 式定义. 再令 $y(x) = y_{A^*}(x), x \in (0, \infty)$ (此处 $y_{A^*}(x)$ 由引理 1 定义), 则 $y(x)$ 为 $(0, \infty)$ 上的二次连续可导函数且使得 (10) 式成立, $\lim_{x \uparrow \infty} y(x) = 0$, 同时还存在常数 $c, c' : 0 < c' < c < \infty$ 及常数 $\tilde{\beta}, \tilde{b} : c < \tilde{\beta} < \infty, c' < \tilde{b} < \tilde{\beta}$, 它们满足

$$y(x) < 0, \quad x \in (0, c'); \quad y(c') = 0; \quad y(x) > 0, \quad x \in (c', \infty); \quad y'(x) > 0, \quad x \in (0, c); \quad (22)$$

$$B(\tilde{b}, \tilde{\beta} - \tilde{b}) + y(\tilde{\beta}) - y(\tilde{b}) = \inf_{(x, \xi) \in \tilde{R}} [B(x, \xi) + y(x + \xi) - y(x)] = 0. \quad (23)$$

此外, 若本定理的条件皆成立且 $N < 0$, 则满足 $N(A) = 0$ 的实数 A 是唯一的.

证明 设定理条件成立, 又 $N(A), A \in \mathbb{R}$ 由 (11) 式所定义, 可以证明存在一个 $A' \in (0, \infty)$, 使得

$$N(A) > 0, \quad \forall A \geq A'. \quad (24)$$

此外, 再由 $N < 0$ 及 $N(A)$ 的单调非降性, 又可推知有 $A'' \in (0, \infty)$ 使得

$$N(A) < 0, \quad \forall A \leq A''. \quad (25)$$

令 $A^* = \sup\{A > 0 : N(A) < 0\}$. 由 (24) 及 (25) 式可知 $0 < A'' \leq A^* \leq A' < \infty$. 令 $y(x) = y_{A^*}(x), \forall x \in (0, \infty)$. 首先由引理 1 可知 $y(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上二次连续可导且满足 (10) 式, 又由 (6) 及 (7) 式易推知 $\lim_{x \uparrow \infty} y(x) = \lim_{x \uparrow \infty} y_{A^*}(x) = 0$. 再证存在满足定理 2 要求的正常数 $\tilde{\beta}, \tilde{b}$ 使得 (23) 式成立.

首先由 A^* 的定义易知 $\forall (x, \xi) \in \tilde{R}$, 有

$$B(x, \xi) + y_{A^*}(x + \xi) - y_{A^*}(x) \geq 0. \quad (26)$$

再证存在常数 $\tilde{\beta}, \tilde{b} : 0 < \tilde{b} < \tilde{\beta} < \infty$ 使得

$$B(\tilde{b}, \tilde{\beta} - \tilde{b}) + y_{A^*}(\tilde{\beta}) - y_{A^*}(\tilde{b}) = 0. \quad (27)$$

为此在 $(0, \infty)$ 选一系列数 $A_n, n = 1, 2, \dots$ 使得 $0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n < \dots$ 且 $A_n \uparrow A^* (n \uparrow \infty)$. 由 A^* 的定义, 可知 $N(A_n) < 0, \forall n \geq 1$. 由此可知对每个 $n \in \mathbb{N}$, 可以取到 $\beta_n, b_n : 0 < b_n < \beta_n < \infty$ 使之满足

$$B(b_n, \beta_n - b_n) + y_{A_n}(\beta_n) - y_{A_n}(b_n) < 0. \quad (28)$$

综合 (6), (7) 式和引理 4 中 1), 2) 之第 3 结论并上式可以推知 $y_{A_n}(x), x \in (0, \infty)$ 的值域不可能含于 $(-\infty, 0]$ (否则 $\forall x \in [b_n, \beta_n]$ 将有 $y'_{A_n}(x) \geq 0$, 从而导致 (28) 式不能成立), 则由引理 5 存在常数 $C'_{A_n} \in (0, \infty)$ 使得

$$y_{A_n}(x) < 0, \quad x \in (0, C'_{A_n}); \quad y_{A_n}(C'_{A_n}) = 0; \quad y_{A_n}(x) > 0, \quad x \in (C'_{A_n}, \infty); \quad (29)$$

$$y'_{A_n}(x) > 0, \quad x \in (0, C'_{A_n}]. \quad (30)$$

再由 (28), (29), (30) 及 (7) 式中第 2 式可以推知实际上有

$$C'_{A_n} < b_n < \beta_n < \infty. \quad (31)$$

而由引理 5, C'_{A_n} 当 n 增大时单调非降, 故 $\forall n \geq 1, C'_{A_n} \geq C'_{A_1}$, 再由 (31) 式又可推知

$$\infty > \beta_n > b_n > C'_{A_1} = \text{constant} > 0, \quad \forall n \geq 1. \quad (32)$$

由 (32) 式可知能够选到 $\{(\beta_n, b_n), n \geq 1\}$ 的子列 $\{(\beta_{n_k}, b_{n_k}), k \geq 1\}$ 使得序列 $\{\beta_{n_k}, k \geq 1\}$ 及 $\{b_{n_k}, k \geq 1\}$ 皆收敛, 以 $\tilde{\beta}$ 及 $\tilde{b}$ 表示其相应的极限值 (当 $k \rightarrow \infty$ 时若 $b_{n_k} \rightarrow \infty$ 或 $\beta_{n_k} \rightarrow \infty$ 则 ∞ 亦视为相应的极限值), 则显然有

$$\infty \geq \tilde{\beta} \geq \tilde{b} \geq C'_{A_1} (> 0). \quad (33)$$

下面证明 $\tilde{\beta}$ 及 $\tilde{b}$ 满足 $\infty > \tilde{\beta} > \tilde{b} > 0$ 且 (27) 式成立.

