

非线性系统的变论域稳定自适应模糊控制 *

李洪兴^{①②③} 苗志宏^① 王加银^①

(^①北京师范大学数学系, 北京 100875; ^②四川师范大学数学系, 成都 610066; ^③清华大学自动化系, 北京 100084)

摘要 采用变论域自适应模糊控制实现一类非线性系统的稳定自适应控制. 首先用积分调节原理设计了作用于推理后件的伸缩因子, 对于一阶非线性系统进行了仿真实验. 然后用 Lyapunov 方法证明了变论域自适应模糊控制是稳定的自适应控制, 对于二阶非线性系统进行了仿真实验. 此外提出符号因子方法, 它大幅度扩展了系统的稳定域并提高了鲁棒性.

关键词 非线性系统 变论域自适应模糊控制 伸缩因子 符号因子 稳定域

变论域自适应模糊控制思想最早在文献[1, 2]中被提出, 文献[3, 4]详细地研究了几种类型的变论域自适应模糊控制器, 为变论域自适应模糊控制的应用奠定了理论基础. 变论域自适应模糊控制器能否很好地应付非线性系统是一个诱人的研究课题. 本文便致力于这一课题的研究, 仿真结果十分理想; 采用与文献[5, 6]中相同的非线性系统做仿真比较, 其控制效果得到大幅度提高. 可以这样讲, 变论域自适应模糊控制是处理非线性系统的很有力的工具.

1 变论域自适应模糊控制器的基本结构

本节简述变论域自适应模糊控制器的基本结构, 详细内容见文献[3]. 设 $X_i = [-E, E]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 分别为输入变量 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的论域, $Y = [-U, U]$ 为输出变量 y 的论域; $\mathcal{U}_i = \{A_{ij}\}_{(1 \leq j \leq m)}$ 为 X_i 上的模糊划分^[1] ($i = 1, 2, \dots, n$), $\mathcal{B} = \{B_j\}_{(1 \leq j \leq m)}$ 为 Y 上的模糊划分. 视 $\mathcal{U}_i, \mathcal{B}$ 为语言变量, 可以形成模糊推理规则:

If x_1 is A_{1j} and x_2 is A_{2j} and $\dots$ and x_n is A_{nj} then y is B_j , $j = 1, 2, \dots, m$. (1)

设 x_{ij} 分别为 A_{ij} 的峰点^[1~5], y_j 分别为 B_j 的峰点 ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$). 根据文献[4]的结果, 基于(1)式的模糊逻辑系统(即模糊控制器)表现为一个 n 元分片插值函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij}(x_i) y_j. \quad (2)$$

所谓变论域是指论域 X_i 与 Y 可以分别随着变量 x_i 与 y 的变化而自行调整, 记之为

2001-07-18 收稿, 2001-11-07 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 69974006, 60174013)和教育部跨世纪优秀人才培养计划基金及教育部高等学校骨干教师基金资助项目

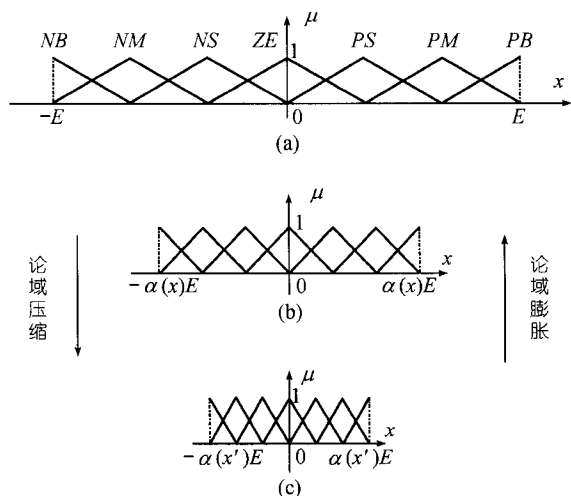


图 1 初始论域(a)、论域压缩(b)与膨胀(c)

从上述协调性不难推出伸缩因子还满足下面的性质:

5) 正规性: $\alpha(\pm E) = 1$.

我们建议下面两个实用的伸缩因子(具体推演过程见文献[1~3]):

$$\alpha(x) = (|x|/E)^\tau + \epsilon, \quad \tau > 0, \epsilon \text{ 为充分小的正数}, \quad (5)$$

$$\alpha(x) = 1 - \lambda \exp(-kx^2), \quad \lambda \in (0, 1), k > 0, \quad (6)$$

根据文献[2]的结论, 基于(1)式的变论域自适应模糊控制器表示为如下的 n 元分片动态插值函数:

$$y(\mathbf{x}(t+1)) = \beta(y(\mathbf{x}(t))) \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \right) y_j, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{x}(t) \triangleq (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$.

注 1 不难理解, (7)式实际上是一个迭代公式, 如何确定伸缩因子 $\beta(y)$ 是个值得探讨的问题. 现在记

$$\beta(t) \triangleq \beta(y(\mathbf{x}(t))), \quad (8)$$

如果视 $\beta(t)$ 为较一般的 t 函数, 即放松它对 $y(\mathbf{x}(t))$ 的依赖, 那么(7)式可简化为

$$y(\mathbf{x}(t+1)) = \beta(t) \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \right) y_j. \quad (9)$$

特别, 为了更简单起见, 可令 $\beta(t) = 1$, 于是(9)式蜕化为

$$y(\mathbf{x}(t+1)) = \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \right) y_j. \quad (10)$$

注 2 为了简洁起见, 我们置

$$\omega(\mathbf{x}(t)) \triangleq \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \right) y_j. \quad (11)$$

进而, 注意到输入论域 $Y = [-U, U] = U[-1, 1]$, 如果把模糊集 B_j 定在对称区间 $[-1, 1]$ (从而 $\{y_j\} \subset [-1, 1]$), 那么(11)式可写为更便于设计的形式:

$$X_i(x_i) = [-\alpha_i(x_i)E_i, \alpha_i(x_i)E_i], \quad (3)$$

$$Y(y) = [-\beta(y)U, \beta(y)U], \quad (4)$$

其中 $\alpha_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 与 $\beta(y)$ 叫做论域的伸缩因子^[3]. 相对于变论域, 原来的论域 X_i 与 Y 便叫做初始论域. 论域的变化情况见图 1.

