

群的 $\mathcal{F}$ -次正规与 $\mathcal{F}$ -次反正规链^{*}

李世荣

(广西大学数学系, 南宁 530004)

摘要 给定一个子群闭的饱和群系 $\mathcal{F}$, 定义群类 $\mathcal{F}_{pc}$, 使得 $G \in \mathcal{F}_{pc}$ 当且仅当对于每个子群 $X \leq G$, 存在 G 的一个 $\mathcal{F}$ -次正规子群 S , $X \leq S$ 并且 X 在 S 中 $\mathcal{F}$ -次反正规. 借助 $\mathcal{F}$ -投射子和 $\mathcal{F}$ -覆盖子群, 给出了 $\mathcal{F}_{pc}$ -群的特征.

关键词 有限群 群系 $\mathcal{F}$ -次正规 $\mathcal{F}$ -投射子

本文考虑的群均为有限 (不必可解). 设 $\mathcal{F}$ 是一个饱和群系, G 是一个群. G 的一个极大子群 M 称为 $\mathcal{F}$ -正规的, 如果 $G/\text{Core}_G(M) \in \mathcal{F}$; 否则 M 称为 $\mathcal{F}$ -次反正规的. G 的一个子群 H 称为在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规的, 如果存在一个极大链: $H = U_0 < U_1 < \dots < U_n = G$, 使得 U_{i-1} $\mathcal{F}$ -正规于 U_i , $i = 1, 2, \dots, n$. H 称为 $\mathcal{F}$ -次反正规的, 如果 $H \leq X <^\circ Y \leq G$ 时, X $\mathcal{F}$ -反正规于 Y , 这里 $X <^\circ Y$ 表示 X 是 Y 的极大子群. 特别地, G 同时是 $\mathcal{F}$ -次正规和 $\mathcal{F}$ -次反正规的, 并且 G 是唯一一个具有此性质的子群.

设 $H \leq K \leq G$. 如果 H 在 K 中 $\mathcal{F}$ -次正规而 K 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规, 则 H 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规. 这样, 对于任意 $X \leq G$, 由于 G 为 $\mathcal{F}$ -次正规, 可以找到 G 的包含 X 的 $\mathcal{F}$ -次正规子群 S , 使得 S 中包含的 X 的真子群均非 $\mathcal{F}$ -次正规于 S .

定义 0.1 群 G 的子群对 (X, S) 称为 G 的一个 $\mathcal{F}_{pc}$ -链, 如果 X $\mathcal{F}$ -次反正规于 S 并且 S $\mathcal{F}$ -次正规于 G .

定义 0.2 群 G 称为 $\mathcal{F}_{pc}$ -群, 如果对于 G 的每一个子群 X 都有 G 的 $\mathcal{F}_{pc}$ -链 (X, S) . 用 $\mathcal{F}_{pc}$ 表示所有 $\mathcal{F}_{pc}$ -群作成的类.

考虑情形 $\mathcal{F} = \mathcal{N}$ (幂零群系). 显然, $\mathcal{N}$ -次正规子群一定次正规. 但反之不真. 例如, $\text{SL}(2, 5)$ 的中心次正规但非 $\mathcal{N}$ -次正规. 对于 $\mathcal{N}_{pc}$ -群, $\mathcal{N}$ -次正规与次正规是一致的. 事实上, 这个结论对可解群类成立, 而每一个 $\mathcal{N}_{pc}$ -群可解 (见推论 2.2).

以下是本文使用的一些记号. 除非特别说明, 文中的记号与术语均是标准的. $\mathcal{E}$: 所有有限群作成的类; $\mathcal{A}$: 所有有限 Abel 群作成的类; $\text{Proj}_{\mathcal{F}}(G)$: G 的所有 $\mathcal{F}$ -投射子作成的集合; $\text{Cov}_{\mathcal{F}}(G)$: G 的所有 $\mathcal{F}$ -覆盖子群作成的集合; $G^{\mathcal{F}}$: G 的 $\mathcal{F}$ -剩余; $\mu(G)$: $G^{\mathcal{F}}$ 在 G 中所有极小补作成的集合; $K[H]$: 群 K 通过群 H 的可裂扩张; $M <^\circ G$: M 是 G 的极大子群.