首先由 (26), (28) 及 (32) 式可推知 $\lim_{k \rightarrow \infty} [B(b_{n_k}, \beta_{n_k} - b_{n_k}) + y_{A^*}(\beta_{n_k}) - y_{A^*}(b_{n_k})]$ 存在且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [B(b_{n_k}, \beta_{n_k} - b_{n_k}) + y_{A^*}(\beta_{n_k}) - y_{A^*}(b_{n_k})] = 0. \quad (34)$$

由 (33) 式已知 $\tilde{b} > 0$, 再由 (7) 及 (34) 式又可推知 $\tilde{\beta} > \tilde{b}$. 由此我们还可判断出 $\tilde{b}$ 必取有限正值.

下证 $\tilde{\beta} < \infty$. 用反证法, 设 $\tilde{\beta} = \infty$. 首先可以证明如下事实: 若 C 为某实常数, $\Phi(x), \phi(x)$ 皆为 $[C, \infty)$ 上的连续函数, 又 $\frac{\Phi(\xi'') - \Phi(\xi')}{\xi'' - \xi'} \geq \phi(\xi''), \forall \xi', \xi'' : C \leq \xi' < \xi'' < \infty$. 则 $\forall C_1, C_2 : C \leq C_1 < C_2 < \infty$, 有

$$\Phi(C_2) - \Phi(C_1) \geq \int_{C_1}^{C_2} \phi(x) dx. \quad (35)$$

再由 (8) 及 (35) 式, 我们可以选到一个正常数 $\tilde{M} > 2\tilde{b}$ 使之满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [B(b_{n_k}, \tilde{M} - b_{n_k}) + y_{A^*}(\tilde{M}) - y_{A^*}(b_{n_k})] = -\infty. \quad (36)$$

但由 (26) 式, 又可推知 $\liminf_{k \rightarrow \infty} [B(b_{n_k}, \widetilde{M} - b_{n_k}) + y_{A^*}(\widetilde{M}) - y_{A^*}(b_{n_k})] \geq 0$. 这样 (36) 式与上式产生矛盾, 故知原设不真, 即必有 $\widetilde{\beta} < \infty$.

至此我们已证明了 $0 < \widetilde{b} < \widetilde{\beta} < \infty$. 注意 $k \rightarrow \infty$ 时 $\beta_{n_k} \rightarrow \widetilde{\beta}$, $b_{n_k} \rightarrow \widetilde{b}$, 由 $y_{A^*}(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上的连续性、 $B(x, \xi)$ 在 $\widetilde{R}$ 上的连续性 (27) 式可知 (27) 式成立.

而由 (26), (27) 式可知 $N(A^*) = \inf_{(x, \xi) \in \widetilde{R}} [B(x, \xi) + y_{A^*}(x + \xi) - y_{A^*}(x)] = B(\widetilde{b}, \widetilde{\beta} - \widetilde{b}) + y_{A^*}(\widetilde{\beta}) - y_{A^*}(\widetilde{b}) = 0$. 即得 (23) 式.

再注意由 (27) 与 (7) 式中第 2 式, 我们可以推知 $y'_{A^*}(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上必能取到负值, 由此可以推知 $C_{A^*} < \infty$, 这里 C_{A^*} 由引理 2 定义. 再由 (27) 式与条件 (7) 之第 2 式及引理 4 中 1), 2) 之第 3 结论推知 $y_{A^*}(x)$ 在 $(0, \infty)$ 中必能取到正值, 则由引理 5 又可推知 $0 < C'_{A^*} < C_{A^*} < \infty$, 再结合引理 2 还可推知

$$y_{A^*}(x) < 0, \quad x \in (0, C'_{A^*}); \quad y_{A^*}(C'_{A^*}) = 0; \quad y_{A^*}(x) > 0, \quad x \in (C'_{A^*}, \infty); \quad y'_{A^*}(x) > 0, \quad x \in (0, C_{A^*}).$$

上式中 C'_{A^*} 由引理 5 定义. 再令 $c = C_{A^*}$, $c' = C'_{A^*}$, 证得 (22) 式成立且有 $0 < c' < c < \infty$.

再证 $c < \widetilde{\beta} < \infty$ 且 $c' < \widetilde{b} < \widetilde{\beta}$. 由前面已证结论, 只须再证 $\widetilde{\beta} > c$ 及 $\widetilde{b} > c'$. 实际上若 $\widetilde{\beta} \leq c$, 则由 (22) 式最后一式可知 $B(\widetilde{b}, \widetilde{\beta} - \widetilde{b}) + y(\widetilde{\beta}) - y(\widetilde{b}) = B(\widetilde{b}, \widetilde{\beta} - \widetilde{b}) + \int_{\widetilde{b}}^{\widetilde{\beta}} y'(x) dx > 0$, 此与 (23) 式矛盾, 故不可. 又若 $c' \geq \widetilde{b}$, 则由 $\widetilde{\beta} > c$ 知 $\widetilde{\beta} > c'$, 再由 (22) 式可以看到 $B(\widetilde{b}, \widetilde{\beta} - \widetilde{b}) + y(\widetilde{\beta}) - y(\widetilde{b}) \geq B(\widetilde{b}, \widetilde{\beta} - \widetilde{b}) + y(\widetilde{\beta}) > 0$, 亦不可. 这样就证明了 $c < \widetilde{\beta} < \infty$, $c' < \widetilde{b} < \widetilde{\beta}$.

最后证在本定理条件下若 $N < 0$, 则满足 $N(A) = 0$ 的实数 A 是唯一的. 只须证若 $\widetilde{A} \in \mathbb{R}$ 使得 $N(\widetilde{A}) = 0$, 则必有 $\widetilde{A} = A^*$. 首先注意 $A^* = \sup\{A > 0 : N(A) < 0\}$, 由 $N(A)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的单调非降性可知 $\forall A < A^*$ 有 $N(A) < 0$, 故知若 $N(\widetilde{A}) = 0$, 必有 $\widetilde{A} \geq A^*$.