一般地讲, 一个函数 $\alpha: X \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \alpha(x)$ 叫做论域 $X = [-E, E]$ 的一个伸缩因子, 如果满足下述公理:

- 1) 对偶性: $(\forall x \in X) (\alpha(x) = \alpha(-x))$,
- 2) 避零性: $\alpha(0) = \epsilon$, ϵ 为充分小的正数,
- 3) 单调性: α 在 $[0, E]$ 上严格单调增,
- 4) 协调性: $(\forall x \in X) (|x| \leq \alpha(x)E)$.

$$\omega(\mathbf{x}(t)) \triangleq U \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \right) y_j. \quad (12)$$

其中 U 亦可视为一个设计参数, 它的大小决定了施加控制量的范围. 之后, 在(12)式的基础上, 我们要使 $\beta(t)$ 具有一定的自适应律使得控制系统中误差向量 $\mathbf{e}(t)$ 收敛到零, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0,$$

这里 $\mathbf{e}(t) = (e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(n-1)}(t))^T$. 此外, 在(12)式的意义下, (7)、(9)及(10)式依次表示为:

$$y(\mathbf{x}(t+1)) = \beta(y(\mathbf{x}(t)))\omega(\mathbf{x}(t)), \quad (13)$$

$$y(\mathbf{x}(t+1)) = \beta(t)\omega(\mathbf{x}(t)), \quad (14)$$

$$y(\mathbf{x}(t+1)) = \omega(\mathbf{x}(t)). \quad (15)$$

2 一类非线性系统的变论域自适应模糊控制

文献[4, 5]讨论了如下的 n 阶连续非线性系统:

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + bu, \quad (16)$$

$$y = x, \quad (17)$$

这里 f 是一个未知的非线性连续函数, b 为一个未知的常量; 要求满足条件

$$|f(\mathbf{x})| \leq f_0(\mathbf{x}), \quad 0 < b_1 < b < b_2,$$

其中 f_0 , b_1 和 b_2 分别为已知的连续函数和常量.

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \triangleq (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T$ 为状态变量, $r(t)$ 为参考输入. 置 $\mathbf{e}(t) = r(t) - y(t)$, 记 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T \triangleq (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T$. 我们的目的是采用变论域自适应模糊控制器使被控对象的输出 $y(t)$ 能渐近地跟踪参考输入 $r(t)$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$.

2.1 基于积分调节原理的变论域自适应模糊控制器的设计

这里我们采用形如(14)式的变论域自适应模糊控制器来处理非线性系统(16)和(17), 该控制器记为 $u_c(t)$, 即

$$u_c(t) \triangleq \beta(t)\omega(\mathbf{e}(t)), \quad (18)$$

其中

$$\omega(\mathbf{e}(t)) = U \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{e_i(t)}{\alpha_i(e_i(t))} \right) y_j. \quad (19)$$

显然该控制器的自适应律反映在伸缩因子 $\alpha_i(e_i(t))$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 及 $\beta(t)$ 上; 然而诸 $\alpha_i(e_i(t))$ 已有固定的调节规律(5)或(6)式, 比如取

$$\alpha_i(e_i(t)) = 1 - 0.99 \exp(-a_i e_i^2(t)), \quad (20)$$

式中 $a_i > 0$ 为设计参数, 因此, $\beta(t)$ 便成为控制器与系统进行信息交换的主要“接口”, 恰当地选择 $\beta(t)$ 可达到优化自适应律的目的.

控制目标 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$ 促使我们考虑 $\beta(t)$ 与 $\mathbf{e}(t)$ 之间的联系, 一个自然的原则是 $\beta(t)$ 的变化率 $\dot{\beta}(t)$ 应当与 $\mathbf{e}(t)$ 成正比. 由于 $\mathbf{e}(t)$ 是个向量, 故可找一个常数向量 $P_n = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ 作用于 $\mathbf{e}(t)$ 使其变为标量 $e^*(t) \triangleq \mathbf{e}^T(t)P_n$, 从而 $\dot{\beta}(t)$ 与 $\mathbf{e}(t)$ 的关系表示为

$$\dot{\beta}(t) = K_1 e^*(t) = K_1 \mathbf{e}^T(t)P_n = K_1 \sum_{i=1}^n p_i e_i(t), \quad (21)$$

式中 K_I 为比例常数, 可视其为一个设计参数. 然后对 $\beta(t)$ 在 $[0, t]$ 上积分便有

$$\begin{aligned}\beta(t) &= K_I \int_0^t e^*(\tau) d\tau + \beta(0) = K_I \int_0^t e^T(\tau) P_n d\tau + \beta(0) \\ &= K_I \sum_{i=1}^n p_i \int_0^t e_i(\tau) d\tau + \beta(0),\end{aligned}\quad (22)$$

式中初值 $\beta(0)$ 作为一个设计参数, 要根据实际情况来确定, 不过, 通常可试取 $\beta(0) = 1$. 这样一来, 形如(18)式的控制器可设计为下列具体形式:

$$u_c(t) \triangleq \left(K_I \int_0^t e^T(\tau) P_n d\tau + \beta(0) \right) U \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \right) y_j. \quad (23)$$

例 1 现在我们用仿真来考察控制器(23)的效果. 取文献[5, 6]中使用的被控对象:

$$\dot{x}(t) = \frac{1 - e^{-x(t)}}{1 + e^{-x(t)}} + u(t), \quad (24)$$

$$y(t) = x(t). \quad (25)$$

显然, 这是个一阶非线性不稳定系统. 控制的任务是使系统的输出 $y(t)$ 对于任意给定的初值 $x(0)$ 以尽可能高的精度快速地追踪事先给定的参考输入 $r(t)$.

