



关于从闭区间到完备随机赋范模的抽象值函数的 Riemann 可积性的进一步研究

吴明智

北京航空航天大学数学与系统科学学院, 教育部数学、信息与行为重点实验室, 北京 100191

E-mail: wumz@smss.buaa.edu.cn

收稿日期: 2012-05-08; 接受日期: 2012-06-20

国家自然科学基金 (批准号: 11171015) 资助项目

摘要 郭铁信和张霞最近引入和研究了从一个闭区间到一个完备随机赋范模的抽象值函数的 Riemann 积分, 证明了值域几乎处处有界的连续函数是 Riemann 可积的. 本文首先给出该结果的一个更简短的证明, 使得我们对于值域的几乎处处有界性有一个更深的认识, 受此启发, 我们进一步构造两个例子, 其一说明值域并非几乎处处有界的连续函数也可以是 Riemann 可积的, 另一例子说明连续函数可以非 Riemann 可积. 最后, 我们证明从一闭区间到一个满支撑的完备随机赋范模的所有连续函数都 Riemann 可积的充要条件是基底概率空间本质上由至多可数原子生成.

关键词 随机赋范模 抽象值函数 Riemann 积分

MSC (2010) 主题分类 46H25, 46G10, 46S50

1 引言

在过去的十多年中, 随机赋范模 (简记为 RN- 模) 理论及其应用在随机共轭空间的框架下经历了系统而深入的发展, 参见 [1–8]. 最近, 为建立复完备随机内积模上随机酉算子群的 Stone 表示定理以及为一些相关课题的研究作准备, 郭铁信和张霞在文献 [9] 中引入和研究了从一个闭区间到一个赋以 (ε, λ) - 拓扑完备的 RN- 模的抽象值函数的 Riemann 积分. 由于一般情况下, RN- 模的结构很复杂, 其中的 (ε, λ) - 拓扑有界集的性质太弱, 导致对于一个取值于 RN- 模的连续函数, 其 Riemann 可积性也是难以把握的. 对此, 郭铁信和张霞在文献 [9] 中仅证明从闭区间 $[a, b]$ 到一个完备 RN- 模 $(S, \|\cdot\|)$ 的值域几乎处处有界的连续函数是 Riemann 可积的. 尽管该结果满足文献 [9] 的需要, 但是关于此种 Riemann 积分仍然有一些基本的问题值得进一步讨论. 首先, 文献 [9] 中的结果的适用性怎样? 文献 [9] 通过例子已经指出并非所有的连续函数都满足几乎处处有界性, 但是不满足该条件是否意味着非 Riemann 可积仍不清楚. 其次更重要的是, 鉴于文献 [9] 中并没有给出非平凡的非 Riemann 可积的函数的例子, 我们并不清楚, 尽管此种 Riemann 积分很复杂, 是否和取值于 Banach 空间的函数的 Riemann 积分一样: 所有这种连续函数是否必然可积?

本文对于上述两个问题做出了透彻的分析. 确切地讲, 我们首先对郭铁信和张霞的上述可积性结果给出一个新的更简洁的证明. 如同 [9] 中的证明一样, 这一新的证明也表明, 在函数值域几乎处处有界性假设下, 所考虑的 Riemann 可积性事实上可由通常的 Banach 空间值连续函数的 Riemann 可积

英文引用格式: Wu M Z. A further study on the Riemann-integrability for abstract-valued functions from a closed real interval to a complete random normed module (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(9): 897–903, doi: 10.1360/012012-267

性来判定. 接下来受这一证明的启发, 我们构造出两个例子, 其中一个表明值域并不几乎处处有界的连续函数也可以是 Riemann 可积的, 在这个例子中, 我们给出的函数 f 的值域不仅不是几乎处处有界的, 甚至是几乎处处无界的, 即满足 $\bigvee_{t \in [a, b]} \|f(t)\| = \infty$! 另一个例子说明对于此种 Riemann 积分, 连续函数的确可以是不可积的. 最后, 我们转到一般情况的讨论, 通过提升所举的例子当中的构造技巧, 我们证明从一个闭区间到一个满支撑的完备 RN- 模的所有连续函数都 Riemann 可积的充要条件是, 该 RN- 模的基底概率空间本质是由至多可数原子生成的.

2 必要的概念和事实

本节我们回顾一些必要的概念和事实.

