三维稳态向列型液晶方程的 Liouville 定理

王科研^{1*}, 卢文杰²

1. 上海财经大学数学学院, 上海 200433;

2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: wang.keyan@mail.sufe.edu.cn, wjlul4@fudan.edu.cn

收稿日期: 2019-07-23; 接受日期: 2020-01-21; 网络出版日期: 2020-03-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11301338 和 11971290) 资助项目

摘要 本文证明若三维稳态向列型液晶方程的解 u 和 d 满足 $u, \nabla d \in L^{9/2, q}(\mathbb{R}^3)$, $3 < q < \infty$, 则 $u \equiv 0$, 即满足 Liouville 型定理, 其中 $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是速度场, $d: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ 表示液晶分子的朝向. 本文借鉴 Galdi 证明三维稳态不可压 Navier-Stokes 方程在空间 $L^{9/2}(\mathbb{R}^3)$ 中的 Liouville 定理的思路及 Schoen 等刻画调和映照的思想, 采用局部能量估计, 将其结果推广到液晶方程以及 Lorentz 空间.

关键词 向列型液晶方程 Liouville 定理 Lorentz 空间

MSC (2020) 主题分类 35Q35, 76B03

1 引言

液晶可以视作一种状态介于液体与固体之间的材料, 它可以像液体一样流动, 也能展现出某些固体特有的性质. 本文的研究对象是向列型液晶, 其分子呈杆状, 并且会在特定的情形下呈现出一致的朝向. 数学地研究向列型液晶的运动是偏微分方程领域的重要课题. Lin 等^[1] 研究了二维向列型液晶的流动, 并提出了系统

$$\begin{aligned}u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p &= \Delta u - \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d), \\d_t + u \cdot \nabla d &= \Delta d + |\nabla d|^2 d, \\\nabla \cdot u &= 0, \\(u, d)|_{t=0} &= (u_0, d_0).\end{aligned}$$

该系统是对 Oseen-Zocher-Frank 模型的简化, 其中 $u: \mathbb{R}^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 表示速度场, $d: \mathbb{R}^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{S}^2$ 表示液晶内部分子朝向, $\mathbb{S}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点的单位球面. 向量 $\nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d)$ 的第 i 分量为 $\sum_{j=1}^3 \nabla_j (\nabla_i d \cdot \nabla_j d)$. 本文将使用 Einstein 求和约定, 故把此和式简记为 $\nabla_j (\nabla_i d \cdot \nabla_j d)$.

英文引用格式: Wang K Y, Lu W J. A Liouville theorem for three-dimensional stationary nematic liquid crystal equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1139–1150, doi: 10.1360/SSM-2019-0186

直观上, 这个系统可以看作一个 Navier-Stokes 方程与一个调和映照热流方程的耦合, Navier-Stokes 方程决定了液晶的运动, 调和映照热流方程则控制内部分子的朝向.

本文感兴趣的是上述系统在三维稳态情形下的 Liouville 定理, 即此时液晶的运动不依赖于时间, $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, d: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ 且满足

$$u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u - \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d), \quad (1.1)$$

$$u \cdot \nabla d = \Delta d + |\nabla d|^2 d, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (1.3)$$

我们希望证明在合适的条件下, 处于稳定状态的三维向列型液晶系统 (1.1)–(1.3) 是静止的. 从现有的文献看, 还没有学者对此问题进行过相关的研究. 关于稳态流体的 Liouville 定理, 近年来研究比较多的对象是三维稳态不可压 Navier-Stokes 方程

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla v + \nabla p &= \Delta v, \\ \nabla \cdot v &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

对于系统 (1.4), 一个众所周知的公开问题是, 如果该系统的解满足条件

$$\begin{cases} D(v) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 < \infty, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |v| = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

是否成立 $v = 0$? 称满足条件 (1.5) 的解为 D-解, 并记所有满足该条件的函数组成的集合为 $\mathcal{D}$. 目前对于该问题最好的结果之一是, Galdi^[2] 证明了在 $v \in L^{9/2}(\mathbb{R}^3)$ 的假设下, $v \equiv 0$. 其证明的主要思路是对系统 (1.4) 做局部能量估计, 需要速度场 u 在无穷远处有足够的衰减. 注意到, 由 Sobolev 嵌入, (1.5) 蕴含着 $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$, 但 $L^6(\mathbb{R}^3)$ 函数在无穷远处的衰减是不够的, $L^{9/2}(\mathbb{R}^3)$ 函数的衰减速度要更快, 恰好满足能量估计的需求. 同时, 从稳态 Navier-Stokes 的正则性来看, $L^{9/2}(\mathbb{R}^3)$ 的解集确实也包含在 $L^6(\mathbb{R}^3)$ 中. 由于系统 (1.1)–(1.3) 和 (1.4) 满足类似的能量估计, 故对 (1.4) 的研究对本文的问题有指导意义. Chae 和 Wolf^[3] 将文献 [2] 的结果进行了对数型的改进, 即证明了条件

