广义李雅普诺夫函数的作法

王　联

（中国科学院数学研究所）

摘　　要

本文就李雅普诺夫第二方法的几何意义，从拓扑学的观点作了进一步地阐述；并在广义渐近稳定的情况下，根据微分方程所定义的积分曲线的拓扑本质是正则曲线，应用文献［1］所引进的度量概念，提供了一个构造广义的李雅普诺夫函数的方法，从而进一步在理论上肯定了在广义渐近稳定情况下的李雅普诺夫函数的存在性.

一、问题的提出

李雅普诺夫在他的著名论文“运动稳定性的一般问题”中，为了解决未被扰动运动的稳定性问题，曾提出二种方法. 其中著名的是李雅普诺夫第二方法(或称直接法)，它已发展成为今天解决常微分方程稳定性理论的一种基本方法. 这种方法的优点在于它不需要寻求运动方程的特解或通解，而是寻求用以控制积分曲线动向的一类具有特殊性质的函数. 用几何的观点来看，就是归结于建立一族封闭的曲面(在平面上就归结于建立一族封闭的曲线)，它们包围坐标原点，并且有这样的性质：积分曲线只能由外向里地与每一个这样的曲面相交. 只要能用任何方法确立了这种曲面族的存在，就能确定未被扰动运动的稳定性，近几十年来，世界上不少的数学、力学及控制论等方面的工作者[2-6]，对李雅普诺夫函数的存在性从理论上进行了论证，以及针对一些具体的动力学系统作出所要求的李雅普诺夫函数，取得了一定的结果，但离完全解决问题还差得很远. 即使像常系数线性微分方程组这样一个系统的李雅普诺夫函数的存在性及其具体的作法，表面上看来似乎是解决了，但实际上还存在不少问题，尚待进一步努力.

二、预备知识

1. 正则曲线族

定义 1. 考虑两弧段 $\widehat{PQ}$, $\widehat{P'Q'}$. 令 f 是一个把弧 $\widehat{PQ} \to \widehat{P'Q'}$ 的拓扑满映射(图 1). 即

$$f(\widehat{PQ}) = \widehat{P'Q'},\ f(P) = P',\ f(Q) = Q'.$$

对此拓扑映射 f 而言，我们令

$$d(f) = \mathop{\mathrm{Ub}}_{\substack{P_i \in \widehat{PQ} \\ P'_i \in \widehat{P'Q'}}} \rho(P_i, P'_i),\ P'_i = f(P_i).$$

本文 1979 年 3 月 9 日收到.

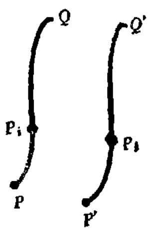

图 1

令

$$\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}) = \sigma(\widehat{P'Q'}, \widehat{PQ}) = \sigma(\widehat{QP},\ \widehat{Q'P'})$$

表示是数 $d(f)$ 的全体中的下界. 因为对此两段弧之间不同的拓扑映射，就会有不同的 $d(f)$. 这个数我们就称其为二弧段之间的“跨度”(span). 显见“跨度”有如下简单的性质:

性质 1. 如果 $\widehat{PQR}$ 和 $\widehat{P'Q'R'}$ 是两个弧段，且 $\sigma(\widehat{PQ}, \widehat{P'Q'}) < \varepsilon$, $\sigma(\widehat{QR}, \widehat{Q'R'}) < \varepsilon$, 则 $\sigma(\widehat{PQR}, \widehat{P'Q'R'}) < \varepsilon$.

性质 2. 如果 $\sigma(\widehat{Pr}, \widehat{P'r'}) < \varepsilon$, Q 位于弧段 $\widehat{Pr}$ 内,则有一点 Q' 位于弧段 $\widehat{P'r'}$ 内,使得

$$\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}) < \varepsilon,\ \sigma(\widehat{Qr},\ \widehat{Q'r'}) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

性质 3. 对任意三个弧段 $\widehat{PQ}$, $\widehat{P'Q'}$, $\widehat{P''Q''}$, 都有

$$\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P''Q''}) \leqq \sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}) + \sigma(\widehat{P'Q'},\ \widehat{P''Q''}). \tag{2.2}$$

因为“跨度”就是在拓扑映射下的欧氏距离，因此 (2.2) 式表示了三角形的不等式定理,即二边之和大于第三边;只有当 P, P', P'' 三点在拓扑映射下位于同一直线上时，(2.2) 式才能取等号.