文献[1]中定义了群类 $\mathcal{F}_{an}$. $G \in \mathcal{F}_{an}$ 当且仅当 G 的每个子群 $\mathcal{F}$ -次正规或 $\mathcal{F}$ -次反正规. 用本文的术语, $G \in \mathcal{F}_{an}$ 当且仅当对于每一个 $X \leq G$, G 有 $\mathcal{F}_{pc}$ -链 (X, X) 或 (X, G) . 因此, $\mathcal{F}_{an}$ -群是 $\mathcal{F}_{pc}$ -群的平凡情形. $\mathcal{F}_{an}$ -群已经被刻画.

定理 A^[1] 设 $\mathcal{F}$ 是子群闭的饱和群系, 则下列陈述等价:

- (i) $G \in \mathcal{F}_{\text{an}}$;
- (ii) $\text{Cov}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$, 且只要 $G^{\mathcal{F}} \leq H < G$, 便有 $H \in \mathcal{F}$;
- (iii) $\text{Proj}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$, 且只要 $G^{\mathcal{F}} \leq H < G$, 便有 $H \in \mathcal{F}$.

文献[1~3]研究了一些特殊的 $\mathcal{F}_{\text{an}}$ -群. 特别地, 当 $\mathcal{F}$ 是可解 p -幂零群类 (p 为奇素数) 时, 给出了 $\mathcal{F}_{\text{an}}$ -群的结构^[2].

G 的子群 F 称为 G 的一个投射子, 如果对于任意 $N \triangleleft G$, FN/N 在 G/N 中 $\mathcal{F}$ -极大. 如果对于任意 $F \leq H \leq G$, F 都是 H 的 $\mathcal{F}$ -投射子, 则 F 称为 G 的 $\mathcal{F}$ -覆盖子群. $\mathcal{F}$ -投射子不一定是 $\mathcal{F}$ -覆盖子群, 且一般地 $\mathcal{F}$ -覆盖子群不一定存在. 然而, $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -群确有 $\mathcal{F}$ -覆盖子群, 并且一致于 $\mathcal{F}$ -投射子.

1 预备引理

引理 1.1 设 $\mathcal{F}$ 为子群闭群系, 则

- (i) 如果 H 是 G 的 $\mathcal{F}$ -次正规子群且 $H \leq K \leq G$, 则 H 在 K 中 $\mathcal{F}$ -次正规;
- (ii) 如果 H 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规且 $N \triangleleft G$, 则 HN/N 在 G/N 中 $\mathcal{F}$ -次正规;
- (iii) 如果 H 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次反正规且 $N \triangleleft G$, 则 HN/N 在 G/N 中 $\mathcal{F}$ -次反正规.

证 (i) 对 G 用归纳法. 情形 $H = G$ 是平凡的. 假设 $H < G$. 由假设, H $\mathcal{F}$ -次正规于 G , 故存在 G 的 $\mathcal{F}$ -正规极大子群 M , M 包含 H 且 H 在 M 中 $\mathcal{F}$ -次正规. 当然 $G^{\mathcal{F}} \subseteq M$. 因为 $\mathcal{F}$ -子群闭, 所以 $K^{\mathcal{F}} \leq G^{\mathcal{F}}$. 由此得 $\langle K^{\mathcal{F}}, H \rangle \subseteq M \cap K$, 这样, $M \cap K$ 在 K 中 $\mathcal{F}$ -次正规. 另一方面, 归纳假设隐含 H $\mathcal{F}$ -次正规于 $M \cap K$. 从而 H 在 K 中 $\mathcal{F}$ -次正规.

(ii) 和 (iii) 由定义可得.

引理 1.2^[3] G 的 $\mathcal{F}$ -次正规子群的交在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规, 其中 $\mathcal{F}$ 是子群闭群系.

引理 1.2 断言 G 的子群 H 的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包, 即 G 的包含 H 的所有 $\mathcal{F}$ -次正规子群的交, 是 G 中包含 H 的唯一最小 $\mathcal{F}$ -次正规子群.

引理 1.3^[4,5] 设 $\mathcal{F}$ 为饱和群系, 则

- (i) 如果 $F \in \mu(G)$, 则 $F \cap G^{\mathcal{F}} \leq \Phi(F)$ 且 $F \in \mathcal{F}$, 其中 $\Phi(F)$ 是 F 的 Frattini 子群;
- (ii) $\mathcal{F} \in \text{Cov}\mathcal{A}(G)$ 当且仅当 $F \in \mathcal{F}$ 且 F 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次反正规.