再证若 $N(\widetilde{A}) = 0$, 则必有 $\widetilde{A} \leq A^*$. 用反证法, 设 $\widetilde{A} > A^*$. 由下确界的定义, 再仿 (31) 式之推证进行分析, 知可以取到数对列 $\{(\widetilde{\beta}_n, \widetilde{b}_n), n \geq 1\}$, 使得

$$B(\widetilde{b}_n, \widetilde{\beta}_n - \widetilde{b}_n) + y_{\widetilde{A}}(\widetilde{\beta}_n) - y_{\widetilde{A}}(\widetilde{b}_n) \longrightarrow \inf_{(x, \xi) \in \widetilde{R}} [B(x, \xi) + y_{\widetilde{A}}(x + \xi) - y_{\widetilde{A}}(x)] = N(\widetilde{A}) = 0,$$

且对每个 n 有 $\infty > \widetilde{\beta}_n > \widetilde{b}_n > C'_{\widetilde{A}}$, 其中 $C'_{\widetilde{A}} \in (0, \infty)$ 为引理 5 中所述之常数. 且由假定 (7) 式知 $\inf_{(x, \xi) \in \widetilde{R}} B(x, \xi) = \beta > 0$, 故还可以假定对每个 n 有 $y_{\widetilde{A}}(\widetilde{\beta}_n) - y_{\widetilde{A}}(\widetilde{b}_n) < -\frac{\beta}{2}$. 再由 (6) 及 (7) 式可知 $\lim_{x \uparrow \infty} y_{\widetilde{A}}(x) = 0$, 故知有正常数 $C > C'_{\widetilde{A}}$ 使得 $\forall x \in [C, \infty)$ 皆成立 $|y_{\widetilde{A}}(x)| < \frac{\beta}{8}$. 由此可知对 $[C, \infty)$ 中任意两数 x, x' , 皆有 $|y_{\widetilde{A}}(x) - y_{\widetilde{A}}(x')| < \frac{\beta}{4}$.

由 $y_{\widetilde{A}}(x)$ 的连续性, 知存在正常数 $\delta_1 \in (0, C - C'_{\widetilde{A}})$, 使得 $\forall x \in [C - \delta_1, C + \delta_1]$ 皆有 $|y_{\widetilde{A}}(x) - y_{\widetilde{A}}(C)| < \frac{\beta}{8}$, 故亦有 $|y_{\widetilde{A}}(x)| < \frac{\beta}{4}$. 由此又可推知若 $x < C, x' \geq C$ 且 $|y_{\widetilde{A}}(x) - y_{\widetilde{A}}(x')| > \frac{\beta}{2}$, 必有 $x < C - \delta_1$.

又因 $y_{\widetilde{A}}(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续, 故知它在 $[C'_{\widetilde{A}}, C]$ 上一致连续, 因而存在正常数 $\delta_2 \in (0, C - C'_{\widetilde{A}})$, 使得对 $[C'_{\widetilde{A}}, C]$ 中任意二数 x, x' 满足 $|x - x'| \leq \delta_2$, 必有 $|y_{\widetilde{A}}(x) - y_{\widetilde{A}}(x')| < \frac{\beta}{2}$.

由以上分析, 可知对每个 n , 要么 $\widetilde{\beta}_n \geq C, \widetilde{b}_n \in (C'_{\widetilde{A}}, C - \delta_1)$, 要么 $C > \widetilde{\beta}_n > \widetilde{\beta}_n - \delta_2 > \widetilde{b}_n > C'_{\widetilde{A}}$.

另一方面由定义 $\forall x > 0$ 有 $y_{A^*}(x) = y^*(x) - A^*x^{\lambda_2} = y^*(x) - \widetilde{A}x^{\lambda_2} + (\widetilde{A} - A^*)x^{\lambda_2} = y_{\widetilde{A}}(x) + (\widetilde{A} - A^*)x^{\lambda_2}$, 由此又可知 $\forall n \geq 1$ 有

$$B(\widetilde{b}_n, \widetilde{\beta}_n - \widetilde{b}_n) + y_{A^*}(\widetilde{\beta}_n) - y_{A^*}(\widetilde{b}_n) = B(\widetilde{b}_n, \widetilde{\beta}_n - \widetilde{b}_n) + y_{\widetilde{A}}(\widetilde{\beta}_n) - y_{\widetilde{A}}(\widetilde{b}_n) - (\widetilde{A} - A^*)(\widetilde{b}_n^{\lambda_2} - \widetilde{\beta}_n^{\lambda_2}).$$

注意 $|y_{\widetilde{A}}(\widetilde{\beta}_n) - y_{\widetilde{A}}(\widetilde{b}_n)| > \frac{\beta}{2}$, 故由上面的分析可知只能有两种情况发生:

i) $\widetilde{\beta}_n \geq C, C - \delta_1 > \widetilde{b}_n > C'_{\widetilde{A}}$, 此时有 $\widetilde{b}_n^{\lambda_2} - \widetilde{\beta}_n^{\lambda_2} > (C - \delta_1)^{\lambda_2} - C^{\lambda_2} = \text{constant} > 0$.

ii) $C > \tilde{\beta}_n > \tilde{\beta}_n - \delta_2 > \tilde{b}_n > C'_A$, 此时有 $\tilde{b}_n^{\lambda_2} - \tilde{\beta}_n^{\lambda_2} > (C - \delta_2)^{\lambda_2} - C^{\lambda_2} = \text{constant} > 0$.

由 i) 及 ii) 的结果可知, 若令 $\gamma = [(C - \delta_1)^{\lambda_2} \wedge (C - \delta_2)^{\lambda_2}] - C^{\lambda_2}$, 则有 $\tilde{b}_n^{\lambda_2} - \tilde{\beta}_n^{\lambda_2} > \gamma = \text{constant} > 0, \forall n \geq 1$. 由此我们又可推知 $\liminf_{n \rightarrow \infty} [B(\tilde{b}_n, \tilde{\beta}_n - \tilde{b}_n) + y_{A^*}(\tilde{\beta}_n) - y_{A^*}(\tilde{b}_n)] \leq -(\tilde{A} - A^*)\gamma$.