定义 2. 曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 是正则的,如果它满足下列两个条件:

1) 族 $\{\mathscr{F}\}$ 中任两曲线都不会相交.

2) 任给 $\varepsilon > 0$ 和族 $\{\mathscr{F}\}$ 中的任一条曲线 C 的任一段弧 $\widehat{PQ}$, 就有一个 $\delta > 0$, 使当 $P' \in C'$(C' 是族 $\{\mathscr{F}\}$ 中的另一条曲线)及 $\rho(P, P') < \delta$, 则就存在曲线 C' 的一段弧 $\widehat{P'Q'}$, 使得 $\sigma(\widehat{PQ}, \widehat{P'Q'}) < \varepsilon$. 由此可立即看出,当我们考虑

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \cdots, x_n)\ \ (s = 1, 2, \cdots n), \tag{2.3}$$

假定 $X_s(0, \cdots, 0) = 0$ $(s = 1, \cdots, n)$, $X_s(x_1, \cdots, x_n)$ 在区域

$$|x_s| \leqslant h \quad (s = 1, \cdots, n)$$

上连续,且满足 Lipschitz 条件,那末由方程组 (2.3) 式所确定的积分曲线族 $\{\mathscr{F}\}$, 就是一正则曲线族.

因为由解的唯一性就保证了族 $\{\mathscr{F}\}$ 中任意两条曲线不会相交;由解对初值的连续依赖性就保证了正则曲线族定义 2 的条件2)得到满足.

李雅普诺夫定理. 如果对(2.3)式存在正定的函数 $v(x_1, \cdots, x_n)$, 它沿(2.3)式的轨线所作的全导数

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_s} X_s(x_1, \cdots, x_n)$$

是负定的,则(2.3)式的未被扰动运动 $O(0, \cdots 0)$ 是渐近稳定的. 换句话说,即由 (2.3) 式所确定的正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 的每条曲线当 $t \to \infty$ 时都趋于原点 O. 也就是说点 O 是族 $\{\mathscr{F}\}$ 的唯一的一个聚点.

我们现在考虑任一正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$.

定义 3. 如果正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 只有一个聚点 O，也即是族 $\{\mathscr{F}\}$ 中每一条曲线都趋于点 O，那我们就称此点 O 是广义的渐近稳定.

2. 度量空间

从点集拓扑学知度量空间就是在一点集 S 中引进距离函数 $\rho(P, Q)$ 后而形成的. 当然这里的距离函数 $\rho(P, Q)$ 必须要满足

1) 正值性: $\rho(x, y)=0$，当且仅当 $x=y$.

2) 对称性: $\rho(y, x)=\rho(x, y)$.

3) 三角形不等式: $\rho(x, z) \leqq \rho(x, y)+\rho(y, z)$.

定义 4. 包含一个可数稠密子集的度量空间，叫做可分的度量空间.

由于我们是以通常的欧氏空间进行讨论，在引进通常的二点之间的距离后，欧氏空间也是度量空间. 又因为在欧氏空间中以有理数为坐标的点，形成一个可数的无穷点集，而且此点集在欧氏空间中稠密，因此欧氏空间也就是一个可分的度量空间.

三、广义李雅普诺夫函数的作法

设 R 表示我们所论及的欧氏空间，又令 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 表示是一个在 R 中稠密的子集. 对应于子集的点 a_i，我们定义一个函数

$$f(a_i, P)=\frac{1}{1+\rho(a_i, P)}, \tag{3.1}$$

这里的 $\rho(a_i, P)$ 就表示 R 中二点 a_i，和 P 之间的欧氏距离. 显见如此定义的一个函数是一个连续函数. 它具有性质:

1) $0<f(a_i, P) \leqq 1$.

2) $|f(a_i, P)-f(a_j, P)| \leqq |\rho(a_i, P)-\rho(a_j, P)| \leqq \rho(a_i, a_j)$.