如果 F 是 G 的 $\mathcal{F}$ -投射子, 则 $G = FG^{\mathcal{F}}$, 故 F 是 $G^{\mathcal{F}}$ 在 G 中的补. 对于 $G^{\mathcal{F}}$ 在 G 中的所有极小补都是 G 的 $\mathcal{F}$ -投射子这种极端情形, 有如下结论:

引理 1.4 设 $\mathcal{F}$ 为饱和群系. 如果 $\mu(G) \subseteq \text{Proj}\mathcal{A}(G)$, 则

- (i) $\text{Proj}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$,
- (ii) $\text{Proj}\mathcal{A}(G) = \text{Cov}\mathcal{A}(G)$.

证 (i) 对于任意 $F \in \text{Proj}\mathcal{A}(G)$, $G = FG^{\mathcal{F}}$, 故 F 包含 $G^{\mathcal{F}}$ 在 G 中的一个极小补, 设为 H . 由假设, $H \in \text{Proj}\mathcal{A}(G)$. 这样, $F = H \in \mu(G)$.

(ii) 由定义, $\text{Cov}\mathcal{A}(G) \subseteq \text{Proj}\mathcal{A}(G)$, 故仅需证明 $\text{Proj}\mathcal{A}(G) \subseteq \text{Cov}\mathcal{A}(G)$, 即对于任意 $F \in \text{Proj}\mathcal{A}(G)$ 证明 $F \leq H \leq G$ 时, $H = FH^{\mathcal{F}}$.

首先, 有 $G = FG^{\mathcal{F}} = HG^{\mathcal{F}}$, 于是

$$H^{\mathcal{F}} \leq G^{\mathcal{F}} \cap H.$$

设 K 是 $H^{\mathcal{F}}$ 在 H 中的极小补, 此时由引理 1.3(i), $K \in \mathcal{F}$, 且 $G = HG^{\mathcal{F}} = KH^{\mathcal{F}}G^{\mathcal{F}} = KG^{\mathcal{F}}$. 这样可以找到 $G^{\mathcal{F}}$ 在 G 中的一个极小补 $Y \leq K$. 由假设 $Y \in \text{Proj}\mathcal{A}(G)$. 特别地, Y 在 G 中 $\mathcal{F}$ 极大, 进而 $K = Y \in \text{Proj}\mathcal{A}(G)$. 由此得出

$$K \cap G^{\mathcal{F}} \subseteq \Phi(K).$$

断言 $\Phi(K)H^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}} \leq \Phi(H/H^{\mathcal{F}})$.

如果 $H = H^{\mathcal{F}}$, 因为 K 是 $H^{\mathcal{F}}$ 在 H 中的极小补, 故 $K = 1$, 这是平凡情形. 假设 $H^{\mathcal{F}} < H$. 设 M 是 H 之包含 $H^{\mathcal{F}}$ 的任一极大子群并且令 $K_0 = K \cap M$, 此时 $K_0H^{\mathcal{F}} \leq M$. 另一方面, 因为 $H = KH^{\mathcal{F}}$, 故对于任意 $m \in M$ 有 $m = kh$, 其中, $k \in K$, $h \in H^{\mathcal{F}}$. 由此, 通过 $H^{\mathcal{F}} \leq M$, 有 $k = mh^{-1} \in M$, 进而 $m \in K_0H^{\mathcal{F}}$, 这样, $M = K_0H^{\mathcal{F}}$. 假设 $K_0 < K_1 < K$, 因为 K 是 $H^{\mathcal{F}}$ 在 H 中的一个极小补, 所以 $K_1H^{\mathcal{F}}$ 是 H 的含有 M 的真子群. 由 M 的极大性, 有 $M = K_1H^{\mathcal{F}}$, 进而 $K_0 = K_1$, 矛盾. 由此得出 K_0 是 K 的极大子群. 于是对于 H 的包含 $H^{\mathcal{F}}$ 的极大子群 M , 有 $\Phi(K) \leq K_0 \leq M$. 这样, 得出 $\Phi(K)H^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}}$ 含在 $H/H^{\mathcal{F}}$ 的每个极大子群 $M/H^{\mathcal{F}}$ 中, 断言得证. 此时

$$\begin{aligned} H \cap G^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}} &= KH^{\mathcal{F}} \cap G^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}} = H^{\mathcal{F}}(K \cap G^{\mathcal{F}})/H^{\mathcal{F}} \leq \\ &\Phi(K)H^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}} \leq \Phi(H/H^{\mathcal{F}}), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} H/H^{\mathcal{F}} &= FG^{\mathcal{F}} \cap H/H^{\mathcal{F}} = F(G^{\mathcal{F}} \cap H)/H^{\mathcal{F}} = \\ &FH^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}} \circ G^{\mathcal{F}} \cap H/H^{\mathcal{F}} \leq FH^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}} \circ \Phi(H/H^{\mathcal{F}}) = FH^{\mathcal{F}}/H^{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

得 $H = FH^{\mathcal{F}}$.