本文将采用如下记号, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 表示一个概率空间, $\mathbb{N}$ 为正整数集合, K 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, $L^0(\mathcal{F}, K)$ 表示 Ω 上的所有 K - 值 $\mathcal{F}$ - 可测随机变量的等价类在通常的点式加法、乘法和数乘运算下所成的代数. $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})(\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R}))$ 表示 Ω 上的所有实值 (广义实值) $\mathcal{F}$ - 可测随机变量等价类所成的集合, 进一步, $L_+^0 := \{\xi \in L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R}) \mid \xi \geq 0\}$. 对于任给 $\xi \in L^0(\mathcal{F}, K)$, $|\xi|$ 表示 $|\xi^0|$ 的等价类, 这里 ξ^0 是 ξ 的任一选定的代表元, 而 $|\xi^0|: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ 定义为 $|\xi^0|(\omega) = |\xi^0(\omega)|$, $\forall \omega \in \Omega$, 显然 $|\xi| \in L_+^0$. 在本文中, I_A 表示 $\mathcal{F}$ - 可测集 A 的特征函数, 而 $\tilde{I}_A$ 表示 I_A 的等价类.

命题 2.1 ^[10] $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 上定义序关系 $\leq: \xi \leq \eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega) \leq \eta^0(\omega)$ 对几乎所有 $\omega \in \Omega$ 成立, 其中 ξ^0 和 η^0 分别是 ξ 与 η 的任一代表元, 则有

- (1) 对任一子集 $A \subset \bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, A 在 $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 中必有上确界 (简记为 $\bigvee A$) 以及下确界 (简记为 $\bigwedge A$), 并且在 A 中分别存在两个序列 $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\bigvee_{n \geq 1} a_n = \bigvee A$ 和 $\bigwedge_{n \geq 1} b_n = \bigwedge A$;
- (2) 如果 A 是上定向 (下定向) 的, 那么上述 $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}(\{b_n, n \in \mathbb{N}\})$ 可以选为非降 (非增) 的;
- (3) 作为 $\bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 的子格, $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 在下述意义下是完备的: 每一个有上界的子集有上确界 (等价地, 每一个有下界的子集有下确界).

定义 2.1 ^[1,4] 称有序对 $(S, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个随机赋范模 (简记为 RN- 模), 如果 S 是代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模, $\|\cdot\|$ 是从 S 到 L_+^0 的映射, 使得如下三条公理满足:

(RN-1) $\|\xi x\| = |\xi| \|x\|, \forall \xi \in L^0(\mathcal{F}, K)$ 和 $\forall x \in S$;

(RN-2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in S$;

(RN-3) $\|x\| = 0$ 蕴含 $x = \theta$ (S 中的零向量).

而此时, $\|\cdot\|$ 称为 S 的 L^0 - 范数且 $\|x\|$ 称为向量 x 的 L^0 - 范数.

例 2.1 显然, $L^0(\mathcal{F}, K)$ 是自身的一个左模, $(L^0(\mathcal{F}, K), |\cdot|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个 RN- 模.

在本文中, 对于给定的数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN- 模 $(S, \|\cdot\|)$, 我们总假定 S 上赋予 (ε, λ) - 拓扑. 其定义如下:

定义 2.2 设 $(S, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN- 模. 对任意 $\varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1$, 设 $N(\varepsilon, \lambda) = \{x \in S \mid P\{\omega \in \Omega : \|x\|(\omega) < \varepsilon\} > 1 - \lambda\}$, 那么集族 $\mathcal{U}_\theta = \{N(\varepsilon, \lambda) \mid \varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1\}$ 构成 S 上某个可度量化线性拓扑在 θ 点的局部基, 该拓扑称为 S 的 (ε, λ) - 拓扑.

注 2.1 (ε, λ) - 拓扑最初是 Schweizer 和 Sklar 为研究概率度量空间理论而于 1961 年引入的, 更多内容请参见专著 [11]. 在本文中我们总是利用下述事实: 对于任一给定 RN- 模 S , S 中的序列

$\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ 依 (ε, λ) - 拓扑收敛于 $x \in S$ 当且仅当序列 $\{\|x_n - x\|, n \in \mathbb{N}\}$ 依概率 P 收敛于 0; 因而特别地, $(L^0(\mathcal{F}, K), \|\cdot\|)$ 上的 (ε, λ) - 拓扑就是熟知的依概率收敛拓扑.