我们现在考虑一族正则曲线 $\{\mathscr{F}\}$. 假定这正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 在整个欧氏空间有定义. 为了便于把问题说清，亦像李雅普诺夫建立运动稳定性理论时，在局部小范围的初始扰动情况下考虑问题；然后再把他的定理推广到全空间. 这里分为两步：首先就局部空间来讨论问题，然后再全空间. 因此我们现在就 R 的有界域上来讨论所考虑的正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$. 令 C 是 $\{\mathscr{F}\}$ 的一条曲线（图 2），P 是曲线 C 上的一点，当 P 在曲线 C 上变动时，根据 $f(a_i, P)$ 的连续性，$f(a_i, P)$ 在这个有限域的一曲线 C 上，一定存在一个最小上界. 此时我们在曲线 C 上定义一个函数

$$\begin{aligned}\mu_i(C) &= \underset{P \in C}{\text{最小上界}}\ f(a_i, P)-\underset{P \in C}{\text{最大下界}}\ f(a_i, P) \\ &= \underset{P, Q \in C}{\text{上界}}\ |f(a_i, P)-f(a_i, Q)|.\end{aligned}$$

图 2

然后我们作函数

$$v(C)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mu_i(C).$$

根据我们的作法，在曲线 C 上定义的函数 $v(C)$ 有下列性质:

1) 当曲线 C 蜕化成一点 P 时，显见由于所有的

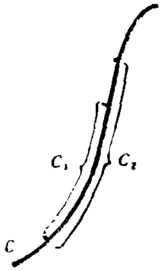

图 3

图 4

$$\mu_i(C)=0\ (i=1,2,\cdots),\ 故\ v(C)=0.$$

2) 当 $C_1\subset C_2$, C_1, C_2 是曲线 C 上的两个子弧段(见图 3), $C_1 \neq C_2$.

由于
$$\mu_i(C_1)\leqq \mu_i(C_2)\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\mu_i(C_1)<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\mu_i(C_2),$$
故
$$v(C_1)<v(C_2).$$

3) 当 $\bar{C}_1=$ 开弧段 C_1+ 两端点时,显见 $v(\bar{C}_1)=v(C_1)$.

4) 当 $C_1\subset v_\varepsilon(C_2)$, 这里 $v_\varepsilon(C_2)$ 表示弧段 C_2 的 ε 邻域, C_1, C_2 都是同一曲线 C 上的弧段(见图 4),则

$$v(C_1)<v(C_2)+2\varepsilon.$$

证. 考虑一固定的 i, 任取 C_1 的一点 P, 由于 C_1 在 C_2 的 ε 邻域内,因此在 C_2 定可取到一对应点 $P'\in C_2$, 使 $\rho(P,P')\leqq\varepsilon+\beta$, 其中 $\beta>0$ 是一个充分小的正数,使得对某个小的 $\alpha>0$, 有

$$|f(a_i,P)-f(a_i,P')|<\varepsilon-\alpha. \tag{3.2}$$

只要使所取的点 P 和 P' 之间的欧氏距离充分小(注意到 $f(a_i,P)$ 的连续性),就可保证上二不等式同时成立.

把不等式 (3.2) 改写成

$$-(\varepsilon-\alpha)<f(a_i,P)-f(a_i,P')<\varepsilon-\alpha. \tag{3.3}$$

当我们取此不等式的右半部时,即得

$$\begin{aligned}&f(a_i,P)<f(a_i,P')+\varepsilon-\alpha\\&\quad\Rightarrow \underset{P\in C_1}{\mathrm{Ub}}\,f(a_i,p)<\underset{P'\in C_2}{\mathrm{Ub}}\,f(a_i,P')+\varepsilon-\alpha.\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们再取不等式(3.3)的左半部时,即得

$$\begin{aligned}&f(a_i,P')-\varepsilon+\alpha<f(a_i,P)\\&\quad\Rightarrow \underset{P'\in C_2}{\mathrm{Lb}}\,f(a_i,P')-\varepsilon+\alpha<\underset{P\in C_1}{\mathrm{Lb}}\,f(a_i,P),\end{aligned} \tag{3.5}$$