引理 1.5 假设 $G \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$ 且 $N \triangleleft G$, 其中 $\mathcal{F}$ 为子群闭饱和群系. 如果 (X, S) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链, 则 $(XN/N, SN/N)$ 是 G/N 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链. 特别地, $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ 是一个同态.

证 首先, 因为 S 在 G 中 $\mathcal{F}$ 次正规, 所以由引理 1.1 得 SN/N 在 G/N 中 $\mathcal{F}$ 次正规. 其次, 有

$$SN/N \cong S/S \cap N, \quad XN/N \cong X(S \cap N)/S \cap N.$$

由引理 1.1, 因为 X 在 S 中 $\mathcal{F}$ 次反正规, 故 $X(S \cap N)/S \cap N$ 在 $S/S \cap N$ 中 $\mathcal{F}$ 次反正规. 这样 XN/N 在 SN/N 中 $\mathcal{F}$ 次反正规. 由定义, $(XN/N, SN/N)$ 是 G/N 的一个 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链, 于是 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ 是一个同态.

2 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -群的一个特征性质

本节证明定理 2.2, 它是文献[1]中定理 1.6 的推广.

定义 2.1 (i) 称群 G 具有性质(P), 如果 $\text{Proj}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$;

(ii) 称群 G 具有性质(C), 如果 $\text{Cov}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$.

由引理 1.4 知 G 具有性质(P)当且仅当它具有性质(C).

定理 2.1 设 $\mathcal{F}$ 为子群闭饱和群系, $G \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$. 对于每个 $X \leq G$, 设 (X, S) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链, 则 S 是 X 在 G 中的 $\mathcal{F}$ 次正规闭包.

证 设 H 是 G 的包含 X 的 $\mathcal{F}$ 次正规子群. 由引理 1.2, $Y = S \cap H$ 在 G 中 $\mathcal{F}$ 次正规,

进而由引理 1.1, Y 也 $\mathcal{F}$ -次正规于 S . 但 $X \leq Y \leq S$ 且由定义 X $\mathcal{F}$ -次反正规于 S . 由此得出 $Y = S$. 于是 S 是 X 的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包.

定理 2.2 设 $\mathcal{F}$ 为子群闭饱和群系, 则下列陈述等价:

- (i) $G \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$;
- (ii) G 的每个 $\mathcal{F}$ -次正规子群具有性质 (P);
- (iii) G 的每个 $\mathcal{F}$ -次正规子群具有性质 (C).

证 (i) $\Rightarrow$ (ii): 首先证明 G 具有性质 (P). 由引理 1.3(i), 对于任意 $F \in \mu(G)$ 有 $F \in \mathcal{F}$ 且 $G = FG^{\mathcal{F}}$. 假设有子群 K 和 H , 使得 $F \leq K <^{\circ} H \leq G$ 且 K 在 H 中 $\mathcal{F}$ -正规. 设 (K, S) 是 G 的一个 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链. 由定义 K 在 S 中 $\mathcal{F}$ -次反正规而 S 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规. 这样由于 K 并非 $\mathcal{F}$ -次反正规于 G , 故 $S < G$, 所以 G 中存在包含 S 的极大子群 M , 使得 M 是 $\mathcal{F}$ -正规的, 即 $G/\text{Core}_G(M) \in \mathcal{F}$. 这样, $G^{\mathcal{F}} \leq \text{Core}_G(M) \leq M$, 所以 $G = FG^{\mathcal{F}} \leq M < G$, 这是一个矛盾. 上述证明得出 F 必定 $\mathcal{F}$ -次反正规于 G . 现在由引理 1.3(ii) 知, F 是 G 的 $\mathcal{F}$ -覆盖子群. 特别地, F 是 G 的 $\mathcal{F}$ -投射子, 即 $F \in \text{Proj}\mathcal{A}(G)$. 由 F 的任意性得 $\mu(G) \subseteq \text{Proj}\mathcal{A}(G)$. 于是由引理 1.4 得到 $\text{Proj}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$, 即 G 具有性质 (P).