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^{\frac{9}{2}} \left\{ \log \left(2 + \frac{1}{|v|} \right) \right\}^{-1} < \infty$$

蕴含着 $v = 0$. Seregin^[4] 研究了 Stokes 系统并将 Galdi 的结果稍作推广. Seregin^[5] 证明了, 如果速度场 u 满足 $u \in \text{BMO}^{-1}$, 则也成立 Liouville 定理. Chae^[6] 证明了 Liouville 定理 (如果假定 $\Delta v \in L^{\frac{6}{5}}$).

最近, Kozono 等^[7] 证明了, 若 (1.4) 的解满足 $v \in L^{9/2, \infty}(\mathbb{R}^3)$, 且存在充分小的常数 $\delta > 0$, 使得

$$\|v\|_{L^{9/2, \infty}(\mathbb{R}^3)} \leq (\delta D(v))^{1/3}, \quad (1.6)$$

其中 $L^{p, \infty}$ 是 Lorentz 空间 $L^{p, q}$ 的一种特例, 表示通常意义上的弱 L^p 空间, 则 $v \equiv 0$. 这一结果需假设 $\|v\|_{L^{9/2, \infty}(\mathbb{R}^3)}$ 相比 $D(v)$ 要充分小, 很自然的一个问题便是, 若只假设 $v \in L^{9/2, \infty}(\mathbb{R}^3)$, 是否也能得到类似的结论? 但可惜的是现在还不能做到这种情况, 参见注 3.1 的讨论. 借鉴文献 [8] 利用 Lorentz 空间研究旋转物体周围的稳态 Navier-Stokes 流体, 我们考虑系统 (1.1)–(1.3) 的解在空间 $L^{9/2, q}(\mathbb{R}^3)$ ($q < \infty$) 中的 Liouville 定理. 由引理 2.1 可知, $q < \infty$ 时 $L^{9/2, q}(\mathbb{R}^3)$ 的假设要严格强于 $L^{9/2, \infty}(\mathbb{R}^3)$. 本文的主要定理如下.

定理 1.1 设 $3 < q < \infty$. 若 u 和 d 是系统 (1.1)–(1.3) 的解, 满足 $u \in \mathcal{D} \cap L^{9/2,q}$, $\nabla d \in L^{9/2,q}$, 则 $u = 0$, $p + |\nabla d|^2/2 = 0$, 且 d 满足调和映照方程

$$\Delta d + |\nabla d|^2 d = 0. \quad (1.7)$$

注意到, 当 $q = 9/2$ 时 $L^{9/2,q}(\mathbb{R}^3)$ 即为 $L^{9/2}(\mathbb{R}^3)$, 所以, 该定理确实是 Navier-Stokes 情形下 (参见文献 [2]) 的结果到一般 Lorentz 空间以及液晶方程的推广, 而且使用本文的方法可以很容易证明 (1.4) 的解 v 在与定理 1.1 同样的假设下成立 $v = 0$.

很自然的问题是, 对满足 $\nabla d \in L^{9/2,q}$ 的调和映照 d 是否有明确的刻画? 例如, 是否也满足 Liouville 型的定理, 从而是一个常向量? 历史上有很多学者研究过调和映照的 Liouville 定理, 一般需假设映照本身满足一定的几何条件, 例如, Choi [9] 证明了若调和映照 d 的像包含在上半球面内, 则 d 是常值映射. Jin [10] 证明了若 d 在无穷远处趋于一个常向量 d_0 , 则 d 也是一个常值映射. 这启发我们, 若假定 ∇d 在空间变量趋于无穷远时有较快的衰减速度, 应该也能得到 d 的 Liouville 定理. 本文在 $\nabla d \in L^3$ 的条件下证明了 d 满足 Liouville 性质, 即有如下定理. 定理的证明借鉴了 Schoen 和 Uhlenbeck [11] 的思想.

定理 1.2 设 $d: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ 满足方程 (1.7), 且 $\nabla d \in L^3$, 则 d 是常值映射.

本文余下内容的安排如下. 为了本文的证明需要, 我们在第 2 节简要介绍 Lorentz 空间的定义和相关性质, 然后在第 3 节给出定理 1.1 和 1.2 的证明.