取 $E = 2$, 即 $e(t)$ 的论域为 $[-E, E] = [-2, 2]$; 控制变量 $u(t) = u_c(t)$ 的论域为 $U[-1, 1]$; 模糊控制规则规定为下列 6 条:

If e is Nb then u is NB , If e is Nm then u is NM ,

If e is Ns then u is NS , If e is Ps then u is PS ,

If e is Pm then u is PM , If e is Pb then u is PB ,

这里推理前件语言值 $Nb, Nm, \dots, Pb$ 均为 $[-E, E]$ 上的模糊集, 可取为“三角波”隶属函数 (见图 2):

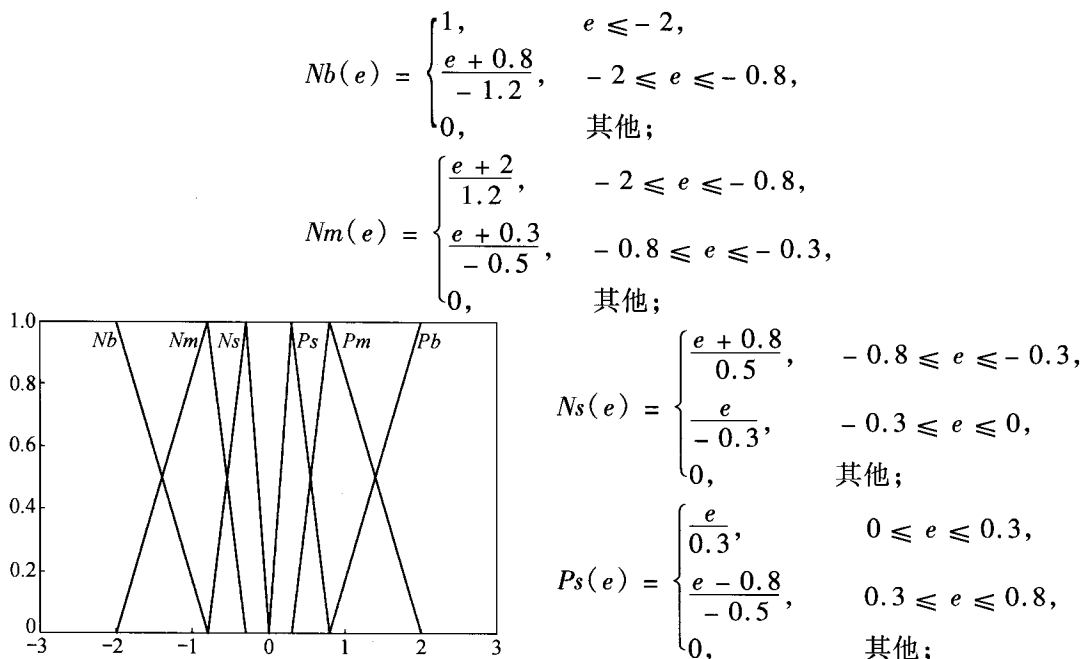


图 2 误差论域 $[-2, 2]$ 上的模糊划分

$$Pm(e) = \begin{cases} \frac{e-0.3}{0.5}, & 0.3 \leq e \leq 0.8, \\ \frac{e-2}{-1.2}, & 0.8 \leq e \leq 2, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$Pb(e) = \begin{cases} 1, & 2 \leq e, \\ \frac{e-0.8}{1.2}, & 0.8 \leq e \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

注意(23)式可以发现, 关于推理后件的模糊集 $NB, NM, \dots, PB$, 只出现它们的峰点^[1~4] y_j , 而与这些模糊集的形状无关^[7]; 这些峰点在 $[-1, 1]$ 中取为: $y_1 = -1, y_2 = -0.4, y_3 = -0.1, y_4 = 0.1, y_5 = 0.4, y_6 = 1$. 在本例中, P_n 为一个标量, 可取为 2, 即 $P_n|_{n=1} = P_1 = 2$. 令 $K_1 = 2, U = 7$; 伸缩因子 $\alpha(e(t))$ 按(20)式规定:

$$\alpha(e(t)) = 1 - 0.99 \exp(-0.5e^2(t)).$$

这时, 控制器(23)便写为下列实际形式:

$$u_c(t) = 7 \left(4 \int_0^t (e(\tau) d\tau + \beta(0)) \right) [-Nb(e(t)) - 0.4Nm(e(t)) - 0.1Ns(e(t)) + 0.1Ps(e(t)) + 0.4Pm(e(t)) + Pb(e(t))], \quad (26)$$

置 $\alpha(0) = 1, \beta(0) = 1$.

情形 1 取 $r(t) = 0$. 这时的仿真结论见图 3. 设仿真时间区间为 $[0, T]$, 为了和文献[5, 6]中的结果相比较, 这时暂取 $T = 20$, 即与文献[5, 6]中的 T 相同.

从图 3 可以看出, 在控制器(26)的作用下, 系统的动态响应非常好, 即上升时间与调整时间极短, 没有超调, 也没有稳态误差; 其结果的优良性远远超过文献[5, 6]中相应的结果. 为了看得更清楚, 我们仅取 $T = 0.1$ 再作仿真, 其结果见图 4. 从该图可知, 上升时间与调整时间一起仅约 0.03 s.



图 3 $T = 20$ 时 $r(t) = 0$ 的仿真曲线

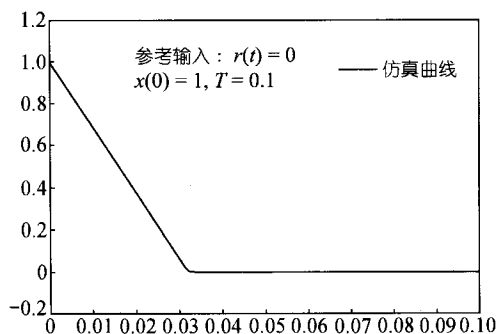


图 4 $T = 0.1$ 时 $r(t) = 0$ 的仿真曲线

情形 2 取 $r(t) = \sin t, x(0) = 1, T = 10$. 此时的仿真结果见图 5(a), 其效果很好, 仿真曲线与 $\sin t$ 曲线重合在一起.