现在设 H 是 G 的 $\mathcal{F}$ -次正规子群. 由上面讨论, 仅需证明 $H \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$. 设 X 是 H 的子群, 此时存在 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链 (X, S) . 由定理 2.1, S 是 X 在 G 中的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包, 故 $S \subseteq H$. 由引理 1.1 知 S 也是 H 的 $\mathcal{F}$ -次正规子群, 进而 (X, S) 是 H 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链. 这就证明了 $H \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 由引理 1.4 立得.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 对 $|G|$ 用归纳法. 设 $X \leq G$. 往证 G 有 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链 (X, S) . 首先, 设 $G = G^{\mathcal{F}}X$. 此时 X 包含 $G^{\mathcal{F}}$ 在 G 中的一个极小补, 设为 F . 由假设, $F \in \text{Cov}\mathcal{A}(G)$. 于是由引理 1.3 知 F , 并且因此 X , $\mathcal{F}$ -次反正规于 G . 由此推出 (X, G) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链. 现在设 $G^{\mathcal{F}}X < G$. 记 $M = G^{\mathcal{F}}X$. 因为 $\mathcal{F}$ 是子群闭, 故 M $\mathcal{F}$ -次正规于 $G^{[5]}$. 于是由假设, M 具有性质 (C). 由归纳假设可以看出 M 有一个 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链 (X, S) . 由定义, S $\mathcal{F}$ -次正规于 M , 进而 S $\mathcal{F}$ -次正规于 G . 故 (X, S) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链.

因为对于任意有限群 G , $\mu(G)$ 非空, 定理 2.2 说明对于 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ 中的群必存在 $\mathcal{F}$ -覆盖子群并且一致于 $\mathcal{F}$ -投射子.

推论 2.1 设 $\mathcal{F}$ 为子群闭饱和群系且 $G \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$, 那么,

- (i) 假设 H 是 G 的 $\mathcal{F}$ -次正规子群, 则存在 G 的 $\mathcal{F}$ -子群 F , 使得 (F, H) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链;
- (ii) 设 $F \leq G$ 且 $F \in \mathcal{F}$, 则 F 是 F 在 G 中的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包的 $\mathcal{F}$ -覆盖子群;
- (iii) 设 $\mathcal{F}$ 的特征为 $\chi(\mathcal{F})$, 则 $\{1\}$ 在 G 中的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包是 G 的唯一极大 $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ -子群.

证 (i) 由定理 2.2, $\text{Cov}\mathcal{A}(H) = \mu(H) \neq \emptyset$, 故可以找到 H 的一个 $\mathcal{F}$ -覆盖子群 F . 由引理 1.3, F 在 H 中 $\mathcal{F}$ -次反正规. 这样, 由定义, (F, H) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链.

(ii) 设 S 是 F 在 G 中的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包, 则由定理 2.1, (F, S) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链. 由定义, F 在 S 中 $\mathcal{F}$ -次反正规. 由引理 1.3(ii) 得 $F \in \text{Proj}\mathcal{A}(S)$.

(iii) 设 V 是 G 的极大 $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ -子群而 (V, S) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链. 由定理 2.1, S 是 V 在 G 中的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包.

断言 $S \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$.

否则, 存在整除 $|S|$ 的素数 p , 使得 $p \in \chi(\mathcal{F})$, 故 $\mathcal{F}$ 含有 p 阶循环群. 现在设 P 是 S 的

p 阶循环子群, 则 $P \in \mathcal{F}$, 而子群 $\{1\}$ 在 P 中 $\mathcal{F}$ 正规. 另一方面, 由定理 2.2, $S \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$. 这样, S 有 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链 $(\{1\}, S_0)$. 自然, $P \not\subseteq S_0$, 所以 $S_0 < S$, 于是 $S^{\mathcal{F}} < S$. 因为 $\mathcal{F}$ 子群闭, 子群 $VS^{\mathcal{F}}$ 在 S 中 $\mathcal{F}$ 次正规. 但 V 在 S 中 $\mathcal{F}$ 次反正规, 故得 $S = VS^{\mathcal{F}}$. 这样 V 包含 $S^{\mathcal{F}}$ 在 S 中的一个极大子群 $F > 1$. 由引理 1.3(i), $F \in \mathcal{F}$ 这与 $V \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}\mathcal{S}}$ 的假设矛盾. 因此有 $S \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}\mathcal{S}}$, 从而由 V 的极大性推出 $S = V$. 因为 $\{1\}$ 是 V 中唯一的 $\mathcal{F}$ 子群, 故由 (i), V 是 $\{1\}$ 的 $\mathcal{F}$ 次正规闭包.

推论 2.2 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ 中的每个群可解.