但另一方面有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [B(\tilde{b}_n, \tilde{\beta}_n - \tilde{b}_n) + y_{A^*}(\tilde{\beta}_n) - y_{A^*}(\tilde{b}_n)] \geq \inf_{(x, \xi) \in \tilde{R}} [B(x, \xi) + y_{A^*}(x + \xi) - y_{A^*}(x)] = N(A^*) = 0,$$

这样上面两个不等式将发生矛盾, 故知假定不真, 即必有 $\tilde{A} \leq A^*$. 结合开始时我们证得的 $\tilde{A} \geq A^*$, 我们已经证出 $\tilde{A} = A^*$. 由此满足 $N(A) = 0$ 之实数 A 之唯一性得证. 至此定理 2 的全部结论都已得到.

引理 6 设 a, b, μ, σ 及 x 皆为实常数且 $0 < b < a < \infty, 0 < x < \infty, \sigma \neq 0$. 定义过程 $Z_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)A_t + \sigma M_t, t \geq 0$.

令 $\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : Z_t \notin (\ln b - \ln x, \infty)\}, \tau_2 = \inf\{t \geq \tau_1 : Z_t - Z_{\tau_1} \notin (\ln b - \ln a, \infty)\}, \dots$. 而若 τ_i 已定义, 则再归纳定义 (注意在 τ_2 的定义式中若 $\tau_1 = \infty$ 自然认为 $\tau_2 = \infty, i \geq 2$ 时 τ_{i+1} 的定义亦如上理解) $\tau_{i+1} = \inf\{t \geq \tau_i : Z_t - Z_{\tau_i} \notin (\ln b - \ln a, \infty)\}$.

当 $\tau_1 = 0$ 时令 $\xi_1 = a - x$; 当 $i = 1, \tau_1 > 0$ 或 $i \geq 2$ 时令 $\xi_i = a - b$ (注意 $\forall i \geq 1$, 当 $\tau_i = \infty$ 时 ξ_i 的取值实际上在控制中已不起作用). 则 $v = \{(\tau_i, \xi_i), i \geq 1\} \in \tilde{V}$ 且 $\tau_i, i = 1, 2, \dots$ 为可料时.

又若 $X_t, t \geq 0$ 为由 (1') 式所确定的唯一的右连左极 $\mathcal{F}_{t-}$ 适应过程, 则当 $i = 1, 0 < \tau_i < \infty$ 或 $i \geq 2, \tau_i < \infty$ 时有

$$X_{\tau_i-} = b, \quad X_{\tau_i} = a. \quad (37)$$

当 $x \leq b$ 时 $\tau_1 = 0$ 且 $X_{\tau_1} = a$, 当由 (3') 或 (3) 式计算费用时约定 $X_{\tau_1-} = x$.

当 $\infty > x > b$ 时 $\tau_1 > \tau_0 \triangleq 0$, 又 $\forall i > 0$, 当 $\tau_i < \infty$ 时 $\tau_i < \tau_{i+1}$. 此外 $\forall i \geq 0$ 当 $\tau_i < \infty$ 时还有

$$X_t \in (b, \infty), \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \quad (38)$$

由上面的一些结论, 不难看出实际上当 $\infty > x > b$ 时有 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : X_{t-} \notin (b, \infty)\}$, 又 $\forall i \geq 1$, 有 $\tau_{i+1} = \inf\{t > \tau_i : X_{t-} \notin (b, \infty)\}$.

证明 首先注意 $Z_t, t \geq 0$ 为 $\mathcal{F}_{t-}$ 适应 0 初值连续过程, 因此它也是 $\mathcal{F}_{t-}$ 可料过程, 故知 $\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : Z_t(\omega) \notin (\ln b - \ln x, \infty)\}$ 为可料集, τ_1 作为此可料集的初遇, 必为停时. 又 τ_1 的图显然含于以上可料集中, 故知 τ_1 实际上还是可料时.

因 τ_1 为可料时, 故知 $Z_{\tau_1} I_{[\tau_1 < \infty]} I_{[[\tau_1, \infty[)}$ 为可料过程, 又可推知 $\{(t, \omega) \in [[\tau_1, \infty[: [Z_t(\omega) - Z_{\tau_1}(\omega)] \cdot I_{[\tau_1 < \infty]}(\omega)] I_{[[\tau_1, \infty[} (t, \omega) \notin (\ln b - \ln a, \infty)\}$ 为可料集, 故 τ_2 作为该集合的初遇为停时, 同样因 τ_2 的图含于该集合可知 τ_2 为可料时.

依此类推, 若 τ_i 为可料时, 我们可推知 τ_{i+1} 亦为可料时. 这样我们可知 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots$ 为一列可料时. 再由 Z_t 的连续性及其归纳定义可知 $\forall i \geq 1$, 当 $\tau_i < \infty$ 时 $\tau_{i+1} > \tau_i$.

再由 $Z_t(\omega)$ 的连续性及其 τ_{i+1} 的定义可以证得 $\forall \omega \in \Omega, i \rightarrow \infty$ 时 $\tau_i(\omega) \uparrow \infty$. 引理其他结论易知.

以后为表述方便我们以 $v_{a,b;x}$ 表示引理 6 中所构造的控制.

定理 3 设定理 2 的条件成立且 $N < 0$ (或等价地: 存在 $(x, \xi) \in \tilde{R}$ 使 (15) 式成立), $y(x), x \in (0, \infty)$ 为定理 2 中得到的函数, $\tilde{\beta}, \tilde{b} : 0 < \tilde{b} < \tilde{\beta} < \infty$ 为定理 2 中得出的常数. 则当 $x \in [\tilde{b}, \infty)$ 时, $v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}$ 为本文所建模型的最佳控制且

$$y(x) = J_{v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}}(x) = \inf_{v \in \tilde{V}} J_v(x). \quad (39)$$

又 $\forall x \in (0, \infty)$ 有

$$y(x) \leq \inf_{v \in \tilde{V}} J_v(x). \quad (40)$$

证明 应用引理 3、定理 2 及引理 6 的结论, 由 Itô 公式可证本定理.

