具有极值亏量和的亚纯函数

张　广　厚
(中国科学院数学研究所，北京)

摘　　要

设 $w=f(z)$ 是一个下级为 μ 的亚纯函数，$z=g(w)$ 是 $f(z)$ 的反函数. 记 $g(w)$ 的判别直接超越奇点个数为 l, $f(z)$ 的亏值个数为 p，其中 l' 个亏值同时是 $g(w)$ 的直接超越奇点. 文中证明了如下结果:

假设 $f(z)$ 的亏量总和

$$\Delta(f)=\sum_a \delta(a,f),\ \delta(a,f)>0$$

等于 2, 则有 $p-l'+l\leqslant 2\mu$.

一、引　　言

1. 设 $w=f(z)$ 是 z 平面上的亚纯函数，$z=g(w)$ 是 $f(z)$ 的反函数. $f(z)$ 的亏值个数和 $g(w)$ 的判别直接超越奇点个数之间存在着密切的关系. 1978 年，作者证明了下述结果[1]:

记 $f(z)$ 的茹利雅方向个数为 q, $g(w)$ 的判别直接超越奇点个数为 l, $f(z)$ 的亏值个数为 p，其中 l' 个亏值同时是 $g(w)$ 的直接超越奇点.

假设 $f(z)$ 的下级 $\mu<+\infty$，则有 $p-l'+l\leqslant q$.

在值分布理论中，亏量总和等于 2 的亚纯函数类是一个有兴趣和重要的函数类. 对这类函数,已有许多重要的研究结果[2-5].本文继续研究这类函数的亏值和反函数奇点间的关系,证明了下述结果:

定理 1. 假设 $f(z)$ 的亏量总和

$$\Delta(f)=\sum_a \delta(a,f),\ \delta(a,f)>0$$

等于 2, 则有 $p-l'+l\leqslant 2\mu$，其中 μ 是 $f(z)$ 的下级.

作为定理 1 的一个推论，我们得到

定理 2. 假设 $\Delta(f)=2$, 则有 $p\leqslant 2\mu$. 这是 Weitsman 的一个重要结果[4].

本文使用 Nevanlinna 理论中的标准记号[6].

2. 一些引理

本文 1981 年 7 月 25 日收到.

2.1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 z 平面上的 n 个点．根据 Boutroux-Cartan 定理，满足不等式

$$\prod_{i=1}^{n} |z-\alpha_i| < H^n$$

的点集合，可包含在一些圆 (γ) 内，其半径之和不超过 $2eH$．以后，简称 (γ) 是相应于这 n 个点及数 H 的除外圆．

引理 1. 设 $f(z)$ 是圆 $|z| \leqslant R$ 上的亚纯函数，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n(R',f=\infty))$ 是 $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant R'(1<R'<R)$ 上的极点，(γ) 是相应于这 $n(R',f=\infty)$ 个点及数 H 的除外圆．对于位在圆 $|z|<r(4eH<r<R')$ 内，并在圆 (γ) 外的点 z，我们有

$$\log|f(z)| \leqslant \left\{\frac{R'+r}{R'-r} + \frac{\log\dfrac{2R'}{H}}{\log\dfrac{R}{R'}}\right\} T(R,f). \tag{1}$$

证．应用 Poisson-Jensen 公式[6,P.3]当 $|z|<r$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\log|f(z)| &\leqslant \frac{R'+r}{R'-r} m(R',f) + \sum_{i=1}^{n(R',\infty)} \log\left|\frac{R'^2-\bar{\alpha}_i z}{R'(z-\alpha_i)}\right| \\ &\leqslant \frac{R'+r}{R'-r} m(R',f) + n(R',f=\infty)\log(2R') \\ &\quad + \log\frac{1}{\prod_{i=1}^{n(R',\infty)}|z-\alpha_i|}.\end{aligned}$$

进一步，当 $z\bar{\in}(\gamma)$ 时，导出

$$\log|f(z)| \leqslant \frac{R'+r}{R'-r} m(R',f) + n(R',f=\infty)\log\frac{2R'}{H}.$$

注意到

$$\begin{aligned}n(R',f=\infty) &\leqslant \frac{1}{\log\dfrac{R}{R'}}\left\{\int_0^R \frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt + n(0,\infty)\log R \right.\\ &\quad \left. - n(0,\infty)\log R'\right\} \\ &\leqslant \frac{1}{\log\dfrac{R}{R'}} N(R,\infty),\end{aligned}$$

则得(1)式，从而引理 1 得证．

2.2. **引理 2.**[6,P.38] 假设 $T(r)$ 是定义在区间 $[r_0, +\infty)$ 上的连续递增函数，并且 $T(r) \geqslant 1$，则有不等式

$$T\left(r+\frac{1}{T(r)}\right) < 2T(r),$$

但可能要除去一个关于值 r 的集合 E_0，E_0 的线性测度 $\mathrm{mes}E_0 \leqslant 2$．

引理 3.[4] 设 $f(z)$ 是一个亚纯函数，并且 $\Delta(f)=2$，则有

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in}E_0}}\frac{N\left(r,\frac{1}{f'}\right)}{T(r,f')}=0,$$

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in}E_0}}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}=2-\delta(\infty,f),\tag{2}$$

其中 E_0 被引理 2 确定.