再取 $r(t) = \sin(10\pi t), x(0) = 1, \beta(0) = 2, U$ 仍为 7, $T = 0.2$, 此时仿真结果也很好, 见

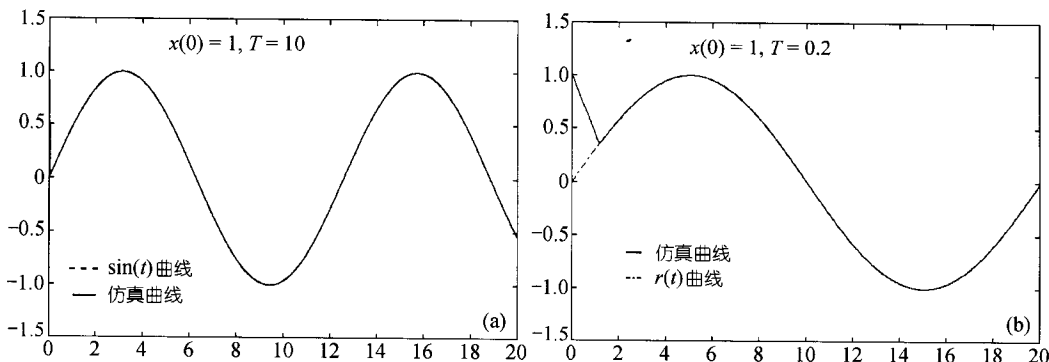


图 5 $r(t) = \sin t$ 的仿真曲线(a)和 $r(t) = \sin(10\pi t)$ 的仿真曲线(b)

图 5(b).

2.2 采用加权积分调节的变论域自适应模糊控制器的设计

再考察伸缩因子 $\beta(t)$ 的表达式(22), 显然它本质上是 $e^*(t)$ 的变上限积分. 对任意 $t > 0$, 视 $\omega(e(t))$ 为 $e^*(t)$ 在 t 时刻的权重, 则(21)式可重新写为加权形式

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(t) &= K_I \omega(e(T)) e^*(t) = K_I \omega(e(t)) e^T(t) P_n \\ &= K_I \sum_{i=1}^n p_i \omega(e(t)) e_i(t).\end{aligned}\quad (27)$$

在 $[0, t]$ 上对上述 $\dot{\beta}(t)$ 积分便有

$$\begin{aligned}\beta(t) &= K_I \int_0^t \omega(e(\tau)) e^*(\tau) d\tau = K_I \int_0^t \omega(e(\tau)) e^T(\tau) P_n d\tau + \beta(0) \\ &= K_I \sum_{i=1}^n p_i \int_0^t \omega(e(\tau)) e_i(\tau) d\tau + \beta(0).\end{aligned}\quad (28)$$

这样一来, 控制器(23)相应地改变为

$$u_c(t) \triangleq \left(K_I \int_0^t \omega(\tau) e^T(\tau) P_n d\tau + \beta(0) \right) \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n A_{ij} \left(\frac{e_i(t)}{\alpha_i(e_i(t))} \right) y_j. \quad (29)$$

例 2 仍考虑例 1 中的被控对象(24)和(25), 其中的数据与约定基本不变, 只是控制器(26)变为

$$\begin{aligned}u_c(t) &= 7 \left(\int_0^t \omega(\tau) e(\tau) d\tau + \beta(0) \right) [-Nb(e(t)) - 0.4Nm(e(t)) \\ &\quad - 0.1Ns(e(t)) + 0.1Ps(e(t)) + 0.4Pm(e(t)) + Pb(e(t))].\end{aligned}\quad (30)$$

但仿真结果与形如(26)式非加权控制器的结果几乎一样, 看不出显著的优越性, 细节不再赘述.

3 变论域自适应模糊控制器的理论基础

本节着手为变论域自适应模糊控制器建立理论基础. 注意到我们的控制目标为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 为此选择一个 Hurwitz 多项式:

$$h(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_{n-1} s + k_n, \quad (31)$$

即该多项式的根均位于左半平面, 由此构造误差方程:

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \cdots + k_{n-1} \dot{e} + k_n e = 0. \quad (32)$$

显然,若 $e(t)$ 为该方程的解,则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, 即跟踪误差 $e(t)$ 是渐近稳定的.

记 $\mathbf{k} \triangleq (k_n, k_{n-1}, \cdots, k_1)^T$, 则(32)式写为

$$\dot{e}^{(n)} = -\mathbf{k}^T \mathbf{e}. \quad (33)$$

从(16)和(33)式并注意 $e^{(n)} = r^{(n)} - x^{(n)}$, 我们有

$$u = \frac{1}{b}(-f(x) + r^{(n)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e}). \quad (34)$$

将(34)式代入(16)式便有(33)式, 因而视(34)式为理想控制并记之为 u^* , 即

$$u^* = \frac{1}{b}(-f(x) + r^{(n)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e}). \quad (35)$$

选用形如(14)式的控制器, 但为了确保系统的稳定性, 再配置一个补偿器 $u_s(t)$; 于是控制策略便选为下列形式:

$$u(t) = u_c(t) + u_s(t) = \beta(t)\bar{\omega}(\mathbf{e}) + u_s(t), \quad (36)$$

只要恰当地选择 $u_s(t)$ 并适当地设计 $\beta(t)$ 便可使 $u(t)$ 渐近地逼近理想控制器 $u^*(t)$. 将 $u(t)$ 代入(16)式, 有

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + b(u_c(t) + u_s(t)). \quad (37)$$

从(35)和(37)式可得到一个误差方程

$$\dot{e}^{(n)} = -\mathbf{k}^T \mathbf{e} + b(u^* - u_c - u_s). \quad (38)$$

若置

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

则(38)式可写为下列等价形式:

$$\dot{\mathbf{e}} = A\mathbf{e} + B(u^* - u_c - u_s). \quad (39)$$

定理 1 适当选择 $u_s(t)$ 可使方程(39)成为一个渐近稳定的系统.