定理 4 设定理 2 的条件成立且 $N < 0$, 又 $y(x), x \in (0, \infty)$ 为定理 2 得到的函数, $\tilde{\beta}, \tilde{b}: 0 < \tilde{b} < \tilde{\beta} < \infty$ 为定理 2 得出的常数. 若再假定还有

$$B(x, \eta - x) - B(\tilde{b}, \eta - \tilde{b}) \geq B(x, \tilde{\beta} - x) - B(\tilde{b}, \tilde{\beta} - \tilde{b}), \quad \forall x, \eta: \infty > \eta \geq \tilde{b} > x > 0; \quad (41)$$

$$B(x, \eta - x) + B(\eta, \tilde{\beta} - \eta) \geq B(x, \tilde{\beta} - x), \quad \forall x, \eta: \tilde{b} > \eta > x > 0. \quad (42)$$

此外又假定 $B(x, \tilde{\beta} - x)$ 在 $(0, \tilde{b}]$ 上二次连续可导, 函数 $H(x) \triangleq \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 B''(x, \tilde{\beta} - x) + \mu x B'(x, \tilde{\beta} - x) + h(x) - \alpha B(x, \tilde{\beta} - x) - \alpha y(\tilde{\beta})$ 在 $(0, \tilde{b})$ 非负且存在 $\lambda = \text{constant} \in (\lambda_2, 0)$ 使得

$$\limsup_{x \downarrow 0} \frac{B(x, \tilde{\beta} - x)}{x^\lambda} < \infty. \quad (43)$$

上式中 λ_2 为方程 (5) 之负根. 若以上所有假定及条件成立, 则定理 3 中的结论 (39) 加强为: $\forall x > 0$ 有

$$u(x) = J_{v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}}(x) = \inf_{v \in \tilde{V}} J_v(x), \quad (44)$$

上式中 $v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}$ 如定理 3 所述且 $u(x), x > 0$ 如下定义

$$u(x) = y(x), \quad x \geq \tilde{b}; \quad u(x) = B(x, \tilde{\beta} - x) + y(\tilde{\beta}), \quad 0 < x < \tilde{b}. \quad (45)$$

证明 首先由 (41), (42), (45) 式及定理 2 中 (23) 式, 可以证明

$$B(x, \xi) + u(x + \xi) - u(x) \geq 0, \quad \forall (x, \xi) \in \tilde{R}. \quad (46)$$

此外, 由定理 2 中 (23) 式又可推知 $B(x, \tilde{\beta} - x) + y(\tilde{\beta}) - y(x)$ 在 $x = \tilde{b}$ 时取极小值 0, 再由 $B(x, \tilde{\beta} - x)$ 在 $(0, \tilde{b}]$ 上二次连续可导推知

$$\begin{aligned} B(\tilde{b}, \tilde{\beta} - \tilde{b}) + y(\tilde{\beta}) &= y(\tilde{b}), \\ [B(x, \tilde{\beta} - x) + y(\tilde{\beta})]'_{x=\tilde{b}} &= y'(\tilde{b}), \\ [B(x, \tilde{\beta} - x) + y(\tilde{\beta})]''_{x=\tilde{b}} &\geq y''(\tilde{b}). \end{aligned} \quad (47)$$

由 (45) 及 (47) 式可知 $u(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续可导且在 $(0, \infty) \setminus \{\tilde{b}\}$ 上二次连续可导, 在 $\tilde{b}$ 点 $u(x)$ 存在有限的二阶左导数 $u''_-(\tilde{b})$ 及有限的二阶右导数 $u''_+(\tilde{b})$ 且 $u''_+(\tilde{b}) = y''(\tilde{b}) \leq [B(x, \tilde{\beta} - x) + y(\tilde{\beta})]''_{x=\tilde{b}} = u''_-(\tilde{b})$. 再由定理 2 知 $y(x)$ 满足 (10) 式, 故结合上式可知有

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u''(x) + \mu x u'(x) + h(x) - \alpha u(x) = 0, \quad x \in (\tilde{b}, \infty); \quad (48)$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{b}^2 u''_+(\tilde{b}) + \mu \tilde{b} u'(\tilde{b}) + h(\tilde{b}) - \alpha u(\tilde{b}) = 0; \quad (49)$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{b}^2 u''_-(\tilde{b}) + \mu \tilde{b} u'(\tilde{b}) + h(\tilde{b}) - \alpha u(\tilde{b}) \geq 0. \quad (50)$$

又由本定理假定, $H(x)$ 在 $(0, \tilde{b})$ 上非负, 故由 (45) 式又可推知

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u''(x) + \mu x u'(x) + h(x) - \alpha u(x) \geq 0, \quad x \in (0, \tilde{b}). \quad (51)$$

现设 $x > 0$ 为任一初值, 再任取 $v = \{(\tau_i, \xi_i), i = 1, 2, \dots\} \in \tilde{V}$, 过程 $X_t, t \geq 0$ 为由方程 (1') 所确定的唯一的右连左极 $\mathcal{F}_t$ -适应过程, 即状态过程. 定义 $U_t = \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)A_t + \sigma M_t\}, t \geq 0$, 由指数公式, 知有 $X_t = (x + \sum_{\tau_i \leq t} \frac{\xi_i}{U_{\tau_i}})U_t, t \geq 0$. 令 $\tilde{U}_t = xU_t, t \geq 0$, 则由 $\tilde{V}$ 中对控制的要求 (见 (2) 式) 及上式, 可知

$$0 < \tilde{U}_t \leq X_t < \infty, \quad \forall t \geq 0. \quad (52)$$

不难看出 $\tilde{U}_t, t \geq 0$ 为方程

$$\tilde{U}_t = x + \int_0^t \mu \tilde{U}_{s-} dA_s + \int_0^t \sigma \tilde{U}_{s-} dM_s, \quad t \geq 0 \quad (53)$$

所确定的唯一的 $\mathcal{F}_t$ -适应连续过程.