由 (3.4) 与 (3.5) 式得

$$\begin{aligned}\underset{P\in C_1}{\mathrm{Ub}}\,f(a_i,P)-\underset{P\in C_1}{\mathrm{Lb}}\,f(a_i,P)&<\underset{P'\in C_2}{\mathrm{Ub}}\,f(a_i,P')\\&\quad-\underset{P'\in C_2}{\mathrm{Lb}}\,f(a_i,P')+2\varepsilon-2\alpha\\&<\underset{P'\in C_2}{\mathrm{Ub}}\,f(a_i,P')-\underset{P'\in C_2}{\mathrm{Lb}}\,f(a_i,P')+2\varepsilon\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_i(C_1) < \mu_i(C_2) + 2\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mu_i(C_1) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mu_i(C_2) + 2\varepsilon,$$

故

$$v(C_1) < v(C_2) + 2\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，这个性质说明了函数 $v(C)$ 是 C 的连续函数.

5) 如果 $C_1 \subset C_2$，且 C_2 上有一点至 C_1 的距离为 d，则 $v(C_1) < v(C_2)$.

证. 这里 C_1, C_2 是曲线 C 上的子弧段见图 5. 注意一个点到一段曲线的距离就是此点至这段曲线上的所有点的欧氏距离中的最小者，$P \notin C_1$, $d > 0$. 因为 $C_1 \subset C_2$，对每个 i 自然就有 $\mu_i(C_1) \leqq \mu_i(C_2)$. 根据我们的假定知，点列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 在 R 中稠密，因此存在一点 a_i，使 $\rho(a_i, P) < \frac{d}{3}$，因此

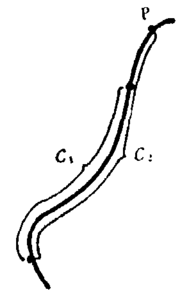

图 5

$$\underset{P \in C_2}{f(a_i, P)} = \frac{1}{1 + \rho(a_i, P)} > \frac{1}{1 + \frac{1}{3} d};$$

而另一方面 $\rho(a_i, C_1) > \frac{2}{3} d$，

故

$$\underset{q \in C_1}{f(a_i, q)} = \frac{1}{1 + \rho(a_i, q)} < \frac{1}{1 + \frac{2}{3} d},$$

$$\underset{q \in C_1}{f(a_i, q)} < \frac{1}{1 + \frac{2}{3} d} < \frac{1}{1 + \frac{1}{3} d} < \underset{P \in C_2}{f(a_i, P)},$$

因此

$$\underset{q \in C_1}{\mathrm{Ub}} f(a_i, q) < \underset{P \in C_2}{\mathrm{Ub}} f(a_i, P).$$

对此 i 而言，我们有 $\mu_i(C_1) < \mu_i(C_2)$，故

$$v(C_1) < v(C_2).$$

这个性质说明函数 $v(C)$ 是曲线 C 的单增函数. 综合上述的讨论，在正则曲线 C 上我们所作得的函数 $v(C)$ 是一个连续单增的正函数. 当曲线 C 蜕化成一点时，函数 v 才取零值.

下面我们就利用这个函数来作我们所要求的广义的李雅普诺夫函数.

我们考虑一正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$.

定理 1. 假设空间 R 的一点 O 是此正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 的唯一的聚点，则就平面而言，必存在包围点 O 的闭曲线族，且此闭曲线中任意两条都不会相交，并且每一条闭曲线与正则曲线族中每一条曲线只相交一次. 就空间而言，亦有类似的结论：即必定存在包围点 O 的闭曲面族，且此闭曲面族中任意两个曲面都不会相交，并且每一个闭曲面与正则曲线族中每一条曲线只相交一次.