2 Lorentz 空间

Lorentz 空间一般用 $L^{p,q}$ 来表示, 是我们熟知的 Lebesgue 空间 L^p 的推广. 设 f 是可测空间 (X, μ) 上的可测函数, f 的分布函数 d_f 定义为

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}), \quad \alpha \in [0, \infty).$$

由 f 的分布函数 d_f 可定义 f 的递降重排 (decreasing rearrangement) f^* 为

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}, \quad t \in [0, \infty).$$

易知, f^* 与 f 同分布, 即 $d_f(\alpha) = d_{f^*}(\alpha)$, 且 $f^*(t)$ 单调递减, 因此称 f^* 为 f 的递降重排.

定义 2.1 给定可测空间 (X, μ) 上的可测函数 f 以及 $0 < p, q \leq \infty$, 定义

$$\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & q = \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

所有满足 $\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} < \infty$ 的可测函数 f 全体组成的集合记作 $L^{p,q}(X, \mu)$, 称为 (X, μ) 上指标为 p 和 q 的 Lorentz 空间.

由定义易知, $L^{p,p}(X, \mu) = L^p(X, \mu)$ ($0 < p \leq \infty$), 并且可以证明 $L^{p,\infty}(X, \mu)$ 为 (X, μ) 上的弱 L^p 空间 (参见文献 [12]).

注 2.1 由定义 2.1 可直接验证, 对 $0 < p, r < \infty$, $0 < q \leq \infty$, 有

$$\| |g|^r \|_{L^{p,q}(X,\mu)} = \|g\|_{L^{pr,qr}(X,\mu)}^r.$$

众所周知, $L^p \subset L^{p,\infty}$, 事实上可证明指标 p 固定时, 空间 $L^{p,q}$ 会随着指标 q 的增加而变大, 即有如下引理.

引理 2.1 ^[12] 假设 $0 < p \leq \infty$, $0 < q < r \leq \infty$, 则存在仅依赖于 p, q 和 r 的常数 C , 使得

$$\|f\|_{L^{p,r}(X,\mu)} \leq C\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)},$$

即 $L^{p,q}(X,\mu)$ 是 $L^{p,r}(X,\mu)$ 的子空间.

类似文献 [8], 我们可以定义 Lorentz 半范数意义上的 Sobolev 空间.

定义 2.2 设 $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, 对 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 定义半范数

$$\|f\|_{\dot{H}_{p,q}^1(\mathbb{R}^3)} = \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^3)},$$

则空间 $\dot{H}_{p,q}^1(\mathbb{R}^3)$ 定义为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 在半范数 $\|\cdot\|_{\dot{H}_{p,q}^1(\mathbb{R}^3)}$ 下的闭包.

我们主要讨论 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 上的 Lorentz 空间 $L^{p,q}(\mathbb{R}^3)$, 在不引起混淆的情况下简记为 $L^{p,q}$, 同样将 $\dot{H}_{p,q}^1(\mathbb{R}^3)$ 简记为 $\dot{H}_{p,q}^1$. 虽然 $L^{p,q}$ 不是 Banach 空间, 但我们仍可以像处理 Banach 空间时那样定义 $L^{p,q}$ 上的连续线性泛函 T , 并定义 T 的范数为

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_{L^{p,q}}=1} |T(f)|.$$

所有这样的连续线性泛函装备上述定义的范数后组成的空间称为 $L^{p,q}$ 的对偶空间 $(L^{p,q})^*$. 关于一般情形下 $L^{p,q}$ 的对偶空间的讨论比较复杂, 感兴趣的读者可参见文献 [12, 定理 1.4.17]. 本文要用到的是其中一种较为简单的情形, 即引理 2.2.

引理 2.2 假设 $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, p' 和 q' 满足 $1/p' + 1/p = 1$, $1/q' + 1/q = 1$. 设 $f \in L^{p,q}$, $g \in L^{p',q'}$, 则

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^{p,q}} \|g\|_{L^{p',q'}}.$$

注 2.2 上述引理表明在该引理的条件下 $L^{p',q'} \subset (L^{p,q})^*$, 事实上可证明此时 $L^{p',q'} = (L^{p,q})^*$, 参见文献 [12, 定理 1.4.17]. 类似 Sobolev 空间的情形, 我们用 $\dot{H}_{p',q'}^{-1}$ 表示 $\dot{H}_{p,q}^1$ 对偶空间.

更一般地, 类似于 Lebesgue 空间的 Hölder 不等式, Lorentz 空间也成立类似的关系, 总结为以下引理. 引理 2.2 是该引理的一个特殊形式, 为了使用方便, 这里把两个引理都叙述出来.