接下来我们回顾 RN- 模的支撑这一概念以及一个相关的事实.

定义 2.3^[3] 设 $(S, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN- 模. 令 $\xi = \bigvee\{\|x\| \mid x \in S\}$ (一般地, $\xi \in \bar{L}^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$), 设 ξ^0 是其任一选定代表元, 则集合 $\{\omega \mid \xi^0(\omega) > 0\}$ 称为 S 的一个支撑. 如果 Ω 为 S 的一个支撑, 就称 S 是满支撑的.

在 RN- 模及其随机共轭空间理论的研究中, 如果我们讨论的是 (ε, λ) - 拓扑的问题, 总可以假定 RN- 模为满支撑的. 事实上, 若正概率集 A 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN- 模 $(S, \|\cdot\|)$ 的一个支撑 (支撑为零概率集的 RN- 模研究中是不感兴趣的), 我们考虑概率空间 $(A, A \cap \mathcal{F}, P_A)$, 其中概率

$$P_A: A \cap B \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \forall B \in \mathcal{F},$$

并且定义 $\|\cdot\|_A: S \rightarrow L_+^0(A, A \cap \mathcal{F}, P_A)$ 为

$$\|x\|_A = \|x\| \text{ 在 } A \text{ 上的限制},$$

则 $(S, \|\cdot\|_A)$ 是数域 K 上以 $(A, A \cap \mathcal{F}, P_A)$ 为基的满支撑的 RN- 模, 并且易知 $(S, \|\cdot\|_A)$ 和 $(S, \|\cdot\|)$ 具有相同的 (ε, λ) - 拓扑结构.

命题 2.2^[3] 设 $(S, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN- 模, A 是 S 的一个支撑. 则在 S 的随机闭单位球 $S(1) := \{x \in S \mid \|x\| \leq 1\}$ 中存在序列 $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\{\|x_n\|, n \in \mathbb{N}\}$ 以非降的方式收敛于 $\tilde{I}_A$. 进一步, 如果 S 是完备的, 则存在 $x \in S$ 满足 $\|x\| = \tilde{I}_A$.

本节最后, 我们回顾郭铁信和张霞在文献 [9] 中引入的从一个闭区间到一个 RN- 模的抽象值函数的 Riemann 积分的概念, 以及他们给出的可积性结果.

定义 2.4^[9] 设 $(S, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN- 模. 从 $[a, b]$ 到 S 的函数 f 称为 Riemann 可积的, 如果存在 $I \in S$ 具有下述性质: 任给 $\varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1$, 存在正数 $\delta(\varepsilon, \lambda)$ 使得对 $[a, b]$ 的任意有限划分 $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ 及任意选定的 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) 只要划分的模长 $\lambda(\mathcal{P}) := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\} < \delta(\varepsilon, \lambda)$ 就有

$$P\left\{\omega \in \Omega \mid \left\|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right\|(\omega) < \varepsilon\right\} > 1 - \lambda,$$

此时称 I 为 $[a, b]$ 上 f 的 Riemann 积分.

注 2.2 形如上述定义中 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 的表达式称为 f 在 $[a, b]$ 上的一个 Riemann 和. 显然, 如果存在 f 在 $[a, b]$ 上的一个 Riemann 和的序列 $\{R_n, n \in \mathbb{N}\}$, 其相应划分的模长序列趋于 0, 但是 $\{R_n, n \in \mathbb{N}\}$ 并非 S 中的 Cauchy 列, 则 f 必然不是 Riemann 可积的. 我们将在下文中多次利用此简单事实.

命题 2.3^[9] 设 $(S, \|\cdot\|)$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的完备 RN- 模, $f: [a, b] \rightarrow S$ 为连续函数, 如果 $\bigvee_{t \in [a, b]} \|f(t)\| \in L_+^0$, 则 f 是 Riemann 可积的.