证. 1) 由假定点 O 是正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 的唯一聚点，我们利用前面对函数 $v(C)$ 的作法，从点 O 开始沿着每一条正则曲线 C 来作函数 $v(C)$. 根据上面的作法知函数 v 是 C 的连续单增函数，且当 C 蜕化到仅有一点 O 时，函数 v 才取零值. 由于这种作法对正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 中

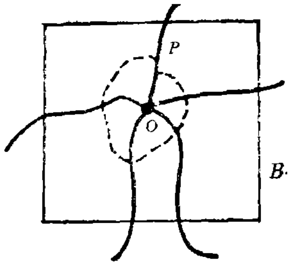

图 6

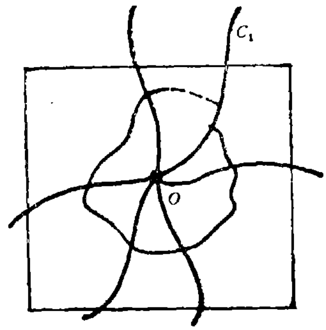

图 7

任一条都行得通．也就是说，由聚点O开始，在正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$上，我们作出了一个连续单增的正函数$v(C)$．由于我们现在都是从O点开始，沿着每一条正则曲线C作出函数，因此可把函数记为$v(P)$，其中P为C上任一点．下面分两种情形来证明：

$$v(P)=K>0\ (\text{常量}).$$

就平面而言，它表示一条围绕原点O的闭曲线；就空间而言，它表示一个围绕点O的闭曲面．

2）首先就平面的情形来证明．这里我们分两步来进行．

i）假定我们所考虑的广义渐近稳定域如图6所示．由函数$v(P)$的连续性知，在此域的边界B（边界B是一个闭集）上必能取到下确界$l>0$，因此就取常量K满足$0<K<l$．我们要证明的曲线$v(P)=K$是一条围绕O点的闭曲线，其中K就是指$0<K<l$中的值．

由于函数v在聚点O取零值，在边界上取的函数值满足不等式

$$v(P)|_{P\in B}\geqslant l>0.$$

在每一条正则曲线上必存在一点P，使得函数v在弧段$\overset{\frown}{OP}$上取值为K（见图6），即$v(P)=K$，这一点根据v的连续性，一定能办到．故曲线$v(P)=K$交正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$于"等距"．亦即是说曲线$v(P)=K$与每一条正则曲线都相交一次．

ii）现证明此曲线一定是围绕O点的闭曲线．由于曲线$v(P)=K$与每一条正则曲线都相交．因此不妨就假定$v(P)=K$与正则曲线C_1相交于P_1点，那末由P_1点出发，曲线$v(P)=K$与正则曲线族中每一条都相交．如果此曲线$v(P)=K$往下再与C_1相交一次，而且交点与P_1点重合，那末我们就证明了$v(P)=K$是一条绕O点的闭曲线了（见图7）．

要证明这一点，首先要证明曲线$v(P)=K$必定要与正则曲线C_1相交第二次．用反证法：假设$v(P)=K$除了在P_1点与C_1相交一次外，再不与C_1相交了．由于C_1上的点都是常点，在正则曲线C_1的任何小的邻域内，都有曲线$v(P)=K$与正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$相交的点存在，因此在曲线C_1上必有一点P_0作为曲线$v(P)=K$的极限点．即$\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=P_0$，见图8．不妨假定点$P_0$位于弧$\overset{\frown}{OP_1}$的外侧，那末根据$v$的作法知，

$$v(\overset{\frown}{OP_1})<v(\overset{\frown}{OP_0})=K_0,$$

可是$v(\overset{\frown}{OP_1})=v(P_1)=v(P)=K$，故$K<K_0$．但根据$v(P)$的连续性知，

$$K=v(P_1)=\lim_{t\to\infty}v(P(t))=v(\lim_{t\to\infty}P(t))=v(P_0)=K_0,\ \text{即}\ K=K_0.$$

因此导出矛盾，这就说明曲线 $v(P)=K$ 必定要与 C_1 相交第二次．不妨假定 $v(P)=K$ 除了与正则曲线 C_1 相交点 P_1 外，再相交于 P_2 点．见图 9.