引理 4.[7] 假设 $T(r)$ 是定义在区间 $[r_0',+\infty)$ $(r_0'\geqslant 1)$ 上连续递增趋于∞的正值函数,并且存在一单调趋于∞的序列 $\{r_n\}$,使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n)}{\log r_n}=\mu<+\infty.$$

对任意取定的数 $h>0,K>0,h\mu<K$, 置

$$E=E\{t\,|\,T(te^h)<e^K T(t),\ t\geqslant r_0'\}$$

$$E(r_0',r_n)=E\cap[r_0',r_n],$$

则有

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{1}{\log r_n}\int_{E(r_0',r_n)}\frac{dt}{t}\geqslant 1-\frac{h\mu}{K}.$$

2.3. **引理 5.** 设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant R(0<R<+\infty)$ 上全纯, $|f(0)|=1$, 并且在圆 $|z|<r(0<r<R)$ 内存在一点 z_0, 使得

$$|f(z_0)|\geqslant A,\ A\geqslant 16,$$

则在区间 $I=[\sqrt[4]{A},\sqrt{A}]$ 中必定存在一个数 A', 使得导数 $f'(z)$ 在等位线 $|f(z)|=A'$ 上无零点,即等位线是解析的,并且下述事实成立:

考虑集合

$$\Omega(A')=E\{z\,|\,|f(z)|>A',\ |z|<R\}.$$

记 $\Omega(A')$ 位在圆 $|z|<r$ 内部分且含有点 z_0 的连通分支为 $\Omega_r(A')$,则在闭包 $\bar{\Omega}_r(A')$ 上的任意两点 z_1 和 z_2, 必定可以找到一条连接 z_1 和 z_2 点的逐段解析曲线 L, 其长度

$$\operatorname{mes}L\leqslant 2r+2\sqrt{2}\,\pi r\sqrt{\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-1}T(R,f)},$$

并且当 $z\in L$ 时,有

$$|f(z)|\geqslant\sqrt[4]{A};\ \ |z|\leqslant r.$$

这个引理本质上是属于 Weitsman 的[4]. 它的证明可参见文献[8]中引理 1 的证明.

二、定理 1 的证明

当 $\mu=+\infty$ 时,定理 1 成立是显然的. 于是, 我们只须考虑 $\mu<+\infty$ 时的情况. 当 $\mu<+\infty$ 时,假设定理 1 不成立,即有

$$p-l'+l\geqslant[2\mu]+1.$$

于是,存在整数 $p_1<+\infty,0\leqslant p_1\leqslant p-l'$ 和整数 $l_1<+\infty,0\leqslant l_1\leqslant l$, 使得

$$p_1+l_1\geqslant[2\mu]+1.\tag{3}$$

根据假设 $\Delta(f)=2$, $p\geqslant 2$. 因此,可以进一步要求 $p_1+l_1\geqslant 2$. 现在,我们选取 l_1 个判别直接超越奇点 $b_j(j=1,2,\cdots,l_1)$ 和 p_1 个亏值 $a_i(i=1,2,\cdots,p_1)$, 其相应亏量 $\delta_i=\delta(a_i,f)>0$, 并且 $a_i(1\leqslant i\leqslant p_1)$ 不是 $g(w)$ 的直接超越奇点. 不失一般性,可以假设 $a_i(i=1,2,\cdots,p_1)$ 和 $b_j(j=1,2,\cdots,l_1)$ 均为有穷值,以及 $\delta(\infty,f)=0$, 否则只须作一适当分式线性变换[4].

1. 置

$$\delta=\min_{1\leqslant i\leqslant p_1}\{\delta_i\},$$

$$|a|=\max_{1\leqslant i\leqslant p_1}\{|a_i|\},\tag{4}$$

$$f(z)-a_i=c_iz^{\lambda_i}+c_{i+1}z^{\lambda_i+1}+\cdots,\ c_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,p_1,$$

$$|c|=\min_{1\leqslant i\leqslant p_1}\{|c_i|\}.\tag{5}$$

任意取定数 $h>0$, $K>0$, $h\mu<K$ 和数 σ, $0<\sigma<\dfrac{1}{5}h$. 然后,我们取定值 $r_0'\geqslant 1$, 使得当 $r\geqslant r_0'$ 时有

$$\frac{\delta}{2}T(r,f)\leqslant m(r,a_i),\ i=1,2,\cdots,p_1,\tag{6}$$

$$T\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)<2T(r,f),\ i=1,2,\cdots,p_1,\tag{7}$$

$$T\left(r,\frac{1}{f-b_j}\right)<2T(r,f),\ j=1,2,\cdots,l_1,\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T(r,f)}\Big\{&10\log 2+\log^+\log^+|a|+\log^+\log^+\frac{1}{|c|}+\frac{3}{2}h+3K\\&+3\log^+\frac{1}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}+\log^+\frac{4(p_1+1)}{e^{\sigma}-1}+2\log^+\frac{2(2p_1+1)}{h}\\&+3\log r+3\log^+T(r,f)<\frac{\delta}{8}.\end{aligned}\tag{9}$$

另一方面,根据引理 4, 集合

$$E=E\{t\,|\,T(te^h,f)<e^KT(t,f),\ t\geqslant r_0'\}\tag{10}$$

非空.