引理 2.3 假设 $1 < p, p_1, p_2 < \infty$, $1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, 则函数的点乘是从 $L^{p_1,p_2} \times L^{q_1,q_2}$ 到 $L^{p,q}$ 的有界双线性算子, 即存在仅依赖于 p, p_1, p_2, q, q_1 和 q_2 的常数 C , 使得对任意 $f \in L^{p_1,p_2}$, $g \in L^{q_1,q_2}$, 成立

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq C\|f\|_{L^{p_1,p_2}} \|g\|_{L^{q_1,q_2}}.$$

引理的证明可参见文献 [13, 推论 2.3] 和 [14, 推论 1.1].

为了证明静态液晶方程的 Liouville 定理, 我们希望对 (1.4) 中的压强 p 有合适的估计, 即希望 u 和 ∇d 在 Lorentz 空间 $L^{9/2,q}$ 时, p 也在合适的 Lorentz 空间中. 为此, 我们归结为对下述简单模型的估计:

$$\Delta \xi = \nabla \cdot h, \quad (2.2)$$

这里 $\xi, h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. 我们有如下引理, 其估计本质上用到的是 $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ 时, Riesz 变换是 $L^{p,q}$ 上的有界线性算子, 其详细证明可参见文献 [8, 引理 2.1] 和 [15, 定理 3].

引理 2.4 设 $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, 则对任意的 $h \in \dot{H}_{p,q}^{-1}$, 方程 (2.2) 有唯一的解 $\xi \in L^{p,q}$, 且存在常数 $C = C(p, q)$, 使得

$$\|\xi\|_{L^{p,q}} \leq C \|h\|_{\dot{H}_{p,q}^{-1}}.$$

利用引理 2.4, 我们可以得到压强 p 的估计, 即有以下引理.

引理 2.5 设 u 和 d 为系统 (1.1)–(1.3) 的解且满足定理 1.1 的条件, 则压力 $p \in L^{9/4, q/2}(\mathbb{R}^3)$.

证明 方程 (1.1) 两边取散度, 利用 $\nabla \cdot u = 0$, 得到

$$\Delta p = -\nabla \cdot (u \cdot \nabla u) - \nabla \cdot \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d). \quad (2.3)$$

记矩阵 $u \otimes u = \{u_i u_j\}_{i,j=1}^3$, 则经过简单的计算可知,

$$\nabla \cdot \nabla \cdot (u \otimes u) = \nabla_i u_j \nabla_j u_i = \nabla \cdot (u \cdot \nabla u).$$

因此,

$$\Delta p = -\nabla \cdot \nabla \cdot (u \otimes u + \nabla d \odot \nabla d). \quad (2.4)$$

又因为 $u, \nabla d \in L^{9/2, q}$, 故 $\nabla \cdot (u \otimes u + \nabla d \odot \nabla d) \in \dot{H}_{9/4, q/2}^{-1}$. 从而对 (2.4) 使用引理 2.4 知 $p \in L^{9/4, q/2}$. 证毕. $\square$

3 定理的证明

3.1 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 取截断函数 $\eta(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, 满足

$$\overline{\text{supp}} \eta(x) \subset B_1, \quad \eta(x)|_{B_{1/2}} = 1, \quad (3.1)$$

这里 B_r 表示 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点、半径为 r 的开球. 对 $R > 0$, 令 $\eta_R(x) = \eta(\frac{x}{R})$. 假设 u 和 d 满足定理 1.1 的条件, 以 $u\eta_R$ 为测试函数作用在 (1.1) 两边, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u) \cdot u\eta_R + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla p \cdot u\eta_R = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot u\eta_R - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) \cdot u\eta_R, \quad (3.2)$$

用 $(\Delta d + |\nabla d|^2 d)\eta_R$ 作用在 (1.2) 两边, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla d) \cdot (\Delta d + |\nabla d|^2 d)\eta_R = \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta d + |\nabla d|^2 d|^2 \eta_R, \quad (3.3)$$

然后用 (3.3) 减 (3.2), 并适当调整各项的位置, 得到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta d + |\nabla d|^2 d|^2 \eta_R - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot u\eta_R \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla d) \cdot (\Delta d + |\nabla d|^2 d)\eta_R - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) \cdot u\eta_R \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u) \cdot u\eta_R - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla p \cdot u\eta_R. \end{aligned} \quad (3.4)$$

记

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta d + |\nabla d|^2 d|^2 \eta_R - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot u \eta_R, \\
 II &= \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla d) \cdot (\Delta d + |\nabla d|^2 d) \eta_R - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) \cdot u \eta_R, \\
 III &= - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u) \cdot u \eta_R, \\
 IV &= - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla p \cdot u \eta_R.
 \end{aligned}$$

I 、 II 、 III 和 IV 分别对应 (3.4) 中各项, 即有 $I = II + III + IV$. 下面对这 4 项进行估计.