证 对 G 的阶用归纳法. 设 P 是 G 的 p 阶子群, 其中 p 为素数. 此时 $\{1\}$ 在 P 中 $\mathcal{F}$ 次正规. 设 $(1, S)$ 是 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链, 这样, $P \not\subseteq S$. 因此 G 有包含 S 的极大子群 M , 使得 M 在 G 中 $\mathcal{F}$ 正规, 即 $M \triangleleft G$. 由定理 2.2, $M \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$. 于是由归纳, M 可解, 得 G 可解.

3 情形 $\mathcal{F} = \mathcal{E}_p \mathcal{E}_p$

这一节假设 $\mathcal{F} = \mathcal{E}_p \mathcal{E}_p$, 即 p -幂零群类, 其中 p 为素数. 显然, $\mathcal{F}$ 为子群闭饱和群系. 定理 3.1 给出了 $\mathcal{F} = \mathcal{E}_p \mathcal{E}_p$ 时 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -群的结构.

引理 3.1 设 $G \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$ 且 $G \notin \mathcal{F}$ 则 $O_p(G) > 1$.

证 由定理 2.2, $G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$. 因为 $G \notin \mathcal{F}$ 故 G 非 p -幂零, 特别 $p \nmid |G|$. 于是可以找到 G 的一个 p 阶子群 P , 且显然单位元群 $\{1\}$ 在 P 中 $\mathcal{F}$ 次正规. 设 $(\{1\}, S)$ 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链, 则 $P \not\subseteq S$, 进而 $S < G$. 故存在 G 的包含 S 的极大子群 L , 使得 L 在 G 中 $\mathcal{F}$ -正规, 从而 $G^{\mathcal{F}} \leq L < G$. 如果 $G^{\mathcal{F}} \notin \mathcal{F}$ 由归纳可得 $O_p(G^{\mathcal{F}}) > 1$, 进而 $O_p(G) \geq O_p(G^{\mathcal{F}}) > 1$ 为所求. 由此可假设 $G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$, 也就是说, $G^{\mathcal{F}}$ 为 p -幂零.

如果 $p \nmid |G/G^{\mathcal{F}}|$, 因为 $G/G^{\mathcal{F}}$ 为 p -幂零, 故 G 包含指数为 p 的正规子群 K . 因假设 G 不是 p -幂零, 推出 K 也不是 p -幂零. 显然, K 在 G 中 $\mathcal{F}$ -正规. 由定理 2.2, $K \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$. 归纳得 $O_p(K) > 1$, 这样, $O_p(G) \geq O_p(K) > 1$ 为所求. 于是可以假设 $G/G^{\mathcal{F}}$ 是 p' -群.

设 P 为 G 的 Sylow p -子群. 因为 $G^{\mathcal{F}}$ 为 p -幂零, 由上面讨论可知, $1 < P \leq G^{\mathcal{F}}$ 且 $G^{\mathcal{F}} = P[H]$, 其中 H 是 $G^{\mathcal{F}}$ 的正规 p -补, 并且 $H \triangleleft G$. 另一方面, 由 Frattini 论断知, $G = N_G(P)G^{\mathcal{F}} = N_G(P)H$, 又由 Schur-Zassenhaus 定理^[6] 知, $N_G(P)$ 有一个 p -补 F , 使得 $N_G(P) = [P]F$. 所以 $G = N_G(P)H = PFH = PHF = G^{\mathcal{F}}F$. 考虑子群 FH , 如果 $FH = F$, 则 $G = PHF = PF = N_G(P)$, 即 $O_p(G) = P > 1$ 为所求. 这样, 可以假设 $F < FH$. 因为 H 和 F 都是 p' -群, 故 FH 也是 p' -群. 特别地, $FH \in \mathcal{F}$ 进而 F 在 FH 中 $\mathcal{F}$ 次正规. 现在设 (F, S) 是 G 的 $\mathcal{F}_{\text{pc}}$ -链. 那么由定义, F 在 S 中 $\mathcal{F}$ 次反正规, 进而 $H \not\subseteq S$. 于是 G 存在包含 S 的极大子群 L , 使得 L 在 G 中 $\mathcal{F}$ 正规, 这就有 $G^{\mathcal{F}} \leq L$, 产生矛盾: $G = FG^{\mathcal{F}} = SG^{\mathcal{F}} \leq L < G$.

下面的定理是本节的主要结果, 它推广了文献[2]中的定理 A.

定理 3.1 设 $G \in \mathcal{F}_{\text{pc}}$, 则 G 是半直积

$$G = [G^{\mathcal{F}}]F,$$

其中 (i) $G^{\mathcal{F}}$ 是 p -群, 且 (ii) $F \in \text{Proj}\mathcal{A}(G) = \text{Cov}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$.