引理 6. 在上述条件下,对每个值 $t\in E$, 在区间 $[t,te^{\sigma}]$ 内必定存在值 R 和值 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 的集合 $E_i(R)(1\leqslant i\leqslant p_1)$, 使得当 $\theta\in E_i(R)$ 时,有

$$\log\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a_i|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(R,f),\tag{11}$$

$$\log\frac{1}{|f'(Re^{i\theta})|}\geqslant\frac{\delta}{8}T(R,f),\tag{12}$$

并且

$$\operatorname{mes}E_i(R)\geqslant\frac{\pi\delta}{4e^K\left\{\dfrac{e^{\frac{1}{2}h}+e^{\sigma}}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}+\dfrac{2}{h}\log\dfrac{16(p_1+1)e^{1+\frac{1}{2}h}}{e^{\sigma}-1}\right\}}$$

$$= M(\delta, h, K, \sigma) > 0.$$

证. 设 $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant te^{\frac{1}{2}h}$ 内的 a_i-值点为 $\alpha_{ij}(j = 1, 2, \cdots, n(te^{\frac{1}{2}h}, a_i))$，极点为 $\beta_m(m = 1, 2, \cdots, n(te^{\frac{1}{2}h}, \infty))$，$(\gamma)_i$ 是相应于这 $n(te^{\frac{1}{2}h}, a_i)$ 个点及数H的除外圆. 再置

$$N = n(te^{\frac{1}{2}h}, \infty) + \sum_{i=1}^{p_1} n(te^{\frac{1}{2}h}, a_i), \tag{13}$$

$$(\gamma)' = \bigcup_{i=1}^{p_1}\left\{\bigcup_{j=1}^{n(te^{\frac{1}{2}h}, a_i)}\left(|z - \alpha_{ij}| < \frac{2eH}{N}\right)\right\} \bigcup \left\{\bigcup_{m=1}^{n(te^{\frac{1}{2}h}, \infty)}\left(|z - \beta_m| < \frac{2eH}{N}\right)\right\}, \tag{14}$$

$$(\gamma) = \bigcup_{i=1}^{p_1} (\gamma)_i \cup (\gamma)',$$

则 (γ) 的半径和不超过 $2e(p_1 + 1)H$. 取

$$H = \frac{e^\sigma - 1}{8e(p_1 + 1)} t, \tag{15}$$

则在区间 $[t, te^\sigma]$ 内存在值 R，使得圆周 $|z| = R$ 与 (γ) 无交. 置

$$E_i(R) = E\left\{\theta \middle| \log\frac{1}{|f(Re^{i\theta}) - a_i|} \geqslant \frac{\delta}{4} T(R, f), 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\}. \tag{16}$$

我们证明

$$\operatorname{mes} E_i(R) \geqslant M(\delta, h, K, \sigma). \tag{17}$$

首先，根据(6)和(16)式，有

$$\frac{\delta}{2} T(R, f) \leqslant m(R, a_i) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\theta}) - a_i|} d\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E_i(R)} \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\theta}) - a_i|} d\theta + \frac{\delta}{4} T(R, f),$$

$$\frac{\delta}{4} T(R, f) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E_i(R)} \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\theta}) - a_i|} d\theta. \tag{18}$$

其次，应用引理 1，置其中的 $r = te^\sigma$, $R' = te^{\frac{1}{2}h}$, $R = te^h$, $(\gamma) = (\gamma)_i$，我们导出

$$\log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\theta}) - a_i|} \leqslant \left\{\frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^\sigma}{e^{\frac{1}{2}h} - e^\sigma} + \frac{2}{h}\log\frac{16(p_1 + 1)e^{1+\frac{1}{2}h}}{e^\sigma - 1}\right\}$$

$$\cdot T\left(te^h, \frac{1}{f - a_i}\right).$$

代入(18)式，并注意到(7)和(10)式，即得(17)式.

以下，我们证明 (12) 式. 根据 Hayman 的一个结果[6,P.37]，当 $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in E_i(R)$ 时，有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z) - a_i}\right| \leqslant \log^+(te^{\frac{1}{2}h}) + 2\log^+\frac{1}{te^{\frac{1}{2}h} - R} + 2\log 2$$

$$+ \log^+ T(te^{\frac{1}{2}h}, f - a_i) + \log^+\log^+\frac{1}{|c_i|} + \log 2$$

$$+ \log^+\frac{n(te^{\frac{1}{2}h}, a_i) + n(te^{\frac{1}{2}h}, \infty)}{R} + \log^+\frac{R}{\delta(z)}$$

$$+\log^+\frac{R}{te^{\frac{1}{2}h}-R}+2\log 2,$$

其中 $\delta(z)$ 表示点 z 到 $f(z)$ 的极点和 a_i-值点的最短距离. 根据(4),(5),(13)—(15)式,以及 $R\leqslant te^{\sigma}$, 我们导出