对于 I , 由分部积分以及 $\eta_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot u \eta_R &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u_i u_i \eta_R \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \eta_R + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \Delta \eta_R.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

由 η_R 的构造可知, 存在常数 C (下文出现的常数可能互不相同, 在不引起混淆的情况下均用 C 表示) 使得

$$|\Delta \eta_R(x)| \leq \frac{C}{R^2} \chi_{B_R \setminus B_{R/2}}(x),$$

从而,

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \Delta \eta_R \right| \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |u|^2. \tag{3.6}$$

因为 $u \in L^{9/2, q}$, 所以, 由注 2.1 可知, $|u|^2 \in L^{9/4, q/2}$. 从而由引理 2.2 并注意到 $q > 2$, 有

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |u|^2 &\leq C \| |u|^2 \|_{L^{9/4, q/2}(B_R \setminus B_{R/2})} \| \chi_{B_R \setminus B_{R/2}} \|_{L^{9/5, \frac{q}{q-2}}} \\
 &= C \| u \|_{L^{9/2, q}(B_R \setminus B_{R/2})}^2 \| \chi_{B_R \setminus B_{R/2}} \|_{L^{9/5, \frac{q}{q-2}}}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

由定义, 有

$$d_{\chi_{B_R \setminus B_{R/2}}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{7}{6} \pi R^3, & 0 < \alpha < 1, \\ 0, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

从而,

$$\chi_{B_R \setminus B_{R/2}}^*(t) = \inf\{s > 0, d_{\chi_{B_R \setminus B_{R/2}}}(s) \leq t\} = \begin{cases} 1, & t < \frac{7}{6} \pi R^3, \\ 0, & t \geq \frac{7}{6} \pi R^3. \end{cases} \tag{3.8}$$

(3.8) 结合定义 2.1, 得到

$$\| \chi_{B_R \setminus B_{R/2}} \|_{L^{9/5, \frac{q}{q-2}}} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{5}{9}} \chi_{B_R \setminus B_{R/2}}^*(t))^{\frac{q}{q-2}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{2-q}{q}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{\frac{7}{6}\pi R^3} t^{\frac{5}{9}\frac{q}{q-2}-1} dt \right)^{\frac{q-2}{q}} \\
&= CR^{\frac{5}{3}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.6) 结合 (3.7) 和 (3.9), 得到

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \Delta \eta_R \right| \leq CR^{-\frac{1}{3}} \|u\|_{L^{\frac{9}{2}, q}}^2. \tag{3.10}$$

于是由 (3.5) 和 (3.10) 得到

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta d + |\nabla d|^2 d|^2. \tag{3.11}$$

对于 II, 首先考察 $(u \cdot \nabla d) \cdot d |\nabla d|^2 \eta_R$. 将其写成分量求和的形式, 并利用 $|d| = 1$, 可得

$$\begin{aligned}
(u \cdot \nabla d) \cdot d |\nabla d|^2 \eta_R &= u_i \nabla_i d_j d_j |\nabla d|^2 \eta_R \\
&= \frac{1}{2} u_i \nabla_i d_j^2 |\nabla d|^2 \eta_R \\
&= \frac{1}{2} u_i \nabla_i |d|^2 |\nabla d|^2 \eta_R \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

对 $\nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) \cdot u \eta_R$, 类似可得

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) \cdot u \eta_R &= u_i \nabla_j (\nabla_i d \cdot \nabla_j d) \eta_R \\
&= u_i (\nabla_i \nabla_j d \cdot \nabla_j d + \nabla_i d \cdot \nabla_j^2 d) \eta_R \\
&= \frac{1}{2} u_i \nabla_i |\nabla d|^2 \eta_R + (u \cdot \nabla d) \cdot \Delta d \eta_R.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.12) 和 (3.13) 代入 II 的定义并利用分部积分以及 $\nabla \cdot u = 0$, 可得

$$\begin{aligned}
II &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \nabla_i |\nabla d|^2 \eta_R \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_i u_i |\nabla d|^2 \eta_R + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla d|^2 u \cdot \nabla \eta_R \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla d|^2 u \cdot \nabla \eta_R.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