证 显然 A 是个稳定矩阵, 根据 Lyapunov 方程, 对任意取定的正定矩阵 Q , 一定存在对称正定矩阵 P , 使得

$$A^T P + PA = -Q. \quad (40)$$

构造能量函数 $V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \mathbf{e}$, 将它对 t 求导数后再利用(38)与(39)式便有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}) &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P B (u^* - u_c - u_s) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P_n b (u^* - u_c - u_s), \end{aligned}$$

式中 $P_n = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ 为矩阵 P 的第 n 列. 现在取

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{e}^T P| (f_0 + |r^{(n)}| + |\mathbf{k}^T \mathbf{e}| + b_2 |u_c|) < \frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e}, \\ \text{sgn}(\mathbf{e}^T P) [1/b_1 (f_0 + |r^{(n)}| + |\mathbf{k}^T \mathbf{e}| + |u_c|)], & \text{其他}, \end{cases} \quad (41)$$

$$(42)$$

由此再注意到(35)式便有

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{e}) &\leq -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \|\mathbf{e}^T P_n\| b(\|\mathbf{u}^*\| + \|\mathbf{u}_c\|) - \mathbf{e}^T P_n b \mathbf{u}_s \\ &\leq -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \|\mathbf{e}^T P_n\| (f_0 + \|r^{(n)}\| + \|\mathbf{k}^T \mathbf{e}\| + b\|\mathbf{u}_c\|) - \mathbf{e}^T P_n b \mathbf{u}_s.\end{aligned}$$

当(41)式成立时, $\dot{V}(\mathbf{e}) \leq 0$; 当(41)式不成立时, $\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} \leq 0$ 且仅当 $\|\mathbf{e}\| = 0$ 时 $\dot{V}(\mathbf{e}) = 0$. 因此, 形如(39)式的系统是渐近稳定的系统, 且 $V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T P \mathbf{e}$ 是 Lyapunov 函数.

推论 1 在补偿器 $u_s(t)$ 的作用下, 系统的误差向量是有界的, 即 $\exists E_0 > 0$, 使得 $\|\mathbf{e}\| \leq E_0$; 此外, 如果参考输入 $r(t)$ 是有界的, 那么状态变量 $\mathbf{x}$ 亦有界.

证 因为 $V(\mathbf{e}) \geq 0$ 且 $\dot{V}(\mathbf{e}) \leq 0$, 故 $\exists V_0 > 0$, 使得 $(\forall t)(V(\mathbf{e}) \leq V_0)$. 注意到

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{e}\|^2 \lambda_{\min}(P) \leq \frac{1}{2}\mathbf{e}^T P \mathbf{e} = V(\mathbf{e}) \leq V_0,$$

式中 $\lambda_{\min}(P)$ 表示矩阵 P 的最小特征值. 由于 P 正定, 所以 $\lambda_{\min}(P) > 0$, 从而

$$\|\mathbf{e}\| \leq \sqrt{2V_0/\lambda_{\min}(P)},$$

取 $E_0 = \sqrt{2V_0/\lambda_{\min}(P)}$ 便证出第 1 个结论.

现在设 $r(t)$ 有界, 于是 $\exists M_r > 0$, 使得 $(\forall t)(\|\mathbf{r}\| \leq M_r)$, 其中

$$\mathbf{r}(t) = (r(t), \dot{r}(t), \dots, r^{(n-1)}(t)).$$

注意 $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{x}$, 显然有 $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{e}\| \leq M_r + E_0$, 取 $M_x = M_r + E_0$, 便有 $\|\mathbf{x}\| \leq M_x$.

现在来讨论伸缩因子 $\beta(t)$ 应具备什么样的形式. 为了更清楚起见, 记

$$u_c(\mathbf{e}, \beta) \triangleq u_c(t) = \beta(t)\omega(\mathbf{e}). \quad (43)$$

考察(36)式, 不难理解, 在 $u(t) = u_c(t) + u_s(t)$ 中, $u_s(t)$ 起到“粗调”的作用, 而 $u_c(t)$ 则扮演“微调”的角色. 根据推论 1, 在 $u_s(t)$ 的作用下, $\mathbf{e}$ 有界; 从而 $u_c(t)$ 应当有界. 注意到 $|\bar{\omega}(\mathbf{e})| \leq 1$, 故 $\beta(t)$ 有界, 设为 M_β , 即 $|\beta(t)| \leq M_\beta$. 现在设

$$\beta^* \triangleq \arg \min \{ \|\mathbf{u}_c(\mathbf{e}, \beta) - \mathbf{u}^*\|_\infty \mid |\beta| \leq M_\beta \}, \quad (44)$$

式中 $\arg$ 表示在 β 的范围内满足 $\min \|\mathbf{u}_c(\mathbf{e}, \beta) - \mathbf{u}^*\|_\infty$ 的最优的 β . 构造残差函数:

$$\delta(t) \triangleq u_c(\mathbf{e}, \beta^*) - \mathbf{u}^*(t), \quad (45)$$

那么误差方程(39)可改写为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= A\mathbf{e} + B[u_c(\mathbf{e}, \beta^*) - u_c(\mathbf{e}, \beta)] - B\mathbf{u}_s(t) - B\delta(t) \\ &= A\mathbf{e} + B\eta(t)\omega(\mathbf{e}) - B\mathbf{u}_s(t) - B\delta(t),\end{aligned} \quad (46)$$