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_i}\right|\leqslant 3\log^+(te^{\frac{1}{2}h})+3\log^+\frac{1}{te^{\frac{1}{2}h}-te^{\sigma}}+\log^+\log^+|a|$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|c|}+\log^+\frac{4(p_1+1)}{(e^{\sigma}-1)t}+2\log^+N$$

$$+\log^+T(te^h,f)+8\log 2.$$

注意到

$$N=n(te^{\frac{1}{2}h},\infty)+\sum_{i=1}^{p_1}n(te^{\frac{1}{2}h},a_i)$$

$$\leqslant\frac{2}{h}\left\{N(te^h,\infty)+\sum_{i=1}^{p_1}N(te^h,a_i)\right\}$$

$$\leqslant\frac{2}{h}\left\{T(te^h,f)+\sum_{i=1}^{p_1}T\left(te^h,\frac{1}{f-a_i}\right)\right\},$$

以及(7)式,则有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_i}\right|\leqslant 10\log 2+\frac{3}{2}h+\log^+\log^+|a|+\log^+\log^+\frac{1}{|c|}$$

$$+3\log^+\frac{1}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}+\log^+\frac{4(p_1+1)}{e^{\sigma}-1}+2\log^+\frac{2(2p_1+1)}{h}$$

$$+3\log^+t+3\log^+T(te^h,f).$$

进一步根据(10)式得到

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_i}\right|\leqslant 10\log 2+\frac{3}{2}h+3K+\log^+\log^+|a|+\log^+\log^+\frac{1}{|c|}$$

$$+3\log^+\frac{1}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}+\log^+\frac{4(p_1+1)}{e^{\sigma}-1}+2\log^+\frac{2(2p_1+1)}{h}$$

$$+3\log^+R+3\log^+T(R,f).$$

最后,根据(9)和(11)式,判定(12)式成立.

2. 设 $f'(z)$ 在原点 $z=0$ 邻域内有展式

$$f'(z)=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots,\quad c_s\neq 0,$$

γ_k 表示 $f'(z)$ 的零点. 置

$$\pi(z)=\prod_{0<|\gamma_k|<te^{h-2\sigma}}\frac{te^{h-2\sigma}(z-\gamma_k)}{(te^{h-2\sigma})^2-\bar{\gamma}_kz},$$

$$\alpha=\frac{c_s}{\pi(0)},$$

$$G(z)=\frac{\alpha z^s\pi(z)}{f'(z)},\tag{19}$$

则 $G(z)$ 在圆 $|z| < te^{h-2\sigma}$ 内全纯，$G(0) = 1$，并且

$$\log^+|\alpha| \leqslant \log^+|c_s| + \sum_{0<|\gamma_k|<te^{h-2\sigma}} \frac{te^{h-2\sigma}}{|\gamma_k|}$$

$$\leqslant \log^+|c_s| + N\left(te^{h-2\sigma}, \frac{1}{f'}\right) - n(0, f' = 0)\log te^{h-2\sigma},$$

以及

$$\log^+\frac{1}{|\alpha|} \leqslant \log^+\frac{1}{|c_s|}.$$

取定值 $r_1' \geqslant r_0'$，使得当 $r \geqslant r_1'$ 时，有

$$\text{mes}[re^{h-\sigma}, re^h] \geqslant 3, \tag{20}$$

以及根据引理 3，当 $r \geqslant r_1'$ 和 $r \bar{\in} E_0$ 时，有

$$\left\{\left[\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta, h, K, \sigma)}\right] \cdot \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \cdot \frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \frac{\log^+\frac{1}{|c_s|}}{T(r, f)} + \frac{n(0, f' = \infty)\log r}{T(r, f)}\right\} e^K < \frac{\delta}{16}. \tag{21}$$

$$\left\{\frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \cdot \frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \frac{\log^+|c_s|}{T(r, f)}\right\} e^k < \frac{\delta}{8 \times 16}, \tag{22}$$

$$\frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \frac{\log^+\frac{1}{|c_s|}}{T(r, f)} \leqslant 3, \tag{23}$$

其中 E_0 被引理 2 确定.

对于每个值 $t \in E \cap [r_1', +\infty)$，根据引理 6，在区间 $[t, te^\sigma]$ 内存在值 R 和值 θ 的集合 $E_i(R)(1 \leqslant i \leqslant p_1)$，使得当 $\theta \in E_i(R)$ 时，(11)和(12)式成立．进一步我们有

引理 7. 在集合 $E_i(R)(1 \leqslant i \leqslant p_1)$ 中存在值 θ_{iR}，使得当 $z_{iR} = Re^{i\theta_{iR}}$ 时，有

$$\log|G(z_{iR})| \geqslant \frac{\delta}{16} T(R, f), \tag{24}$$

以及在区间 $[te^{h-\sigma}, te^h]$ 中存在值 $R' \bar{\in} E_0$，使得

$$\log M(te^{h-4\sigma}, G) \leqslant 6 \cdot \frac{e^\sigma + 1}{e^\sigma - 1} T(R', f). \tag{25}$$