因为 $u \in L^{9/2, q}$, $\nabla d \in L^{9/2, q}$, 故由引理 2.3, 有 $|\nabla d|^2 |u| \in L^{3/2, q/3}$. 从而由引理 2.2 以及 $q > 3$, 有

$$\begin{aligned}
|II| &\leq \frac{C}{R} \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |\nabla d|^2 |u| \\
&\leq \frac{C}{R} \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |\nabla d|^2 |u| \\
&\leq \frac{C}{R} \| |\nabla d|^2 |u| \|_{L^{3/2, q/3}(B_R \setminus B_{R/2})} \| \chi_{B_R \setminus B_{R/2}} \|_{L^{3, \frac{q}{q-3}}}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

类似 (3.9), 可以得到

$$\| \chi_{B_R \setminus B_{R/2}} \|_{L^{3, \frac{q}{q-3}}} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{3}} \chi_{B_R \setminus B_{R/2}}^*(t))^{\frac{q}{q-3}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q-3}{q}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\int_0^{\frac{7}{6}\pi R^3} t^{\frac{1}{3}\frac{q}{q-3}-1} dt \right)^{\frac{q-3}{q}} \\
 &= CR.
 \end{aligned}$$

结合 (3.15) 并利用引理 2.3, 得到

$$\begin{aligned}
 |II| &\leq C \|\nabla d\|^2 \|u\|_{L^{3/2,q/3}(B_R \setminus B_{R/2})} \\
 &\leq C \|\nabla d\|_{L^{9/2,q}}^2 \|u\|_{L^{9/2,q}(B_R \setminus B_{R/2})}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

易证明

$$\|u\|_{L^{9/2,q}(B_R \setminus B_{R/2})} = \|u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}}\|_{L^{9/2,q}}.$$

因此, 由定义, 有

$$\|u\|_{L^{9/2,q}(B_R \setminus B_{R/2})} = \left(\int_0^\infty (t^{2/9} (u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}})^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

由分布的定义易知, 对任意的 $\alpha > 0$, 有

$$d_{u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}}}(\alpha) \leq d_u(\alpha).$$

因此,

$$\begin{aligned}
 (u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}})^*(t) &= \inf\{s > 0, d_{u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}}}(s) \leq t\} \\
 &\leq \inf\{s > 0, d_u(s) \leq t\} \\
 &= u^*(t).
 \end{aligned}$$

又因为 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0$, 故对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得

$$\sup_{x \in B_R \setminus B_{R/2}} |u(x)| < \epsilon.$$

从而,

$$(u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}})^*(t) \leq (u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}})^*(0) = \sup_{x \in B_R \setminus B_{R/2}} |u(x)| < \epsilon,$$

即 $R \rightarrow \infty$ 时, $(u \chi_{B_R \setminus B_{R/2}})^*(t)$ 一致趋于 0. 故由控制收敛定理, 可得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|u\|_{L^{9/2,q}(B_R \setminus B_{R/2})} = 0. \tag{3.17}$$

因此, 由 (3.16), 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} II = 0. \tag{3.18}$$

对于 III, 由分部积分以及 $\nabla \cdot u = 0$, 得

$$III = - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u) \cdot u \eta_R = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla |u|^2 \eta_R = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 u \cdot \nabla \eta_R.$$

而 $|u|^3 \in L^{3/2, q/3}$, 故类似 II 的处理可以得到

$$|III| \leq \frac{C}{R} \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |u|^3 \leq C \|u\|_{L^{9/2, q}(B_R \setminus B_{R/2})}^3 \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

对于 IV , 同样由分部积分得

$$|IV| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} pu \cdot \nabla \eta_R \right| \leq \frac{C}{R} \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |p| |u|. \quad (3.20)$$

由引理 2.5 可得 $p \in L^{9/4, q/2}$, 因此, IV 和 II 有着相同的估计, 从而有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} IV = 0. \quad (3.21)$$

结合 (3.11)、(3.18)、(3.19) 和 (3.21) 以及 $I = II + III + IV$, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta d + |\nabla d|^2 d|^2 = 0.$$

从而 $u \equiv \text{const.}$ 又因 $u \in \mathcal{D}$, 故 $u \equiv 0$. d 满足调和映照方程

$$\Delta d + |\nabla d|^2 d = 0. \quad (3.22)$$

此时由 (1.1) 和 (3.22) 并利用 $|d| = 1$ 知, 压力 p 满足

$$\begin{aligned} \nabla_i p &= -\nabla_j (\nabla_i d \cdot \nabla_j d) \\ &= -\nabla_i d \cdot \Delta d - \nabla_i \nabla_j d \cdot \nabla_j d \\ &= \nabla_i d \cdot |\nabla d|^2 d - \nabla_i \left(\frac{1}{2} |\nabla d|^2 \right) \\ &= |\nabla d|^2 \nabla_i \left(\frac{1}{2} |d|^2 \right) - \nabla_i \left(\frac{1}{2} |\nabla d|^2 \right) \\ &= -\nabla_i \left(\frac{1}{2} |\nabla d|^2 \right). \end{aligned}$$