式中已置 $\eta(t) = \beta^* - \beta(t)$. 由此构造一个能量函数:

$$V(t) \triangleq \frac{1}{2}\mathbf{e}^T P \mathbf{e} + b/(2K_1)\eta^2(t), \quad (47)$$

其中 K_1 为一个常数. 将 $V(t)$ 对 t 求导数并注意到(40)和(47)式可得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P_n b(\eta(t)\omega(\mathbf{e}) - \mathbf{u}_s - \delta(t)) + b/K_1\eta(t)\dot{\eta}(t) \\ &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} - \mathbf{e}^T P_n b(\mathbf{u}_s + \delta(t)) + b/K_1\eta(t)(K_1\mathbf{e}^T P_n \omega(\mathbf{e}) + \dot{\eta}(t)).\end{aligned} \quad (48)$$

由 u_s 的规定可知 $e^T P_n b u_s \geq 0$, 另外 $\delta(t)$ 为残差, 只要 $\delta(t)$ 足够小以致于

$$-\frac{1}{2} e^T Q e - e^T P_n b \delta(x) \leq 0, \quad (49)$$

那么由(48)式有

$$\dot{V} \leq b/K_1 \eta(t) (K_1 e^T P_n \omega(e) + \dot{\eta}(t)). \quad (50)$$

注意到 $\dot{\eta}(t) = -\dot{\beta}(t)$, 故我们有理由选择

$$\dot{\beta}(t) = K_1 e^T P_n \omega(e) = K_1 e^*(t) \omega(e), \quad (51)$$

代入(50)式便有 $\dot{V} \leq 0$. 这说明形如(46)式的系统是稳定的且 V 是 Lyapunov 函数. 注意到(51)式恰好是(27)式, 对(51)式积分后便得(28)式:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= K_1 \int_0^t \omega(e(\tau)) e^T(\tau) P_n d\tau + \beta(0) \\ &= K_1 \int_0^t \omega(e(\tau)) e^*(\tau) d\tau + \beta(0). \end{aligned}$$

注3 因为 $|\omega(e)| \leq 1$, 即 $\omega(e)$ 的变化幅度不大, 故在一定的场合中可近似认为 $\omega(e) \approx 1$; 从而有 $\dot{\beta}(t)$ 的近似表达式:

$$\dot{\beta}(t) \approx K_1 e^T P_n = K_1 e^*(t), \quad (52)$$

此即(21)式(此时忽略“ $\approx$ ”与“ $=$ ”的区别). 再对(52)式积分便复得(22)式(此时亦忽略“ $\approx$ ”与“ $=$ ”的区别):

$$\beta(t) = K_1 \int_0^t e^T(\tau) P_n d\tau + \beta(0) = K_1 \int_0^t e^*(\tau) d\tau + \beta(0). \quad (53)$$

为了确保 $\beta(t)$ 有界, 还必须对(51)或(52)式进行改造, 其实质是把 $\dot{\beta}(t)$ 作为一个分段函数, 这里关键的手段是如何设置函数分段的判别条件. 为此构造能量函数

$$V(\beta(t)) \triangleq \frac{1}{2} \beta^2(t), \quad (54)$$

要证 $\beta(t)$ 有界, 只需证 $V(\beta(t))$ 有界. 注意到

$$\dot{V}(\beta(t)) = \beta \dot{\beta} = K_1 e^* \omega(e) \beta, \quad (55)$$

故 $K_1 e^* \omega(e) \beta \leq 0$ 便是所求的条件. 从而我们取

$$\dot{\beta}(t) = \begin{cases} K_1 e^* \omega(e), & |\beta| < M_\beta, \text{ 或 } |\beta| = M_\beta \text{ 且 } e^* \omega(e) \beta \leq 0, \\ 0, & |\beta| \geq M_\beta \text{ 且 } e^* \omega(e) \beta > 0. \end{cases} \quad (56)$$

不难看出, (56)式便保证了 $|\beta| \leq M_\beta$.

最后我们要证明, 在一定条件下, $\|e(t)\| \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

定理2 在上述诸条件下, 如果残差 $\delta(t)$ 是平方可积的, 即 $\int_0^\infty \delta^2(t) dt < \infty$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.

证 考虑(48)式,

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e - e^* b u_s - e^* b \delta + b/K_1 \eta(t) (K_1 e^*(t) \omega(e) + \dot{\eta}). \quad (57)$$

情形1 若 $|\beta| \geq M_\beta$ 且 $e^* \omega(e) \beta > 0$, 则 $\dot{\beta}(t) = 0$; 容易验证 $\frac{b}{K_1} \eta(t) (K_1 e^*(t) \omega(e) + \dot{\eta})$

≤ 0 , 故

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} - \mathbf{e}^* b u_s - \mathbf{e}^* b \delta. \quad (58)$$

情形 2 若 $|\beta| \leq M_\beta$, 或 $|\beta| = M_\beta$ 且 $\mathbf{e}^* \omega(\mathbf{e}) \beta \leq 0$, 则 $\dot{\beta}(t) = K_1 \mathbf{e}^* \omega(\mathbf{e})$, 从而

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} - \mathbf{e}^* b u_s - \mathbf{e}^* b \delta. \quad (59)$$

综合两种情况总有(58)式成立. 从 u_s 的构造可知 $\mathbf{e}^* b u_s \geq 0$, 故(58)式又可写为

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} - \mathbf{e}^* b \delta \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{e}\|^2 - \mathbf{e}^* b \delta \\ &= -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{e}\|^2 - \frac{1}{2} (\|\mathbf{e}\|^2 + 2 \mathbf{e}^T P_n b \delta + |P_n b \delta|^2) + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{1}{2} |P_n b \delta|^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} (\lambda_{\min}(Q) - 1) \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{1}{2} |P_n b \delta|^2, \end{aligned}$$

式中 $\lambda_{\min}(Q)$ 为正定矩阵 Q 的最小特征值. 由于 Q 的任意性, 总可选出适当 Q 使得 $\lambda_{\min}(Q) > 1$. 对上式两边求积分并整理有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|\mathbf{e}(\tau)\|^2 d\tau &\leq \frac{2}{\lambda_{\min}(Q) - 1} (|V(+\infty)| + |V(0)|) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{\min}(Q) - 1} |P_n|^2 b^2 \int_0^\infty \delta^2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (60)$$

因 $\mathbf{e}$ 与 β 均有界, 故从(47)式知 $V(t)$ 有界, 从而 $|V(+\infty)| + |V(0)| < +\infty$; 由条件 $\int_0^\infty \delta^2(\tau) d\tau < \infty$ 便得出 $\mathbf{e} \in L_2$, 再根据(46)式有 $\dot{\mathbf{e}} \in L_2$. 利用 Barbalat 定理^[8]便证出 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$.