证．首先，根据 Boulroux-Cartan 定理，满足不等式

$$\prod_{0<|\gamma_k|<te^{h-2\sigma}} |z - \gamma_k| < H'$$

的点集合可被包含在一些圆 $(\gamma)''$ 内，其半径之和不超过 $2eH'$．取

$$H' = \frac{1}{8e} M(\delta, h, K, \sigma)R,$$

则在 $E_i(R)$ 中存在值 θ_{iR}，使得 $z_{iR}=Re^{i\theta_{iR}}\bar{\in}(\gamma)''$. 于是，根据(12)和(19)式，我们有

$$\frac{\delta}{8}T(R,f)\leqslant\log\frac{1}{|f'(z_{iR})|}\leqslant\log|G(z_{iR})|+\log\frac{1}{|\Pi(z_{iR})|}$$

$$+\log^+\frac{1}{|\alpha|}+\log\frac{1}{|z_{iR}|^s}.$$

注意到

$$s=\begin{cases}n(0,f'=0), & s\geqslant 0,\\ -n(0,f'=\infty), & s<0,\end{cases}\tag{26}$$

以及

$$\log\frac{1}{|\Pi(z_{iR})|}\leqslant n(te^{h-2\sigma},f'=0)\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,K,\sigma)}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,K,\sigma)}\right\}N\left(te^{h-\sigma},\frac{1}{f'}\right),$$

我们导出

$$\frac{\delta}{8}T(R,f)\leqslant\log|G(z_{iR})|+\left\{\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,K,\sigma)}\right\}N\left(te^{h-\sigma},\frac{1}{f'}\right)$$

$$+\log^+\frac{1}{|c_s|}+n(0,f'=\infty)\log R.$$

根据(20)式，在区间 $[te^{h-\sigma},te^h]$ 中存在值 $R'\bar{\in}E_0$. 于是，根据(10)和(21)式，判定

$$\frac{\delta}{8}T(R,f)\leqslant\log|G(z_{iR})|+\frac{\delta}{16}T(R,f),$$

$$\log|G(z_{iR})|\geqslant\frac{\delta}{16}T(R,f),$$

即(24)式成立.

另一方面，根据(19)和(26)式，应用 Poisson-Jensen 公式，有

$$\log M(te^{h-4\sigma},G)\leqslant\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}m(te^{h-3\sigma},G)$$

$$\leqslant\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\left\{m\left(te^{h-3\sigma},\frac{1}{f'}\right)+\log^+|\alpha|+n(0,f'=0)\log te^{h-3\sigma}\right\}$$

$$\leqslant\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\left\{m\left(te^{h-3\sigma},\frac{1}{f'}\right)+N\left(te^{h-2\sigma},\frac{1}{f'}\right)+\log^+|c_s|\right\}$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\left\{T\left(R',\frac{1}{f'}\right)+\log^+|c_s|\right\}$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\left\{T(R',f')+\log^+\frac{1}{|c_s|}\right\},$$

进一步根据(23)式，即得(25)式，于是引理 7 得证.

3. 置

$$d=\min_{\substack{1\leqslant i\neq i'\leqslant p_1\\1\leqslant j\neq j'\leqslant l_1}}\{|a_i-a_{i'}|,|b_j-b_{j'}|,|a_i-b_j|\}>0.$$

根据直接超越奇点的定义，存在值 $\lambda > \frac{4}{d}$，使得在 z 平面上相应于 $b_j(j=1,2,\cdots,l_1)$ 的 l_1 个域 $D_j(j=1,2,\cdots,l_1)$ 具有下述性质：

i）当 $z \in D_j$ 时，

$$\frac{1}{|f(z)-b_j|} > \lambda,\ f(z) \neq b_j. \tag{27}$$

ii）D_j 的有限边界部分 Γ_j 是解析曲线，并且当 $z \in \Gamma_j$ 时，有

$$\frac{1}{|f(z)-b_j|} = \lambda,$$

iii）如果 $j \neq j'$，则有 $D_j \cap D_{j'} = \phi$.

根据假设 $\Delta(f)=2$，则有 $p \geqslant 2$. 于是，对每个值 $b_j(1 \leqslant j \leqslant l_1)$，都存在 $f(z)$ 的一个异于 b_j 的亏值. 由此，若置

$$M_j(r) = \max_{\substack{|z|=r \\ z \in \bar{D}_j}} \frac{1}{|f(z)-b_j|},\ j=1,2,\cdots,l_1,$$

则有[1,P.27]

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log M_j(r)}{\log r} \geqslant \frac{1}{2},\ j=1,2,\cdots,l_1.$$

取定值 $r_2' \geqslant r_1'$，使得

i）当 $r \geqslant r_2'$ 时，有

$$e^{-\frac{\delta}{4}T(r,f)} + e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{\delta}{16}T(r,f)}\left\{2+2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{6}{\sigma}\cdot e^K T(r,f)}\right\} e^{h-4\sigma} r < \frac{d}{4}. \tag{28}$$

ii）当 $r \geqslant r_2'$ 时，有

$$M_j(r) > \lambda^4,\ j=1,2,\cdots,l_1. \tag{29}$$

于是，当 $r \geqslant r_2'$ 时，$M_j(r)$ 是一个单调递增函数，并且如果点 z_{jr}' 有

$$\frac{1}{|f(z_{jr}')-b_j|} = M_j(r),\ j=1,2,\cdots,l_1,$$

则 z_{jr}' 是 D_j 的一个内点.