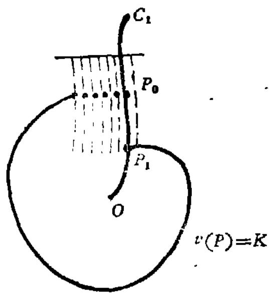

图 8

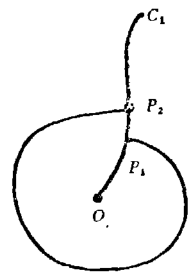

图 9

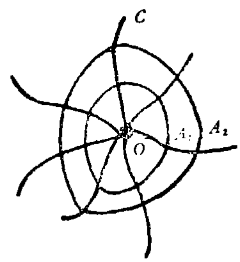

图 10

我们现在就来证明 P_2 点与 P_1 点重合．

假设 P_2 点与 P_1 点不重合，不妨假定 $\widehat{OP_1}\subset\widehat{OP_2}$（反过来亦可），则根据函数 $v(C)$ 的单增性，我们有

$$v(\widehat{OP_1})=v(P_1)<v(\widehat{OP_2})=v(P_2),$$

可是 P_1 与 P_2 二点都位于曲线 $v(P)=K$ 上，因此就有 $v(P_1)=v(P_2)=K$，从而导出矛盾．点 P_1 与点 P_2 必定重合．这也就是说 $v(P)=K$ 是围绕点 O 的一条闭曲线．再由 v 的单增性知，闭曲线 $v(P)=K>0$ 与每一条正则曲线 C 只交一次．我们把此闭曲线 $v(P)=K$ 记为 A．也就是说在此闭曲线 A 上，我们定义了一个函数 v，它的函数值就是常数 K，即 $v(A)=K$．此函数有下列性质：

1° 从点 O 开始，沿着正则曲线 C 向外扩张时(即把从点 O 出发的任一条正则曲线当作一个集合，从点 O 开始沿着任一条正则曲线，此集合由小变大)，函数 $v(A)$ 是连续单增，亦即是说：如果 $A_1\subset A_2$，A_1，A_2 是两条绕原点 O 的闭曲线，那末就有 $v(A_1)<v(A_2)$.

2° 特别当正则曲线 C 蜕化到仅有点 O 时，此时闭曲线 A 也就收缩到点 O，那末 $v(0)=0$.

由函数 $v(A)=K$ 所确定的曲线是一族围绕聚点 O 的闭曲线，此族闭曲线即具有定理所要求的性质．

3) 至于空间情形，我们只要证明 $v(P)=K$ 表示一张围绕原点 O 的闭曲面就可以了，其它的论证与平面情形相同就不再重复．

注意此时 K 取 $0<K<l$ 中的值，而 l 是函数 $v(P)$ 在一个有界方体的边界上所取的下确界．

针对给定的 K 值，我们总可取 $K_1>0$, $K_2>0$，使 $0<K_1<K<K_2<l$．根据 $v(0)=0$，及 $v(P)$ 是连续单增的函数，故 $v(P)<K_1$ 确定了一个以点 O 为中心的单连通开球域 G_1，同理 $v(P)<K_2$ 亦是一个以点 O 为中心的单连通开球域 G_2，且 $G_1\subset G_2$；因此由函数 v 的连续单增性知，从域 G_1 过渡到域 G_2，必定存在单连通的闭集 A（它作为闭球域 $v(P)\leqslant K$ 的边界)，使得函数 v 在此集合上取值 K，也就是说 $v(P)|_{P\in A}=K$．因此 $v(P)=K$ 表示了一张围绕原点 O 的闭曲面．定理证毕．

从作函数 $v(C)$ 的过程中看出，当我们把 $v(C)$ 单位化后，可进一步的扩大稳定性区域到最大限度，这样作法，并不会改变 $v(C)$ 的所有性质.

如果我们把上述闭曲线 A（或闭曲面）与曲线 C 相交的一点函数值 $v(A)$ 就定义为曲线 C 由此点到聚点 O 的距离，那末闭曲线 $v(A)=K$ 与正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 的每一条成"等距"相交. 因此函数 $v(A)$ 就具有李雅普诺夫渐近稳定性定理中所要求的定号函数的性质，虽然我们这里并未证明函数 v 具有可微的性质. 也可能函数 v 除了我们已证的连续单增性外，就是没有别的性质. 因此我们就把这样的函数 $v(A)$ 称为广义的李雅普诺夫函数.