4 二阶系统的仿真实验

考虑文献[5]中采用的二阶系统, 即 Duffing 强迫振动系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.1x_2 - x_1^3 + 12 \cos t + u(t). \end{aligned}$$

取 $e(t)$ 的论域为 $[-2, 2]$, 相应的模糊划分为 $A_1 = NB$, $A_2 = NM$, $A_3 = NS$, $A_4 = ZO$, $A_5 = PS$, $A_6 = PM$, $A_7 = PB$; $\dot{e}(t)$ 的论域为 $[-8, 8]$, 相应的模糊划分为 $B_1 = NB, \dots, B_7 = PB$. 这些隶属函数均取为三角形隶属函数. 控制量决策方案见表 1.

表 1 控制量决策方案

e	$\dot{e}$						
	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB	-3	-3	-3	-3	-2	0	0
NM	-3	-3	-3	-3	-2	0	0
NS	-2	-2	-2	-2	0	1	1
ZO	-2	-2	-1	0	1	2	2
PS	-1	-1	0	2	2	2	2
PM	0	0	2	3	3	3	3
PB	0	0	2	3	3	3	3

取 $\bar{k} = (1, 2)^T$, $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, 由 Lyapunov 方程解出 $P = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$, 于是 $P_2 = (5, 5)^T$. 再取 $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1.5$, $B = (0, 1)^T$, $M_\beta = 30$; 伸缩因子 $\alpha_1(e)$, $\alpha_2(e, \dot{e})$ 分别为

$$\alpha_1(e) = 1 - 0.97\exp(-e^2),$$

$$\alpha_2(e, \dot{e}) = 1 - 0.97\exp(-0.2e^2 - 0.8\dot{e}^2).$$

令 $r_{ij} = A_i(e)B_j(\dot{e})$, 则 $\bar{\omega}(t)$ 的计算式为

$$\begin{aligned} \omega(t) = & U[-3(r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{21} + r_{22} + r_{23} + r_{24}) \\ & - 2(r_{15} + r_{25} + r_{31} + r_{32} + r_{33} + r_{34} + r_{41} + r_{42}) - (r_{43} + r_{51} + r_{52}) \\ & + (r_{36} + r_{37} + r_{45}) + 2(r_{46} + r_{47} + r_{54} + r_{55} + r_{56} + r_{57} + r_{63} + r_{73}) \\ & + 3(r_{64} + r_{65} + r_{66} + r_{67} + r_{74} + r_{75} + r_{76} + r_{77})]. \end{aligned}$$

为了扩大该系统的稳定域, 引入一个符号因子

$$I^* \triangleq \begin{cases} -1, & (x_1^0 > 0 \text{ 且 } x_2^0 \geq 0) \text{ 或 } (x_1^0 \geq 0 \text{ 且 } x_2^0 > 0), \\ 1, & \text{其他,} \end{cases} \quad (61)$$

这里 $x(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ 为状态的初值. 然后取 $\omega^*(t) = I^* \omega(t)$. 于是控制函数 $u_c(t)$ 便为

$$u_c(t) = \beta(t)\omega^*(t), \quad (62)$$

其中 $\beta(t)$ 按(56)式来计算且 $\omega(t)$ 要换为 $\omega^*(t)$:

$$\beta(t) = \begin{cases} K_1 \int_0^t \omega^*(\tau) e^T P_n d\tau + \beta(0), & |\beta| < M_\beta, \text{ 或 } |\beta| = M_\beta \text{ 且 } e^* \omega(e) \beta \leq 0, \\ 0, & |\beta| \geq M_\beta \text{ 且 } e^* \omega(e) \beta > 0, \end{cases}$$

其中取 $\beta(0) = 1$, $K_1 = 4$, $U = 2$. 另外, 取 $f_0(x) = 12$

$+ |x_1|^3$. 注意, 加上补偿 u_s 之后的控制函数 $u(t)$

应取为: $u(t) = \beta(t)\omega^*(t) + u_s$. 显然下列初值几

乎概括了有界相平面内所有可能的情况: $x(0) = (2,$

$2)^T$, $(0, 2)^T$, $(-2, 2)^T$, $(2, -2)^T$, $(0, -2)^T$, $(-2,$

$-2)^T$, $(2, 0)^T$, $(0, 0)^T$, $(-2, 0)^T$. 我们对这些初值

均做了仿真实验, 其结果很好, 比文献[5]的结果好

得多; 比如文献[5]的调整时间 $t_f = 60$, 而我们的 $t_f =$

0.5 左右, 且系统输出无超调, 稳态误差极小.

$x(0) = (2, 2)^T$ 的仿真结果见图 6~8.