当 $t \in E \cap [r_2', +\infty)$ 时，应用引理 5，置其中的

$$R = te^{h-3\sigma},\ r = re^{h-4\sigma},\ z_0 = z_{iR},$$

$$A = e^{\frac{\delta}{16}T(R,f)},\ \Omega_r(A') \equiv \Omega(z_{iR}),$$

我们判定 $\bar{\Omega}(z_{iR})$ 上任意两点 z_1 和 z_2，在 $\bar{\Omega}(z_{iR})$ 上都存在一条连接 z_1 和 z_2 点的逐段解析曲线 L，其长度

$$\operatorname{mes} L \leqslant 2te^{h-4\sigma} + 2\sqrt{2}\,\pi te^{h-4\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma}T(te^{h-3\sigma},G)},$$

并且当 $z \in L$ 时，有

$$|G(z)| \geqslant e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{16}T(R,f)},\ |z| \leqslant te^{h-4\sigma},$$

以及如果 Γ_{iR} 表示 $\Omega(z_{iR})$ 的边界位在圆 $|z| < te^{h-4\sigma}$ 内的部分，则当 $z \in \Gamma_{iR}$ 时，有

$$|G(z)| \leqslant e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{16}T(R,f)}. \tag{30}$$

另一方面，当 $t\in E\cap[r_2',+\infty)$ 时，在区间 $[\sqrt[4]{M_j(R)},\sqrt{M_j(R)}](1\leqslant j\leqslant l_1)$ 内存在值 A'，使得导数 $\left\{\frac{1}{f(z)-b_j}\right\}'$ 在等位线 $\frac{1}{|f(z)-b_j|}=A'$ 上无零点和极点，即等位线是解析的．考虑集合

$$\Omega(A')=E\left\{z\left|\frac{1}{|f(z)-b_j|}>A'\right.\right\}.$$

记 $\Omega(A')$ 位在圆 $|z|<te^{h-4\sigma}$ 内部分，且含有点 z_{jR}' 的连通部分为 $\Omega(z_{jR}')$．于是，当 $z\in\bar{\Omega}(z_{jR}')$ 时，有

$$\frac{1}{|f(z)-b_j|}>\sqrt[4]{M_j(R)},$$

以及如果 Γ_{jR}' 表示 $\Omega(z_{jR}')$ 的边界位在圆 $|z|<te^{h-4\sigma}$ 内部份，则当 $z\in\Gamma_{jR}'$ 时，有

$$\frac{1}{|f(z)-b_j|}<\sqrt{M_j(R)}. \tag{31}$$

另外，根据(19)式，我们判定 $\Omega(z_{jR}')\subset D_j$．因此，$\Omega(z_{jR}')(j=1,2,\cdots,l_1)$ 彼此无交．

现在我们说明 $\Omega(z_{iR})(i=1,2,\cdots,p_1)$ 也彼此无交．事实上，如果 $\Omega(z_{iR})$ 和 $\Omega(z_{i'R})$ $(i\neq i')$ 有交，则存在点 $z_0\in\Omega(z_{iR})\cap\Omega(z_{i'R})$．在 $\bar{\Omega}(z_{iR})$ 上存在连接点 z_0 和 z_{iR} 的曲线 L_i，其长度

$$\operatorname{mes}L_i\leqslant 2te^{h-4\sigma}+2\sqrt{2}\pi te^{h-4\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma}T(te^{h-3\sigma},G)},$$

并且根据(19)和(22)式，当 $z\in L_i$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{16}T(R,f)\leqslant\log|G(z)|&\leqslant\log\frac{1}{|f'(z)|}+\log^+|\alpha|+\log^+|z|^s\\&\leqslant\log\frac{1}{|f'(z)|}+\log^+|c_s|+N\left(te^{h-2\sigma},\frac{1}{f'}\right)\\&\quad-n(0,f'=0)\log te^{h-2\sigma}+n(0,f'=0)\log te^{h-4\sigma}\\&\leqslant\log\frac{1}{|f'(z)|}+\frac{\delta}{8\times16}T(R,f),\end{aligned}$$

$$|f'(z)|\leqslant e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{\delta}{16}T(R,f)};$$

在 $\bar{\Omega}(z_{i'R})$ 上存在连接点 z_0 和 $z_{i'R}$ 的曲线 $L_{i'}$，其长度

$$\operatorname{mes}L_{i'}\leqslant 2te^{h-4\sigma}+2\sqrt{2}\pi te^{h-4\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma}T(te^{h-3\sigma},G)},$$

并且当 $z\in L_{i'}$ 时，有

$$|f'(z)|\leqslant e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{\delta}{16}T(R,f)}.$$

注意到(10)和(23)式，我们给出

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{\sigma}T(te^{h-3\sigma},G)}&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\sigma}\left\{T\left(te^{h-3\sigma},\frac{1}{f'}\right)+N\left(te^{h-2\sigma},\frac{1}{f'}\right)+\log^+|c_s|\right\}}\\&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\sigma}\left\{2T\left(te^{h-2\sigma},\frac{1}{f'}\right)+\log^+|c_s|\right\}}\end{aligned}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\sigma}\left\{T(te^{h-2\sigma}, f') + \log^+ \frac{1}{|c_s|}\right\}}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\sigma}\left\{\frac{T(R', f')}{T(R', f)} + \frac{\log^+ \frac{1}{|c_s|}}{T(R', f)}\right\} \cdot T(te^h, f)}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{6}{\sigma} e^K T(R, f)}.$$

于是根据(11)和(28)式，判定

$$d \leqslant |a_i - a_{i'}| \leqslant |a_i - f(z_{iR})| + |f(z_{iR}) - f(z_{i'R})| + |f(z_{i'R}) - a_{i'}|$$

$$\leqslant 2e^{-\frac{\delta}{4}T(R,f)} + \int_{L_i + L_{i'}} |f'(z)||dz|$$

$$\leqslant 2e^{-\frac{\delta}{4}T(R,f)} + 2e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{\delta}{16}T(R,f)}\left\{2te^{h-4\sigma} + 2\sqrt{2}\,\pi te^{h-4\sigma}\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt{\frac{1}{\sigma}T(te^{h-3\sigma}, G)}\right\} \leqslant \frac{d}{2},$$

即得矛盾.