3 主要结果及其分析和证明

设 $(S, \|\cdot\|)$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的完备 RN- 模, 任意给定 $p \in [1, \infty]$, S 可以生成一个 Banach 空间 $L^p(S)$, 利用二者的关系时常能够将 RN- 模上的问题转化成 Banach 空间上的问题, 从而

为运用经典泛函分析中的结论或者技巧提供便利, 可参见文献 [2,9,12,13] 等. 事实上, 郭铁信和张霞在文献 [9] 中证明他们的可积性定理 2.1 (即本文上述命题 2.3) 时, 就运用了这一技巧, 他们的做法是先对 Ω 进行适当剖分, 使得在每一部分上, 积分转化为 Banach 空间 $L^2(S)$ 上连续函数的 Riemann 积分, 最后再将各部分的积分拼接起来. 我们这里将采取一种更简洁的方法. 为此, 设 Π 表示 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上所有和 P 等价的概率测度的全体, 我们引入一系列 Banach 空间

$$L_Q^1(S) := \left\{ x \in S \mid \int_{\Omega} \|x\| dQ < +\infty \right\},$$

这里 $Q \in \Pi$, 而 $L_Q^1(S)$ 中的范数自然记作 $\|\cdot\|_1^Q$, 即有 $\|x\|_1^Q = \int_{\Omega} \|x\| dQ, \forall x \in L_Q^1(S)$. 我们有如下 Riemann 可积性的结果:

定理 3.1 设 $(S, \|\cdot\|)$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的完备 RN-模, $f: [a, b] \rightarrow S$ 为一连续函数. 如果存在 $Q \in \Pi$ 使得 $f(t) \in L_Q^1(S), \forall t \in [a, b]$, 并且 $f: [a, b] \rightarrow (L_Q^1(S), \|\cdot\|_1^Q)$ 也连续, 则 f 是 Riemann 可积的.

证明 在所给假设下, f 作为闭区间 $[a, b]$ 到 Banach 空间 $(L_Q^1(S), \|\cdot\|_1^Q)$ 的函数是通常意义下 Riemann 可积的, 设其积分值为 I , 显见 I 也是 $[a, b]$ 上 f 在本文定义 2.4 下的 Riemann 积分值. $\square$

从定理 3.1 的证明可见, 在所给假设下, 所考虑的积分实际上就是一个取值于 Banach 空间的连续函数的 Riemann 积分. 我们指出, 如果 $f: [a, b] \rightarrow S$ 连续并且 f 的值域是几乎处处有界的, 即

$$\xi := \bigvee_{t \in [a, b]} \|f(t)\| \in L_+^0,$$

那么 f 必然满足定理 3.1 的假设, 因而定理 3.1 蕴含命题 2.3. 事实上, 只要通过 Radon-Nikodým 导数定义 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度 Q 为 $\frac{dQ}{dP} = \frac{m}{\xi+1}$, 其中 $m^{-1} = \int_{\Omega} \frac{1}{\xi+1} dP$, 则易见 $Q \in \Pi$ 使得 $f(t) \in L_Q^1(S), \forall t \in [a, b]$, 并且 Lebesgue 控制收敛定理表明 $f: [a, b] \rightarrow (L_Q^1(S), \|\cdot\|_1^Q)$ 连续.

注意到 $(L_Q^1(S), \|\cdot\|_1^Q)$ 中的有界集未必是几乎处处有界的, 定理 3.1 启发我们构造出如下例 3.1, 从而说明 Riemann 可积的连续函数的值域可以不是几乎处处有界的.

例 3.1 设 $\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]), P$ 为 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度. 由例 2.1, $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的完备 RN-模. 对于任一正整数 m 以及整数 $k \in [0, 2^m - 1]$, 设 $A_{m,k}$ 为将 $[0, 1]$ 等分为 2^m 个子区间中的第 $k+1$ 个子区间, 也即 $A_{m,k} = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$; 其次, 对于 $n = 2^m + k$, 令 $\xi_n = m\tilde{I}_{A_{m,k}}$. 因为任一正整数 $n \geq 2$ 都可以唯一表达成 $2^m + k$ 的形式, 因而我们都确切定义了 ξ_n ; 最后设 $\xi_1 = 1$. 易见, $\{\xi_n | n \in \mathbb{N}\}$ 是 Banach 空间 L^1 的单位球中的一个子集, 而且, 序列 $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ 按概率以及按 L^1 收敛于 0. 接下来, 我们定义 $[0, 1]$ 到 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 的连续函数 f . 为此, 对于任一正整数 n , 我们记 $t_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, 也即我们有 $t_1 = 0, t_2 = 1/2, t_3 = 3/4$, 如此等等. 我们先定义 f 在各 t_n 处的值相应为 ξ_n , 其次在两相邻 t_n 之间的点, 通过线性插值定义 f 的值, 最后 $f(1) = 0$. 易见 f 的定义是完善的, 并且是连续的, 事实上, f 的值域在 L^1 的单位球中, f 还是 L^1 连续的, 因而定理 3.1 说明 f 是 Riemann 可积的, 但是 $\bigvee_{t \in [0, 1]} |f(t)| \geq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |f(t_n)| = \infty$!