证 情形 $G \in \mathcal{F}$ 是平凡的. 假设 $G \notin \mathcal{F}$ 由引理 3.1, $O_p(G) > 1$ 且由引理 1.5,

$G/O_p(G) \in \mathcal{F}_{pc}$. 因为 $O_p(G/O_p(G)) = 1$, 再次应用引理 3.1 得 $G/O_p(G) \in \mathcal{F}$. 于是 $G^\mathcal{F} \subseteq O_p(G)$, (i) 得证.

用 $H/G^\mathcal{F}$ 记 $G/G^\mathcal{F}$ 的正规 p -补. 此时 $G^\mathcal{F}$ 是 H 的 Sylow p -子群. 由 Schur-Zassenhaus 定理^[6], $H = [G^\mathcal{F}]K$, 其中 K 是 H 的 p' -Hall 子群. 显然, K 是 G 的 p -补. 由 Frattini 论断, $G = N_G(K)G^\mathcal{F}$. 下面证明

$$N_G(K) \cap G^\mathcal{F} = 1.$$

假设 $D = N_G(K) \cap G^\mathcal{F} > 1$. 显然, 子群 $KD = K \times D \in \mathcal{F}$ 且 $K < KD$. 设 $H = KG^\mathcal{F}$, 则 H 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规, 进而由定理 2.2, $H \in \mathcal{F}_{pc}$. 现设 (K, S) 是 H 的 $\mathcal{F}_{pc}$ -链. 由定义, K 在 S 中 $\mathcal{F}$ -次反正规, 而且显然 K $\mathcal{F}$ -次正规于 KD , $D \not\subseteq S$, 故 $S < H$, H 有包含 S 的极大子群 M , 使得 M 在 H 中 $\mathcal{F}$ -正规, 于是 $H^\mathcal{F} \subseteq M$. 由此得 $H^\mathcal{F}K \leq M < H = [G^\mathcal{F}]K$. 于是由 $H^\mathcal{F} \subseteq G^\mathcal{F}$ (因为 $\mathcal{F}$ 子群闭) 得 $H^\mathcal{F} < G^\mathcal{F}$. 另一方面, 因为 K 是 G 的 p -补且 $G/G^\mathcal{F}$ 为 p -幂零, 故 $H = KG^\mathcal{F}$ 正规于 G 且 G/H 是 p -群. 注意到 $H/H^\mathcal{F}$ 是 p -幂零群, 知 $G/H^\mathcal{F}$ 必为 p -幂零, 由此推出 $G^\mathcal{F} \subseteq H^\mathcal{F}$, 矛盾.

现在可断言 $G = [G^\mathcal{F}]N_G(K)$ 是半直积. 特别地, $N_G(K)$ 是 $G^\mathcal{F}$ 在 G 中的极小补. 由定理 2.2, 有 $N_G(K) \in \text{Proj}\mathcal{A}(G) = \text{Cov}\mathcal{A}(G) = \mu(G)$.

推论 3.1 $\mathcal{A}_p\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{pc} \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{F}$.

证 由定理 3.1 得 $\mathcal{F}_{pc} \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{F}$. 假设 $G \in \mathcal{A}_p\mathcal{F}$ 即 $G^\mathcal{F}$ 是 Abel p -群. 需证明: 对于任意 $X \leq G$, G 有 $\mathcal{F}_{pc}$ -链 (X, S) .

首先设 $G = XG^\mathcal{F}$. 仅需证明 X $\mathcal{F}$ -次反正规于 G , 因为它保证 (X, G) 是 G 的 $\mathcal{F}_{pc}$ -链. 设此结论不成立. 由定义, G 有两个子群 Y 和 U , 使得 $X \leq Y < U \leq G$ 且 Y $\mathcal{F}$ -正规于 U , $G = XG^\mathcal{F} = YG^\mathcal{F}$, 又因为 $G^\mathcal{F}$ 是 p -群, 故 $|G:Y|$ 为 p 的幂. 特别地, $|U:Y|$ 是 p 的幂. 现在 $U/\text{Core}_U(Y) \in \mathcal{F}$ 即 $\bar{U} := U/\text{Core}_U(Y)$ 是 p -幂零的. 设 $\bar{C}$ 是 $\bar{U}$ 的正规 p -补. 如果 $\bar{C} \not\subseteq \bar{Y}$, 由于 Y 在 U 中极大, 故 $\bar{U} = \bar{C}\bar{Y}$. 因此, $|\bar{C}:\bar{C} \cap \bar{Y}| = |\bar{U}:\bar{Y}|$ 是 p 的幂, 由 $\bar{C}$ 是 p' -群知这不可能. 由此可得, $\bar{U}$ 是 p -群. 这说明 $Y \triangleleft U$. 由 $Y/Y \cap G^\mathcal{F} \cong G/G^\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ 可以看出 $Y/Y \cap G^\mathcal{F}$ 有正规 p -补, 由 Schur-Zassenhaus 定理^[6] 知, Y 有 p -补 H . 显然, H 也是 G 的 p -补. 现在证明