以下，我们说明 $\Omega(z_{iR})(1 \leqslant i \leqslant p_1)$ 和 $\Omega(z'_{jR})(1 \leqslant j \leqslant l_1)$ 也彼此无交. 否则，类似地，根据(11)，(28)和(29)式判定

$$d \leqslant |a_i - b_j| \leqslant |a_i - f(z_{iR})| + |f(z_{iR}) - f(z_0)| + |f(z_0) - b_j|$$

$$\leqslant e^{-\frac{\delta}{4}T(R,f)} + \int_{L_i} |f'(z)||dz| + \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{d}{4} + \frac{d}{4} = \frac{d}{2},$$

即得矛盾.

注意到 $p_1 + l_1 \geqslant 2$，圆周 $|z| = r(r \geqslant R)$ 不能整个地位在 $\Omega(z_{iR})(1 \leqslant i \leqslant p_1)$ 内，以及 $\Omega(z'_{jR})(1 \leqslant j \leqslant l_1)$ 内. 记圆周 $|z| = r$ 位在 $\Omega(z_{iR})$ 内的部分为 θ_{ir}，位在 $\Omega(z'_{jR})$ 内的部分为 θ'_{jr}，$r\theta_i(r)$ 和 $r\theta'_j(r)$ 分别表示 θ_{iR} 和 θ'_{ir} 的线性测度. 于是，应用一个调和测度的估计[9,p.116]，并注意到 $t \leqslant R \leqslant te^{\sigma}$，根据(24)，(25)和(30)式，有

$$\log|G(z_{iR})| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{16}T(R, f) + 9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2R}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_i(r)}} \cdot \log M(te^{h-4\sigma}, G),$$

$$\pi\int_{2te^{\sigma}}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}} \frac{dr}{r\theta_i(r)} \leqslant \log T(te^h, f) - \log T(t, f)$$

$$+ \log\left\{\frac{6\times 32\times 9\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right\},\quad i = 1, 2, \cdots, p_1, \tag{32}$$

以及根据(31)式，有

$$\log\frac{1}{|f(z'_{jR}) - b_j|} \leqslant \frac{1}{2}\log M_j(R) + 9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2R}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta'_j(r)}} \cdot \log M_j(te^{h-4\sigma}),$$

$$\pi\int_{2te^{\sigma}}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}} \frac{dr}{r\theta'_j(r)} \leqslant \log\log M_j(te^{h-4\sigma}) - \log\log M_j(t)$$

$$+\log(18\sqrt{2}),\ j=1,2,\cdots,l_1. \tag{33}$$

4. 根据假设,存在单调趋于∞的序列 $\{r_n\}$,使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}=\mu.$$

根据引理 4,当 n 充分大时,在区间 $[r_2', r_n]$ 上满足不等式

$$T(te^h,f)\leqslant e^K T(t,f) \tag{34}$$

的值非空. 任意取定一个充分大的值 n. 设 t_1 是区间 $[r_2', r_n]$ 上满足(34)式的最小值,t_2 是区间 $[t_1', r_n](t_1'=t_1e^h)$ 上满足(34)式的最小值,t_3 是区间 $[t_2', r_n](t_2'=t_2e^h)$ 上满足(34)式的最小值,如此继续,经 m 次后,有

$$t_m'\leqslant r_n<t_{m+1}'. \tag{35}$$

在(32)和(33)式中,取 $t=t_k(k=1,2,\cdots,m)$,并记 $\theta_i(r)=\theta_{ik}(r)$ 和 $\theta_j'(r)=\theta_{jk}'(r)$,然后对 k 求和得到

$$\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_ke^\sigma}^{\frac12 t_ke^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{ik}(r)}\leqslant\log T(t_me^h,f)+m\log\left\{\frac{6\times32\times9\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\right\},\ i=1,2,\cdots,p_1, \tag{36}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_ke^\sigma}^{\frac12 t_ke^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{jk}'(r)}\leqslant\log\log M_j(t_me^{h-4\sigma})+m\log(18\sqrt{2}),\ j=1,2,\cdots,l_1. \tag{37}$$