令 $\eta_n = \inf\{t \geq 0 : \tilde{U}_t \leq \frac{1}{n}\}, \eta'_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq n\}, \eta''_n = \inf\{t \geq 0 : A_t \geq n\}, S_n = \eta_n \wedge \eta'_n \wedge \eta''_n \wedge n, \forall n \in \mathbb{N}$. 易知每个 S_n 为有限停时且 $n \uparrow \infty$ 时 $S_n \uparrow \infty$. 应用前面所分析的 $u(\cdot)$ 在 $(0, \infty)$ 上之性质, 可以证明 $\forall n \geq 1$ 成立下式 (实际上下式相当于经典 Ito 公式在某种条件下的推广):

$$\begin{aligned} e^{-\alpha A_{S_n}} u(X_{S_n}) &= u(x) - \alpha \int_0^{S_n} e^{-\alpha A_t} u(X_{t-}) dA_t + \int_0^{S_n} e^{-\alpha A_t} \mu X_{t-} u'(X_{t-}) dA_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{S_n} e^{-\alpha A_t} \sigma^2 X_{t-}^2 \frac{u''_-(X_{t-}) + u''_+(X_{t-})}{2} dA_t + \sum_{\tau_i \leq S_n} e^{-\alpha A_{\tau_i}} [u(X_{\tau_i}) - u(X_{\tau_i-})] \\ &\quad + \int_0^{S_n} e^{-\alpha A_t} \sigma X_{t-} u'(X_{t-}) dM_t, \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (54)$$

再利用 (46) 及 (48)-(51) 式, 由 (54) 式又可以推知 $\forall n \geq 1$, 有

$$u(x) \leq E \left[\int_0^{S_n} e^{-\alpha A_t} h(X_{t-}) dA_t + \sum_{\tau_i \leq S_n} e^{-\alpha A_{\tau_i}} B(X_{\tau_i-}, \xi_i) \right] + E[e^{-\alpha A_{S_n}} u(X_{S_n})]. \quad (55)$$

记 $v(y) \triangleq y^{\lambda_2}, y \in (0, \infty)$, 其中 λ_2 为方程 (5) 之负根. 则由引理 1 中的分析可知 $v(y)$ 在 $(0, \infty)$ 上二次连续可导且 $\forall y \in (0, \infty)$ 满足 $\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 v''(y) + \mu y v'(y) - \alpha v(y) = 0$. 由 (53) 式及上式并利用 Ito 公式, 仿照上面的几步分析我们又可以证得

$$E[e^{-\alpha A_{S_n}} v(\tilde{U}_{S_n})] = v(x), \quad \forall n \geq 1. \quad (56)$$

另一方面, 由定义 (45) 及定理 2 还可推知 $u(\cdot)$ 不仅在 $(0, \infty)$ 取正数值而且自变量趋于 ∞ 时有极限值 0, 再由假定 (43) 可知存在 $C = \text{constant} > 0$, 使得 $\forall y \in (0, \infty)$ 有 $0 < u(y) \leq C(1 + y^\lambda)$.

注意在 (43) 式中 $\lambda_2 < \lambda < 0$, 故 $q \triangleq \frac{\lambda_2}{\lambda} > 1$, 再由 $\mathcal{C}_r$ -不等式 (参阅文献 [28] 中第 3 章) 推知 $\forall y \in (0, \infty)$ 有 $0 < [u(y)]^q \leq K(1 + y^{\lambda_2}) = K[1 + v(y)]$. 其中 $K = 2^{q-1} C^q = \text{constant} > 0$. 令 $p = \frac{q}{q-1}$, 则 $p > 1$ 且 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 故由 Hölder 不等式 (参阅文献 [28] 中第 3 章) 推知

$$0 < E[e^{-\alpha A_{S_n}} u(X_{S_n})] = E[(e^{-\alpha A_{S_n}})^{\frac{1}{p}} \cdot (e^{-\alpha A_{S_n}})^{\frac{1}{q}} u(X_{S_n})]$$

$$\leq K^{\frac{1}{q}} \{E[e^{-\alpha A_{S_n}}]\}^{\frac{1}{p}} \cdot \{E[e^{-\alpha A_{S_n}} + e^{-\alpha A_{S_n}} v(X_{S_n})]\}^{\frac{1}{q}}, \quad \forall n \geq 1. \quad (57)$$

注意由 (52), (56) 式又可推知

$$E[e^{-\alpha A_{S_n}} + e^{-\alpha A_{S_n}} v(X_{S_n})] \leq 1 + E[e^{-\alpha A_{S_n}} v(X_{S_n})] \leq 1 + E[e^{-\alpha A_{S_n}} v(\tilde{U}_{S_n})] = 1 + v(x). \quad (58)$$

再由 (57), (58) 式推知

$$0 < E[e^{-\alpha A_{S_n}} u(X_{S_n})] \leq \{K[1 + v(x)]\}^{\frac{1}{q}} \cdot \{E[e^{-\alpha A_{S_n}}]\}^{\frac{1}{p}}, \quad \forall n \geq 1. \quad (59)$$

注意 $n \rightarrow \infty$ 时 $S_n \rightarrow \infty$ 从而 $A_{S_n} \rightarrow \infty$, a.s. 故由关于期望的控制收敛定理推知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[e^{-\alpha A_{S_n}}] = 0.$$

由 (59) 式及上式即可推知 $\lim_{n \rightarrow \infty} E[e^{-\alpha A_{S_n}} u(X_{S_n})] = 0$.