上面仅就李雅普诺夫意义下的渐近稳定性、也就是在局部小范围的渐近稳定情况下，针对具有唯一的一个聚点 O 的正则曲线族，将我们所要求的广义李雅普诺夫函数作出.

如果我们考虑未被扰动运动是全局稳定，也就是对任意大的初始扰动，结果相空间的积分线当 $t\to\infty$ 时仍趋于原点. 也就是说此时我们考虑的正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 在全空间只有一个聚点 O，那末我们是否能作出上述同样性质的广义李雅普诺夫函数呢？回答是肯定的.

虽然正则曲线 C 在全空间都有定义，但我们前面引进的函数

$$f(a_i,P)=\frac{1}{1+\rho(a_i,P)},$$

在曲线 C 上仍是有界连续，这里 P 是正则曲线 C 上一点，C，$\{\mathscr{F}\}$，O，a_i，…等记号的意义仍同上，因此只要在 C 的任意一段闭弧上（从聚点 O 开始），函数 $f(a_i,P)$ 仍存在最大值和最小值，所以我们仍旧照样的定义函数

$$\begin{aligned}\mu_i(C)&=\underset{P\in C}{\text{最小上界}}\ f(a_i,P)-\underset{P\in C}{\text{最大下界}}\ f(a_i,P)\\&=\underset{P,Q\in C}{\text{上界}}\ |f(a_i,P)-f(a_i,Q)|.\end{aligned}$$

同样我们作

$$v(C)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\mu_i(C).$$

因 $f(a_i,Q)$ 满足不等式:

$$0<f(a_i,Q)\leqq 1,$$

故

$$\mu_i(C)\leq\underset{P\in C}{\text{上界}}\ f(a_i,P)\leq 1,$$

$$v(C)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\mu_i(C)\leqq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1.$$

因此我们仍可像前面一样的证明 $v(C)$ 是确定在 C 上的一个连续单增函数. 当曲线 C 蜕化到只有一聚点 O 时，$v(C)|_{C=0}=0$. 且 $v(C)=K>0$（常数）时，仍表示一条围绕聚点 O 的闭曲线（空间情形就表示一张围绕原点 O 的闭曲面）. 最终仍旧得到上述定理的结论.

当我们看到微分方程所定义的积分曲线的拓扑本质是正则曲线时，如果未被扰动运动是广义的渐近稳定，也就是正则曲线族存在唯一的聚点 O 时，那末从拓扑的观点来看，李雅普诺夫渐近稳定性定理中所要求的李雅普诺夫函数的存在性问题，也就是闭曲面族（平面上的闭曲线族）的存在性问题，从理论上就完全予以解决.

最后要说的是李雅普诺夫渐近稳定性定理的逆转问题，曾引起世界上不少常微分方程工作者的重视. 在这方面首先作出贡献的是 J. L. Massera，他在 1948 年证明了一个引理[2]，建

立了李雅普诺夫函数的存在性定理；在 1955 年又证明了一个引理[3]，获得了更好的结果．此外文献 [4—6] 就李雅普诺夫函数的存在性问题，作了不少的工作．所有这些工作的实质是针对不同的动力系统去确立一族控制积分曲线动向的，围绕原点的封闭曲面族（对平面而言就是封闭曲线族）的存在性．因此从这个意义上来看，他们的结果应统一在本文所得定理的结论下．也就是说，从微分方程所定义的积分曲线是正则曲线这一拓扑观点来看，我们的定理概括了他们的结果．

参　考　文　献

[1] Whitney, H., *Ann. of Math.*, **34**(1933), 240—277.
[2] Massera, J. L., *ibid.*, **50**(1949), 705—721.
[3] ——————, *ibid.*, **64**(1956), 182—206.
[4] Malkin, I. G., *Akad. Nauk SSSR Prikl. Mat. Meh.*, **18**(1954), 129—138.
[5] ——————, *ibid.*, **16**(1952), 239—242.
[6] Barbasin, E. A. & Krasovsky, N. N., *Prikl. Mat. Meh.*, **18**(1954), 345—350.