从而, $\nabla(p + 1/2 |\nabla d|^2) = 0$, $p + 1/2 |\nabla d|^2$ 是一常数, 结合 $p + 1/2 |\nabla d|^2 \in L^{9/4, q/2}$, 知 $p + 1/2 |\nabla d|^2 \equiv 0$. 定理证毕. $\square$

注 3.1 由引理 2.1 知, 当 $q < \infty$ 时, $L^{9/2, q} \subset L^{9/2, \infty}$. 因此, 最自然的应是证明定理在 $u, |\nabla d| \in L^{9/2, \infty}$ 时成立, 虽然我们相信它是正确的, 但用本文的方法还不能对这一情形进行证明. 事实上, 当 $u, \nabla d \in L^{9/2, \infty}$ 时, 由引理 2.4 知压力 p 的估计仍成立, 而且由于 I 的导数较多, (3.11) 也成立. 但此时在估计 II 时对于 (3.17) 可适用的控制收敛定理不再成立, 即若某个函数 $f \in L^{9/2, \infty}$, 未必成立

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|f\|_{L^{9/2, \infty}(B_R \setminus B_{R/2})} = 0.$$

这里可以给出一个反例. 取 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 且 f 在无穷远处的衰减速度满足

$$|f(x)| = O(|x|^{-2/3}).$$

由定义易知, $f \in L^{9/2, \infty}$, 但是,

$$\|f\|_{L^{9/2, \infty}(B_R \setminus B_{R/2})} = \sup_{\alpha > 0} \alpha |\{ |f(x)| > \alpha, x \in B_R \setminus B_{R/2} \}|^{2/9}$$

$$\begin{aligned}
&\geq O(1)|f(R)| \cdot |B_R \setminus B_{R/2}|^{2/9} \\
&\geq O(1)R^{-2/3} \cdot (R^3)^{2/9} \\
&= O(1).
\end{aligned}$$

注 3.2 对于能量估计与不可压 Navier-Stokes 方程相似的稳态流体系统, 本质上都可以得到类似的结论. 例如, 考虑三维稳态不可压磁流体 (magnetohydrodynamics, MHD) 方程

$$\begin{cases} u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u - h \cdot \nabla h, \\ u \cdot \nabla h = \Delta h - h \cdot \nabla u, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \nabla \cdot h = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

其中 u 、 p 和 h 分别对应流体的速度场、压力和磁场. 若类似地假设 $u, h \in L^{9/2, q} \cap \mathcal{D}$, (3.23) 的第一式作用 $u\eta_R$, 第二式作用 $h\eta_R$, 并且两式相加得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + |\nabla h|^2)\eta_R &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|u|^2 u \cdot \nabla \eta_R + \int_{\mathbb{R}^3} p u \cdot \nabla \eta_R \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}(|u|^2 + |h|^2)\Delta \eta_R + \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot h)h \cdot \nabla \eta_R. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

对 (3.24) 右边各项可以采用定理 1.1 的证明方法进行估计, 最终同样可以得到 $u \equiv 0, h \equiv 0$.

3.2 定理 1.2 的证明

设 d 满足方程 (1.7), 则有

$$\int_{B_r} (x \cdot \nabla) d \cdot (\Delta d + |\nabla d|^2 d) = 0. \quad (3.25)$$

注意到

$$(x \cdot \nabla) d \cdot |\nabla d|^2 d = |\nabla d|^2 x \cdot \nabla \frac{|d|^2}{2} = 0,$$

从而,

$$\int_{B_r} (x \cdot \nabla) d \cdot \Delta d = \int_{B_r} x_i \nabla_i d_j \Delta d_j = 0. \quad (3.26)$$

对 (3.26) 利用分部积分可得

$$-\int_{B_r} \nabla(x_i \nabla_i d_j) \cdot \nabla d_j + \int_{\partial B_r} x_i \nabla_i d_j \nabla d_j \cdot \frac{x}{r} = 0.$$

而

$$x_i \nabla_i d_j \nabla d_j \cdot \frac{x}{r} = \frac{1}{r} |(x \cdot \nabla) d|^2 \geq 0,$$

因此,

$$\int_{B_r} \nabla(x_i \nabla_i d_j) \cdot \nabla d_j \geq 0,$$

即

$$\int_{B_r} |\nabla d|^2 + \int_{B_r} x_i \nabla_i \frac{|\nabla d|^2}{2} \geq 0.$$