通过适当改变例 3.1 中的函数在各 t_n 处的值, 我们接下来给出一个并不 Riemann 可积的连续函数.

例 3.2 符号 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R}), t_n, A_{m,k}$ 如例 3.1, 对于不小于 2 的各个正整数 $n = 2^m + k$, 令 $\eta_n = 2^n \tilde{I}_{A_{m,k}}$, 而 $\eta_1 = 1$. 函数 $g: [0, 1] \rightarrow L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ 的定义方式类似于例 3.1 中的 f , 即先定义 g 在各 t_n 处的值相应为 η_n , 然后在两相邻 t_n 之间点处 g 的值通过线性插值定义, 最后 $g(1) = 0$. 则有 g 是连续的但是并不 Riemann 可积.

证明 g 的连续性的验证是简单的, 往下我们证明 g 不是 Riemann 可积的. 为此, 我们将构造函数 g 在 $[a, b]$ 上的一个 Riemann 和序列, 其相应划分的模长序列趋于 0, 但是该 Riemann 和序列却不是按概率收敛 Cauchy 列. 下面是构造过程. 对于任一形如 $n = 2^m$ 的 n , 我们先将区间 $[0, t_n]$ 等分为 n 个子区间, 并设这 n 个子区间的左端点依次为 $s_1^n = 0, \dots, s_i^n, \dots, s_n^n = \frac{n-1}{n}t_n$, 我们作 Riemann 和

$$R_n = \sum_{i=1}^n g(s_i^n) \frac{t_n}{n} + g(1)(1 - t_n),$$

而对于紧随的 $n+1$, 我们所作的 Riemann 和为

$$R_{n+1} = \sum_{i=1}^n g(s_i^n) \frac{t_n}{n} + \sum_{i=n}^{2n-1} g(t_i)(t_{i+1} - t_i) + g(1)(1 - t_{2n}).$$

然后, 对于其余的正整数 n , 我们将 $[0, 1]$ 等分为 n 个子区间, 取每个子区间右端点的函数值来作 Riemann 和, 即我们所作的 Riemann 和为

$$R_n = \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

依上述作法, 我们可见 Riemann 和 R_n 相应的划分的模长不超过 $\frac{1}{n}$, 但是注意 $g(1) = 0$, 对于任一形如 $n = 2^m$ 的 n , 我们有

$$R_{n+1} - R_n = \sum_{i=n}^{2n-1} g(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \tilde{I}_{A_{m,k}} = 1,$$

这就说明 $\{R_n, n \in \mathbb{N}\}$ 不是按概率收敛 Cauchy 列. $\square$

不难看出, 在例 3.2 中, 我们构造的函数 g 的值域仍然在 L^1 中, 只不过和例 3.1 中的 f 相比, g 在 $t=1$ 处不再是 L^1 连续的, 并且为了使得 g 不可积, g 的值域在 L^1 中是无界的.

最后, 我们转向一般情形的讨论. 我们将指出, 只要 RN- 模的基底概率空间是足够丰富的, 那么如例 3.2 中那样连续但非 Riemann 可积的函数就必定存在, 证明的关键就是例 3.2 中的构造技巧. 在给出结果之前, 我们先回顾如下定义 3.1 以及命题 3.1, 它们见于一般测度论或者概率论相关的教程, 例如可见文献 [10,14,15] 等.

定义 3.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间. 正概率集 A 称为一个原子, 如果 A 的任一子集 $B \in \mathcal{F}$, 必有 $P(B) = P(A)$ 或者 $P(B) = 0$. 显然, 一个概率空间至多能有可数多个两两不相交的原子. 称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为本质上纯原子生成的, 如果存在至多可数的两两不交的原子的族 $\{A_n : n \in \Lambda\}$ 使得 $\Omega = \sum_{n \in \Lambda} A_n$, 并且对于任一 $B \in \mathcal{F}$ 存在 $C \in \sigma\{A_n : n \in \Lambda\}$ 满足 $P(B \Delta C) = 0$.