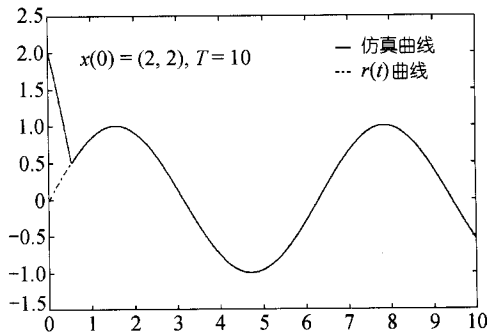


图6 $r(t) = \sin t$ 的仿真曲线

注4 上述方法具有相当的普适性, 在同样的参数下, 我们对熟知的 Vanderpol 方程做了仿真实验:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1^2) - x_1 + u(t),$$

其结果几乎与 Duffing 方程的结果一样. 此外, 我们还对许多二阶非线性方程做了仿真实验,

其结果也几乎差不多; 其中, 我们随机构造了一个很复杂的二阶非线性方程:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

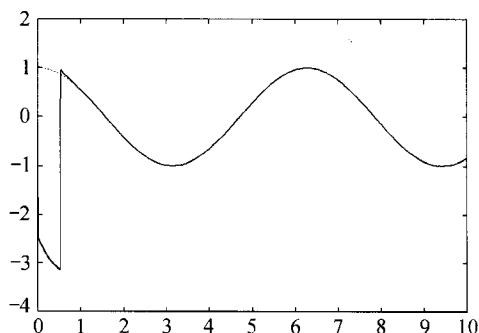
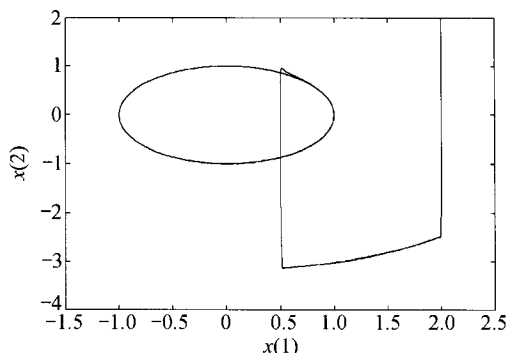
图 7 $dr/dt = \cos t$ 的仿真曲线

图 8 Duffing 方程仿真的相平面曲线

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & 3x_2^2 \sin t - \frac{1}{2} x_2 \cos t \sin^9 t - x_1 \sin(100\pi t) \frac{1 - \exp(-x_1)}{1 + \exp(-x_1)} \\ & - x_1^2 \frac{1 - \exp(-x_2)}{1 + \exp(-x_2)} + u(t). \end{aligned}$$

关于它的仿真结果也非常好。

注 5 符号因子 I^* (见(61)式)是很重要的,它可以很大程度上扩大稳定域;经实验表明, I^* 也与被控对象的选择无关,这意味着 I^* 是一种普适的稳定性补偿。

注 6 在应用中,为了加快响应速度,还可以在控制函数 $u(t)$ 上附一个伸缩因子(这样处理后的控制函数仍记为 $u(t)$):

$$u(t) = (\beta(t)\omega^*(t) + u_s)(1 - 0.9 \exp(-0.5e^2 - 0.5e^2)).$$

5 结论

根据文献[1~3]中有关变论域自适应模糊控制器的结果来讨论形如(16)和(17)式的非线性系统的稳定自适应控制问题,主要工作的特点和结果如下:

1) 采用积分调节自适应原理设计了作用于推理后件的伸缩因子 $\beta(t)$, 对于一阶非线性系统进行了仿真实验,其结果要远远优于文献[5, 6]中相应的结果。

2) 利用 Lyapunov 方法证明了我们提出的变论域自适应模糊控制是稳定的自适应控制,且具有积分自适应调节原理的伸缩因子 $\beta(t)$ 是一种恰当的形式。

3) 提出了形如(61)式的符号因子,它可以大幅度提高系统的稳定域。通过对二阶非线性系统的仿真实验发现符号因子是普适的,即不依赖被控对象的选择;这样一来,带有符号因子的变论域自适应模糊控制也是普适的稳定自适应控制且具有较大的稳定域;仿真结果要远远优于文献[5]中相应的仿真结果。

4) 通过大量仿真实验,我们发现变论域自适应模糊控制是用来处理非线性系统的有力工具,它具有调整时间短、超调量极小、稳态精度非常高、鲁棒性强、且具有较大稳定域等特点。

5) 采用变论域自适应模糊控制器实现了四级倒立摆控制的仿真实验^[9],不但具有良好的稳定性和鲁棒性,还可使倒立摆小车行走到指定的位置(即定位功能)。事实上,多级倒立摆控制系统为多变量非线性系统^[10],它的运动控制十分困难,即便采用模糊推理有时也难以奏

效^[7,11~13];文献[9]的结果表明,采用变论域自适应模糊控制器来控制多级倒立摆是非常有效的方案.

参 考 文 献

- 1 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功. 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1~14
- 2 李洪兴. 模糊控制的数学本质与一类高精度模糊控制器的设计. 控制理论与应用, 1997, 14(6): 868~876
- 3 李洪兴. 变论域自适应模糊控制器. 中国科学, E 辑, 1999, 29(1): 32~42
- 4 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学, E 辑, 1998, 28(3): 259~267
- 5 Wang L X. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1993, 1(2): 146~155
- 6 Tsay D L, Chung H Y, Lee C J. The adaptive control of nonlinear systems using the Sugeno-type of fuzzy logic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(2): 225~229
- 7 李洪兴. 模糊逻辑系统与前向式神经网络等价. 中国科学, E 辑, 2000, 30(2): 150~163
- 8 韩曾晋. 自适应控制. 北京: 清华大学出版社, 1995. 19~20
- 9 李洪兴, 苗志宏, 王加银. 四级倒立摆的变论域自适应模糊控制. 中国科学, E 辑, 2002, 32(1): 65~75
- 10 张乃尧. 典型模糊控制器的结构分析. 模糊系统与数学, 1997, 11(2): 10~21
- 11 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 $\cap$ 算法. 中国科学, E 辑, 1999, 29(1): 43~53
- 12 徐 杨, 赵海良, 宋振明, 等. 不确定性推理. 成都: 西南交通大学出版社, 1994
- 13 吴望名. 模糊推理的原理与方法. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994