继续利用分部积分, 可得

$$\int_{B_r} |\nabla d|^2 + \int_{\partial B_r} \frac{r}{2} |\nabla d|^2 - \frac{3}{2} \int_{B_r} |\nabla d|^2 \geq 0,$$

即

$$-\int_{B_r} |\nabla d|^2 + r \int_{\partial B_r} |\nabla d|^2 \geq 0,$$

从而有 $r^2 \frac{d}{dr} (\frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla d|^2) \geq 0$, 即

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla d|^2 \right) \geq 0.$$

因此, 对任意的 $R > r$, 有 $\frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla d|^2 \leq \frac{1}{R} \int_{B_R} |\nabla d|^2$. 从而有

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \int_{B_r} |\nabla d|^2 \leq \frac{1}{R} \int_{B_R \setminus B_r} |\nabla d|^2. \quad (3.27)$$

又因 $\nabla d \in L^3$, 则由 Hölder 不等式, 有

$$\frac{1}{R} \int_{B_R \setminus B_r} |\nabla d|^2 \leq \frac{1}{R} \left(\int_{B_R \setminus B_r} |\nabla d|^3 \right)^{\frac{2}{3}} \cdot C(R^3 - r^3)^{\frac{1}{3}} \leq C \left(\int_{B_R \setminus B_r} |\nabla d|^3 \right)^{\frac{2}{3}}.$$

令 $R \rightarrow \infty$ 并结合 (3.27), 可得

$$\frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla d|^2 \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_r} |\nabla d|^3 \right)^{\frac{2}{3}}.$$

由左边表达式随 r 的单调性, 有

$$\frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla d|^2 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla d|^2 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} C \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_r} |\nabla d|^3 \right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

从而由 r 的任意性知 $\nabla d \equiv 0$. 定理 1.2 证毕.

参考文献

- 1 Lin F H, Lin J Y, Wang C Y. Liquid crystal flows in two dimensions. Arch Ration Mech Anal, 2010, 197: 297–336
- 2 Galdi G P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems. New York: Springer, 2011
- 3 Chae D, Wolf J. On Liouville type theorems for the steady Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. J Differential Equations, 2016, 261: 5541–5560
- 4 Seregin G. A Liouville type theorem for steady-state Navier-Stokes equations. arXiv:1611.01563, 2016
- 5 Seregin G. Liouville type theorem for stationary Navier-Stokes equations. Nonlinearity, 2016, 29: 2191–2195
- 6 Chae D. Liouville-type theorems for the forced Euler equations and the Navier-Stokes equations. Comm Math Phys, 2014, 326: 37–48
- 7 Kozono H, Terasawa Y, Wakasugi Y. A remark on Liouville-type theorems for the stationary Navier-Stokes equations in three space dimensions. J Funct Anal, 2017, 272: 804–818

- 8 Heck H, Kim H, Kozono H. On the stationary Navier-Stokes flows around a rotating body. *Manuscripta Math*, 2012, 138: 315–345
- 9 Choi H I. On the Liouville theorem for harmonic maps. *Proc Amer Math Soc*, 1982, 85: 91–94
- 10 Jin Z R. Liouville theorems for harmonic maps. *Invent Math*, 1992, 108: 1–10
- 11 Schoen R, Uhlenbeck K. Regularity of minimizing harmonic maps into the sphere. *Invent Math*, 1984, 78: 89–100
- 12 Grafakos L. *Classical Fourier Analysis*, vol. 2. New York: Springer, 2008
- 13 Lemarié-Rieusset P G. *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem*. Boca Raton: CRC Press, 2002
- 14 Bjorland C, Brandolese L, Iftimie D, et al. L^p -solutions of the steady-state Navier-Stokes equations with rough external forces. *Comm Partial Differential Equations*, 2010, 36: 216–246
- 15 Sawyer E T. Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces. *Studia Math*, 1990, 96: 145–158

A Liouville theorem for three-dimensional stationary nematic liquid crystal equations

Keyan Wang & Wenjie Lu

Abstract In this paper, we prove a Liouville type theorem for three-dimensional stationary liquid crystal equations under the condition $u, \nabla d \in L^{9/2, q}(\mathbb{R}^3)$, where $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotes the velocity field and $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ is the molecular direction. The proof of this theorem is inspired by Galdi's ideas of using local energy estimates in proving the Liouville theorem for three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations in $L^{9/2}(\mathbb{R}^3)$ and Schoen's description on the harmonic maps. We generalize Galdi's results to Lorentz spaces and nematic liquid crystal systems.

Keywords nematic liquid crystal equations, the Liouville theorem, Lorentz spaces

MSC(2020) 35Q35, 76B03

doi: 10.1360/SSM-2019-0186