命题 3.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一无原子概率空间, 则对任一给定 $a \in [0, 1]$, 都存在 $A \in \mathcal{F}$ 使得 $P(A) = a$.

下述命题 3.2 是人所熟知的, 其对定理 3.2 证明中的构造是一个关键的支持, 这里为了读者的方便, 我们给出利用命题 3.1 证明它的概要.

命题 3.2 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间, $A \in \mathcal{F}$ 是一不含原子的正概率集, 则对于任一正整数 n , 存在 A 的 $\mathcal{F}$ - 剖分 $\{A_1, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ 使得 $P(A_i) = \frac{1}{n}P(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

证明 由命题 3.1 不难得到, 如果 B 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中任一不含原子的正概率集, 那么对于任一给定 $a \in [0, P(B)]$, 都存在 B 的子集 $C \in \mathcal{F}$ 具有概率 $P(C) = a$. 通过反复运用该结论于 A 及其子集, 必可找到满足命题要求的 A 的 $\mathcal{F}$ - 剖分 $\{A_1, \dots, A_i, \dots, A_n\}$. $\square$

现在我们叙述并证明我们的结果.

定理 3.2 设 $(S, \|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的满支撑的完备 RN- 模. 则从 $[0, 1]$ 到 S 的连续函数均为 Riemann 可积的充要条件是基底空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 本质上是纯原子生成的.

证明 充分性. 假设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 本质上是至多可数原子集 $\{A_n : n \in \Lambda\}$ 生成的, 其中 Λ 为有限集或者可数集. 由原子的性质, 若 ξ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上任一可测函数, 则 ξ 必然在每一 A_n 上几乎为常值. 因而, 若 $f: [0, 1] \rightarrow S$ 为连续函数, 则对于任一固定 t , $\|f(t)\|$ 在每一 A_n 上几乎为常值, 于是可取代表元使其在 A_n 上等于某常数 $c_n(t)$, 由 f 的连续性可知 $c_n(\cdot)$ 为非负实值连续函数, 故 $\max_{t \in [0, 1]} c_n(t) < \infty$, 于是 f 的值域在 A_n 上是几乎处处有界的. 进而有, $\bigvee_{t \in [0, 1]} \|f(t)\| \in L_+^0$, 于是 f 必然是 Riemann 可积的.

必要性. 采用反证法. 如果 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 不是本质上由至多可数原子生成的, 我们将如例 3.2 构造出一个从 $[0, 1]$ 到 S 的非 Riemann 可积的连续函数. 为此, 我们设 $\{A_n : n \in \Lambda\}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的一个极大的两两不相交的原子构成的族, 令 $C = \Omega \setminus \sum_{n \in \Lambda} A_n$, 则 $P(C) > 0$, 且 C 中不含有原子. 由命题 3.2, 对于每个正整数 m , 都存在一组互不相交的可测集 $\{B_{m,k} : k = 0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ 使得

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} B_{m,k} = C$$

并且

$$P(B_{m,k}) = \frac{1}{2^m} P(C), \quad k = 0, \dots, 2^m - 1.$$

因为 $(S, \|\cdot\|)$ 为满支撑的完备 RN- 模, 依据命题 2.2, 存在 $x \in S$ 满足 $\|x\| = 1$. 设 $x_1 = x$, 而对于 $n \geq 2$, 由于其可以唯一表示成 $n = 2^m + k$ 的形式, 令 $x_n = 2^n \tilde{I}_{B_{m,k}} x$. 接下来, 设 t_n 如同例 3.1 所述, 类似于例 3.1 中的方式, 我们定义 $[0, 1]$ 到 S 的连续函数 f 如下: f 在各 t_n 处的值相应为 x_n , 在两相邻 t_n 之间点处 f 的值通过线性插值定义, 而 $f(1)$ 为 S 的零元. 我们接下来说明 f 非 Riemann 可积. 为此, 对于每个正整数 n , 相应地取与例 3.2 中 Riemann 和 R_n 相同的剖分并且在每个区间取同样点处的函数值作 Riemann 和 S_n , 则自然有 Riemann 和序列 $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ 相应划分的模长序列趋于 0, 但是对于任一形如 $n = 2^m$ 的 n , 我们有