在 (55) 式中令 $n \rightarrow \infty$ 并利用上式, 再注意 $\tau_i = \infty$ 时约定 $e^{-\alpha A_{\tau_i}} B(X_{\tau_i-}, \xi_i) = 0$, 则由积分收敛定理即可推知 $\forall x > 0$ 及 $\forall v \in \tilde{V}$ 有 $u(x) \leq E[\int_0^\infty e^{-\alpha A_t} h(X_{t-}) dA_t + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha A_{\tau_i}} B(X_{\tau_i-}, \xi_i)]$.

由上式及 (3') 我们即知 $\forall x > 0$, 有

$$u(x) \leq \inf_{v \in \tilde{V}} J_v(x). \quad (60)$$

由以上结论, 可知欲证本定理, 只须再证 $\forall x > 0$, 有

$$J_{v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}}(x) = u(x). \quad (61)$$

首先由定理 3 及 $u(x)$ 的定义, 可知 $x \in [\tilde{b}, \infty)$ 时上式成立, 故不妨设 $x \in (0, \tilde{b})$. 而当 $x \in (0, \tilde{b})$ 时, 由引理 6 中所述 $v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}$ 之结构及 (3') 和指数公式, 可知 $J_{v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}}(x) = B(x, \tilde{\beta} - x) + J_{v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; \tilde{\beta}}}(\tilde{\beta})$.

而由定理 3 中 (39) 式及 $u(x)$ 的定义 (45) 式, 又可推知

$$J_{v_{\tilde{\beta}, \tilde{b}; x}}(x) = B(x, \tilde{\beta} - x) + y(\tilde{\beta}) = u(x), \quad \forall x \in (0, \tilde{b}). \quad (62)$$

由 (62) 式即知 (61) 式成立, 综合 (60), (61) 式即证 (44) 式. 定理 4 证毕.

推论 1 若将本定理中的条件“函数 $H(x)$ 在 $(0, \tilde{b})$ 非负”改为“函数 $\tilde{H}(x) \triangleq \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 B''(x, \tilde{\beta} - x) + \mu x B'(x, \tilde{\beta} - x) + h(x) - \alpha B(x, \tilde{\beta} - x)$ 在 $(0, \tilde{b})$ 非增”而其余的假定都不变, 则定理的结论仍成立.

证明 易知在推论 1 的条件下定理 4 的条件仍成立, 故其结论亦成立.

推论 2 假定 (4) 式成立, $h(x)$ 为 $(0, \infty)$ 上的非负连续函数且 $\lim_{x \uparrow \infty} h(x) = 0$, 同时存在 $\lambda'_2 = \text{constant} \in (\lambda_2, \infty)$ 满足 $\limsup_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{x^{\lambda'_2}} < \infty$.

再设 $\forall (x, \xi) \in \tilde{R}$, $B(x, \xi) = C + \varphi(x + \xi) - \varphi(x)$, 其中 $C = \text{constant} > 0$, $\varphi(x)$ 为 $(0, \infty)$ 上的二次连续可导非降函数且 $\liminf_{x \uparrow \infty} [x \varphi'(x)] > 0$, 又存在 $\lambda = \text{constant} \in (\lambda_2, 0)$ 使得 $\liminf_{x \downarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} > -\infty$. 则引理 1 中定义的 $y^*(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上有意义且二次连续可导.

若 $\forall (x, \xi) \in \tilde{R}$, 有 $C + \int_x^{x+\xi} [y^{*'}(u) + \varphi'(u)] du \geq 0$, 则本文所建立的随机控制模型有退化的最佳控制. 若存在某个 $(x, \xi) \in \tilde{R}$ 使得 $C + \int_x^{x+\xi} [y^{*'}(u) + \varphi'(u)] du < 0$, 则定理 2 中的相应结论成立且对定理 2 中所得到的函数 $y(x)$ 及常数 $\tilde{\beta}, \tilde{b}: 0 < \tilde{b} < \tilde{\beta} < \infty$, 定理 3 中的 (39) 及 (40) 式成立. 进一步若函数 $\hat{H}(x) \triangleq -\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \varphi''(x) - \mu x \varphi'(x) + h(x) + \alpha \varphi(x)$ 在 $(0, \tilde{b})$ 还非增, 则定理 4 中相应的结论仍成立.

证明 由 $B(x, \xi)$ 的结构及本推论的条件, 再利用推论 1 即可证得所需的结论.

3 结语

综上所述, 本文建立了一类新型的脉冲控制模型, 其与以往不同的重要特点是其控制费用函数具有二元结构. 通过建立与新模型适应的变分方程并对之进行深入分析, 本文证明了该变分方程存在某种意义上的经典解. 对解函数进行一系列随机分析与讨论, 我们证明了新模型存在最佳控制, 此外我们还对最佳控制的结构进行了多层次的分析与刻画.

本文在随机控制的研究中建立了一类新的控制模型, 还提供了研究此类模型的一种针对性的方法, 预期这些新的分析方法对进一步开展本方向上的研究也不乏可供借鉴之处, 从这一角度来看本文有着重要的理论意义. 此外, 还有很多其他的状态为半鞅, 费用函数为二元的随机控制模型需要进行进一步的研究.

众所周知, 线性随机微分方程的解过程 (特别是几何布朗运动) 的变化状况最能客观地反映外汇市场中汇率或是证券市场中股值的变化规律, 因而本文的模型在汇率调控及证券投资管理中有重要意义. 又因本文模型中的控制量为非负值, 所以本模型特别适用于汇率持续升值情况下的汇率控制或是长期牛市的股票市场投资管理. 从以上观点来说本文对于我国或是经济持续快速增长的新兴国家的汇市干预及证券管理有着特别重要的参考价值.

致谢 于景元教授、安鸿志教授、葛渭高教授、陆传赓教授及有关审稿专家付出了辛勤的劳动, 详细审阅了本文全稿, 并给出了宝贵的建议. 在此表示我们由衷的感激和深切的谢意!