应用引理 1,置其中的 $f(z)=\dfrac{1}{f(z)-b_j}\ (1\leqslant j\leqslant l_1)$,$R=t_me^{h-\sigma}$,$R'=t_me^{h-2\sigma}$,$r=t_me^{h-3\sigma}$,$H=\dfrac{e^\sigma-1}{8e}t_me^{h-4\sigma}$,则在区间 $[t_me^{h-4\sigma}, t_me^{h-3\sigma}]$ 中存在值 R'',使得圆周 $|z|=R''\in(\gamma)$,并且有

$$\log M_j(t_me^{h-4\sigma})\leqslant\log M_j(R'')\leqslant\left\{\frac{t_me^{h-2\sigma}+t_me^{h-3\sigma}}{t_me^{h-2\sigma}-t_me^{h-3\sigma}}+\frac{\log\dfrac{8e\cdot2t_me^{h-2\sigma}}{(e^\sigma-1)t_me^{h-4\sigma}}}{\log\dfrac{t_me^{h-\sigma}}{t_me^{h-2\sigma}}}\right\}T\left(t_me^{h-\sigma},\frac{1}{f-b_j}\right),$$

进一步,根据(8)式导出

$$\log M_j(t_me^{h-4\sigma})\leqslant2\left\{\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}+\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{2\sigma+1}}{e^\sigma-1}\right\}T(t_me^h,f).$$

代入(37)式,我们得到

$$\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_ke^\sigma}^{\frac12 t_ke^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{jk}'(r)}\leqslant\log T(t_me^h,f)+m\log(18\sqrt{2})+\log\left\{2\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}+\frac{2}{\sigma}\log\frac{16e^{2\sigma+1}}{e^\sigma-1}\right\},\ j=1,2,\cdots,l_1. \tag{38}$$

根据(35)，(36)和(38)式，当 $r \in \bigcup_{k=1}^{m}\left[2t_k e^{\sigma}, \frac{1}{2}t_k e^{h-4\sigma}\right]$ 时，我们有

$$(p_1+l_1)^2=\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\sqrt{\theta_{ik}(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_{ik}(r)}}+\sum_{j=1}^{l_1}\sqrt{\theta'_{jk}(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta'_{jk}(r)}}\right\}^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{p_1}\theta_{ik}(r)+\sum_{j=1}^{l_1}\theta'_{jk}(r)\right)\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\frac{1}{\theta_{ik}(r)}+\sum_{j=1}^{l_1}\frac{1}{\theta'_{jk}(r)}\right\}$$

$$\leqslant 2\pi\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\frac{1}{\theta_{ik}(r)}+\sum_{j=1}^{l_1}\frac{1}{\theta'_{jk}(r)}\right\},$$

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{2t_ke^{\sigma}}^{\frac{1}{2}t_ke^{h-4\sigma}}\frac{(p_1+l_1)^2}{r}dr\leqslant 2\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_ke^{\sigma}}^{\frac{1}{2}t_ke^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{ik}(r)}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{l_1}\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_ke^{\sigma}}^{\frac{1}{2}t_ke^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta'_{jk}(r)}\right\}$$

$$\leqslant 2\left\{p_1\log T(r_n,f)+mp_1\log\left[\frac{6\times 32\times 9\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right]\right.$$

$$+l_1\log T(r_n,f)+ml_1\log(18\sqrt{2})$$

$$\left.+\log\left[2\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}+\frac{2}{\sigma}\log\frac{16e^{2\sigma+1}}{e^{\sigma}-1}\right]\right\},$$

$$(p_1+l_1)\{mh-m(\log 4+5\sigma)\}\leqslant 2\{\log T(r_n,f)+m\cdot O(1)\}.$$

根据引理 4 和(35)式，

$$(m+1)h\geqslant\int_{E(r'_2,r_n)}\frac{dr}{r},\quad mh\leqslant\log\frac{r_n}{r'_2}.$$

于是

$$(p_1+l_1)\left\{\frac{1}{\log r_n}\int_{E(r'_2,r_n)}\frac{dr}{r}-\frac{1}{\log r_n}-\frac{\log 4+5\sigma}{h}\cdot\frac{\log r_n-\log r'_2}{\log r_n}\right\}$$

$$\leqslant 2\left\{\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}+\frac{O(1)}{h}\cdot\frac{\log r_n-\log r'_2}{\log r_n}\right\}.$$

当 $n\to+\infty$ 时，根据引理 4 判定

$$(p_1+l_1)\left(1-\frac{h\mu}{K}-\frac{\log 4+5\sigma}{h}\right)\leqslant 2\left(\mu+\frac{O(1)}{h}\right),$$

进一步，命 $K\to+\infty$，$h\to+\infty$，我们得到

$$p_1+l_1\leqslant 2\mu,$$

但是，这与(3)式矛盾，即定理 1 完全得证.

参　考　文　献

[1] 张广厚，中国科学，1978 增刊 1.
[2] Nevanlinna, F., *Septième Congrès Math. Scand.*, Oslo, 1930, 81—83.
[3] Pfluger, A., *Comment. Math. Helv.*, **19**(1946), 91—104.
[4] Weitsman, A., *Acta Math.*, **123** (1969), 115—139.
[5] Drasin, D., *Annals of Math.*, **114**(1981), 493—518.
[6] Hayman, W. K., *Meromorphic Functions*, Oxford, 1964.
[7] ————, *Proc. London Math. Soc.*, **24**(1972), 590—624.
[8] Chang Kuan-Heo, *Scientia Sinica*, **20**(1977), 6: 720—739.
[9] Tsuji, M., *Potential theory in modern function theory*. Maruzen, 1959.