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \left\| \sum_{i=n}^{2n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} \tilde{I}_{B_{m,k}} x \right\| = \tilde{I}_C,$$

由此就说明了 f 不是 Riemann 可积的. $\square$

注 3.1 在 RN- 模及其随机共轭空间理论研究中, 类似于定理 3.2, 为了某个熟知的经典泛函分析中的结论或者性质在一给定 RN- 模上仍然成立必须要求该 RN- 模的基底空间是本质上纯原子生成的, 这样的结果并不鲜见. 在此, 我们提请注意文献 [16] 以及文献 [3] 的结果: 为使得一给定 RN 模上有足够多连续线性泛函, 以及为使得一 RN- 模的随机共轭空间的闭单位球是随机弱星紧的, 基底空间都必须要求是本质上纯原子生成的.

参考文献

- 1 Guo T X. Some basic theories of random normed linear spaces and random inner product spaces. Acta Anal Funct Appl, 1999, 1: 160-184
- 2 Guo T X, Li S B. The James theorem in complete random normed modules. J Math Anal Appl, 2005, 308: 257-265

- 3 Guo T X. The relation of Banach-Alaoglu theorem and Banach-Bourbaki-Kakutani-Šmulian theorem in complete random normed modules to stratification structure. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 1651–1663
- 4 Guo T X. Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module. *J Funct Anal*, 2010, 258: 3024–3047
- 5 Guo T X. Recent progress in random metric theory and its applications to conditional risk measures. *Sci China Math*, 2011, 54: 633–660
- 6 Guo T X, Shi G. The algebraic structure of finitely generated $L^0(\mathcal{F}, K)$ -modules and the Helly theorem in random normed modules. *J Math Anal Appl*, 2011, 381: 833–842
- 7 Zhao S E, Guo T X. The random subreflexivity of complete random normed modules. *Internat J Math*, 2012, 23: Article ID 1250047
- 8 Guo T X, Yang Y J. Ekeland's variational principle for an $\bar{L}^0$ -valued function on a complete random metric space. *J Math Anal Appl*, 2012, 389: 1–14
- 9 郭铁信, 张霞. 复完备随机内积模上的随机酉算子群的 Stone 表示定理. *中国科学: 数学*, 2012, 42: 181–202
- 10 Dunford N, Schwartz J T. *Linear Operators(I)*. New York: Interscience, 1957
- 11 Schweizer B, Sklar A. *Probabilistic Metric Spaces*. New York: Dover Publications, 2005
- 12 Guo T X, Zeng X L. Random strict convexity and random uniform convexity in random normed modules. *Nonlinear Anal*, 2010, 73: 1239–1263
- 13 Wu M Z. The Bishop-Phelps theorem in complete random normed modules endowed with the (ε, λ) -topology. *J Math Anal Appl*, 2012, 391: 648–652
- 14 Bogachev V I. *Measure Theory(I)*. Beijing: Higher Education Press, 2010
- 15 Dudley R M. *Real Analysis and Probability*, Second Edition. Beijing: China Machine Press, 2006
- 16 郭铁信, 曾小林. 随机赋范模上非零连续线性泛函的存在性. *工程数学学报*, 2008, 25: 117–123

A further study on the Riemann-integrability for abstract-valued functions from a closed real interval to a complete random normed module

WU MingZhi

Abstract Guo and Zhang lately introduced and investigated the Riemann integral for abstract-valued functions from a closed real interval to a complete random normed module, they proved that a continuous function whose range is almost surely bounded is Riemann-integrable. In this paper, we first give a more concise proof of their result, leading us to a further understanding of almost surely boundedness of range. Then, we are inspired to construct two examples, one of which suggests that a continuous function whose range is not almost surely bounded may also be Riemann-integrable, while the other shows a continuous function may be not Riemann-integrable. Finally, we prove that all continuous functions from a fixed closed interval to a given complete random normed module with full support are Riemann-integrable if and only if the base probability space is essentially generated by at most countably many atoms.

Keywords random normed module, abstract-valued function, Riemann integral

MSC(2010) 46H25, 46G10, 46S50

doi: 10.1360/012012-267