$$C_{G^\mathcal{F}}(H) = N_G(H) \cap G^\mathcal{F} > 1.$$

事实上, 由 $G = YG^\mathcal{F} = UG^\mathcal{F}$ 及 $Y < U$, 有 $Y/Y \cap G^\mathcal{F} \cong U/U \cap G^\mathcal{F}$, 进而 $Y \cap G^\mathcal{F} < U \cap G^\mathcal{F}$. 记 $P = U \cap G^\mathcal{F}$, $V = [P]H$. 因为 $H \leq Y$, 所以 $Y \cap V = Y \cap U \cap G^\mathcal{F} \cdot H = Y \cap G^\mathcal{F} \cdot H < U \cap G^\mathcal{F} \cdot H = V$ 且 $Y \cap V \triangleleft V$, 这是因为 Y 正规于 U . 注意到 $Y \cap G^\mathcal{F}$ 正规于 $V = [P]H$, 知 p' -群 H 平凡作用于非平凡 p -群 $P/Y \cap G^\mathcal{F}$, 这说明 $C_{G^\mathcal{F}}(H) > 1$.

另一方面, 由假设, $G^\mathcal{F}$ 是 Abel 群, 因此 $G^\mathcal{F} = C_{G^\mathcal{F}}(H) \times [G^\mathcal{F}, H]$ ^[6]. 设 $W = [G^\mathcal{F}]H$, 可知 $W/G^\mathcal{F}$ 是 $G/G^\mathcal{F}$ 的正规 p -补且

$$W/[G^\mathcal{F}, H] \cong C_{G^\mathcal{F}}(H) \times H \in \mathcal{F}$$

故得 $W^\mathcal{F} \subseteq [G^\mathcal{F}, H]$. 此外, 容易看出 G/W 是 p -群, 而 $W/W^\mathcal{F}$ 是 p -幂零群, 所以 $G/W^\mathcal{F}$ 必为 p -幂零, 进而 $G^\mathcal{F} \leq W^\mathcal{F} \leq [G^\mathcal{F}, H] \leq G^\mathcal{F}$, 得出 $[G^\mathcal{F}, H] = G^\mathcal{F}$, 于是 $C_{G^\mathcal{F}}(H) = 1$, 矛盾. 由此得 X 在 G 中 $\mathcal{F}$ -次反正规.

对于情形 $G \geqslant XG^{\mathcal{F}}$, 因为 $\mathcal{F}$ 为子群闭, 由引理 1.2, X 在 G 中的 $\mathcal{F}$ -次正规闭包存在, 记为 S , 那么 $XS^{\mathcal{F}}$ 在 S 中进而在 G 中 $\mathcal{F}$ -次正规, 从而 $S = XS^{\mathcal{F}}$. 由于 $\mathcal{F}$ 子群闭, 有 $S^{\mathcal{F}} \leqslant G^{\mathcal{F}}$, 于是由 $G \in \mathcal{AP}$ 推出 $S \in \mathcal{AP}$. 现在, 对 $S = XS^{\mathcal{F}}$ 应用前段的结果可以看出, X 在 S 中 $\mathcal{F}$ -次反正规, 所以 (X, S) 是 G 的 $\mathcal{F}_c$ -链.

参 考 文 献

- 1 Förster P. Finite groups all of whose subgroups are $\mathcal{F}$ -subnormal or $\mathcal{F}$ -subabnormal. J Algebra 1986, 103; 285 ~ 293
- 2 Bauman S, Ebter G. A note on subnormal and abnormal chains. J Algebra, 1975, 36; 287 ~ 297
- 3 Semenchuk V N. The structure of finite groups with $\mathcal{F}$ -abnormal or $\mathcal{F}$ -subnormal subgroups. Problems in Algebra, Minsk Universitet-skoe 1986, 2; 50 ~ 55
- 4 Shemetkov L A. Formations of Finite Groups. Moscow: Nauka, 1978
- 5 郭文彬. 群类论. 北京: 科学出版社, 1997
- 6 Doerk K, Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1992