参考文献

- 1 Beneš V E, Shepp L A, Witsenhausen H S. Some solvable stochastic control problems. *Stochastics*, 1980, 4: 39–83
- 2 Karatzas I. A class of singular stochastic control problems. *Adv Appl Prob*, 1983, 15: 225–254
- 3 Liu K H, Qin M D, Lu C L. A class of discounted models for singular diffusion control. *Chin Sci Bull*, 2000, 45: 405–408
- 4 Liu K H, Qin M D, Lu C L. On sufficient and necessary of existence for a class of singular optimal stochastic control. *J Sys Sci Complex*, 2003, 16: 424–437
- 5 Liu K H, Qin M D, Lu C L. A class of stationary models of singular stochastic control. *Acta Math Sci*, 2004, 24: 139–150
- 6 Liu K H. From stopping problems to discounted problems. *J Sys Sci Math Scis*, 1991, 11: 263–266 [刘坤会. 从停止问题到折扣费用问题. *系统科学与数学*, 1991, 11: 263–266]
- 7 Liu K H, Qin M D, Lu C L. On the nonsymmetric stationary models of singular stochastic control for diffusions. *Acta Math Sci*, 2005, 25: 852–862 [刘坤会, 秦明达, 陆传赓. 一类具有扩散的奇异型随机控制的非对称平稳模型. *数学物理学报*, 2005, 25: 852–862]
- 8 Liu K H. A class of extended singular stochastic control problems. *Acta Math Appl Sin*, 1989, 12: 174–182 [刘坤会. 一类推广的奇异型最佳随机控制问题. *应用数学学报*, 1989, 12: 174–182]
- 9 Richard S F. Optimal impulse control of a diffusion process with both fixed and proportional costs of control. *SIAM J Control Optim*, 1979, 1: 79–91
- 10 Øksendal B. Stochastic control problems where small intervention costs have big effects. *Appl Math Optim*, 1999, 40: 355–375
- 11 Cadenillas A. Optimal central bank intervention in the foreign exchange market. *J Econ Theory*, 1999, 87: 218–242
- 12 Wang H. Some control problems with random intervention times. *Adv Appl Prob*, 2001, 33: 404–422
- 13 Ohnishi M, Tsujimura M. An impulse control of a geometric Brownian motion with quadratic costs. *Europ J Oper Res*, 2006, 168: 311–321

- 14 Liu K H. The existence of the optimal control of Richard's model and the structure of its cost function. *Acta Math Appl Sin*, 1986, 9: 385–408 [刘坤会. Richard 模型最佳控制的存在性及其费用的函数结构. *应用数学学报*, 1986, 9: 385–408]
- 15 Liu K H. A class of impulse control and the analytical expression of its optimal cost function. *Acta Math Appl Sin*, 1990, 13: 385–390 [刘坤会. 一类脉冲控制最佳费用的解析表达式. *应用数学学报*, 1990, 13: 385–390]
- 16 Liu K H. The problem of average expected cost of Richard's model. *Acta Math Sin*, 1988, 31: 786–793 [刘坤会. Richard 模型的平均期望费用问题. *数学学报*, 1988, 31: 786–793]
- 17 Liu K H, Lu C L, Qin M D. A class of stationary impulse stochastic control with state of semi-martingale. *J Sys Sci Math Sci*, 2004, 24: 249–260 [刘坤会, 陆传赓, 秦明达. 一类半鞅状态的平稳型脉冲随机控制. *系统科学与数学*, 2004, 24: 249–260]
- 18 Liu K H. A class of extended impulse controls related to semimartingale (I). *J Sys Sci Math Scis*, 2005, 25: 96–105 [刘坤会. 一类与半鞅有关的推广型脉冲控制 (I). *系统科学与数学*, 2005, 25: 96–105]
- 19 Liu K H. A class of extended impulse controls related to semimartingale (II). *J Sys Sci Math Scis*, 2005, 25: 237–248 [刘坤会. 一类与半鞅有关的推广型脉冲控制 (II). *系统科学与数学*, 2005, 25: 237–248]
- 20 Liu X P, Liu K H. The generalization of a class of impulse stochastic control models of a geometric brownian motion. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 983–998
- 21 Protter P. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Beijing: World Publishing Corporation, 1992. 187–284
- 22 Klebaner F C. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Beijing: World Publishing Corporation, 2004. 117–137
- 23 Liu K H. A problem of symmetric variational equation. *Chin Sci Bull*, 1995, 40: 1502–1507
- 24 Liu K H. A new class of variational equation problems. *Prog Nat Sci*, 2003, 13: 149–151
- 25 Liu K H. Boundedness of a derived function of a solution about a class of diffusion variational equations. *Acta Math Sin, English Ser*, 2004, 20: 463–474
- 26 Liu K H. The problem of a class of diffusion variational equations. *Acta Math Sin*, 2003, 46: 913–924 [刘坤会. 一类扩散型变分方程问题. *数学学报*, 2003, 46: 913–924]
- 27 Liu K H. A stationary variational equation problem. *J Eng Math*, 1999, 16: 11–15 [刘坤会. 一个平稳型的变分方程问题. *工程数学学报*, 1999, 16: 11–15]
- 28 Loève M. *Probability Theory I*. 4th ed. Beijing: World Publishing Corporation, 1977. 103–147

A new class of impulse stochastic control models with non-negative control quantity

LIU XiaoPeng^{1*} & LIU KunHui²

1 *Institute of Applied Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;*

2 *College of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China*

*E-mail: lkhww@263.net

Abstract This paper advances and studies a new class of impulse stochastic control models. Its state structure is defined by a linear stochastic differential equation of the semi-martingale, its control cost function is a two-variable function of pre-control state quantity and control quantity, and its control quantity is kept non-negative. First this paper constructs a new type of variational equations and proves its solution exists. Using a series of stochastic analysis methods to research the solution function of this type of variational equations, this paper proves the existence of optimal control and analyzes its structure in depth. Because of the big difference between the model in this paper and stochastic control models in previous papers, the analysis method here is quite different from previous ones. It is expected that this paper will have important theoretical significance for stochastic control research, along with wide applicative value in finance control and security management.

Keywords impulse stochastic control, control quantity, variational equation, optimal control, semi-martingale