中国科学: 数学 2013 年 第 43 卷 第 6 期: 529～540
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

优秀博士学位论文专栏

不确定环境下多自主体系统的分布式估计与控制

张强

工业和信息化部国际经济技术合作中心, 北京 100846
E-mail: qzhang@amss.ac.cn

指导教师: 张纪峰 中国科学院数学与系统科学研究院
收稿日期: 2013-05-02; 接受日期: 2013-05-28
国家自然科学基金 (批准号: 61120106011 和 60934006) 资助项目, 本文作者荣获 2012 年中国科学院院长优秀奖

摘要 多自主体系统是当前系统控制界研究的热点问题. 在实际中, 自主体系统通常并不是在理想的环境下执行任务, 而是面临多源头、多层次和多变化的各类不确定性因素的影响. 它们通过在微观层面上影响各自主体决策的正确性, 从而在宏观上对自主体系统的整体行为产生显著影响. 不确定性因素和多自主体系统分布式信息架构交互耦合, 给系统的设计与分析带来本质性困难. 本文围绕分布式估计与分布式控制问题, 研究在随机通信噪声、数据丢失、量化和系统未知结构参数等不确定因素影响下, 如何为各自主体设计更加鲁棒、更加有效的分布式估计算法及分布式控制律, 以实现全局估计与控制目标, 并对闭环系统性能进行系统分析.

关键词 多自主体系统 随机系统 分布式估计 分布式控制 自适应控制 趋同 随机动态博弈
MSC (2010) 主题分类 37H10, 37N35, 60J10

1 引言

本文是作者博士学位论文[1] 的一个简要介绍, 定理的详细证明请参见原论文[2–5]. 多自主体系统研究的驱动力一方面来自生物学、社会经济学和系统控制等实际应用需求, 目的是阐述如何从微观、局部的行为实现宏观、整体的行为; 另一方面来自控制理论自身内部发展的推动, 控制理论已从以往单纯研究具有时间域上非线性、不确定性和混杂性等复杂度的单自主体系统, 延伸到研究同时包含时间域上的复杂度以及空间域上系统交互耦合等复杂度的多自主体系统. 对不确定环境下的单自主体系统的研究, 控制理论界主要围绕估计和控制两条主线: 外部干扰下的估计演化为随机系统辨识分支; 外部干扰下的控制演化为随机系统控制分支. 存在未知系统结构的控制则结合估计和控制方法, 最终演化为自适应控制和鲁棒自适应控制两个分支. 不确定环境下多自主体系统的理论研究框架也应包含估计和控制两条主线, 但与单自主体系统研究的不同之处在于: 一方面不确定性更加多样, 不仅包含传统的外扰和未知系统结构等不确定性, 而且还包含通信噪声和丢包等不确定因素; 另一方面估计算法与控制律必须满足分布式的结构约束, 即每个自主体仅能利用自身及邻居自主体的局部通信信息来调整自己的行为. 本文系统研究了存在外部干扰和 Markov 通信信道下的分布式估计、有限通信数据率和通信拓扑时变下的量化趋同控制, 以及存在外扰和未知系统结构的随机系统分布式适应控制三类问题.

英文引用格式: Zhang Q. Distributed estimation and control of multi-agent systems in uncertain environment (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 529–540, doi: 10.1360/012013-119

2 分布式参数估计

分布式估计算法的设计与分析是传感器网络实际应用的需要, 旨在研究基于各传感器的局部观测信息以及传感器间的局部信息交换, 如何设计可扩展性强的分布式估计算法, 通过传感器间的协作提高整体的可观测能力. 与传统的基于信息融合中心的集中式参数估计算法相比, 分布式估计算法对单个传感器的失效更具鲁棒性, 并且极大降低了传感器的通信和计算成本, 提高了传感器网络的整体存活时间.

由于外界环境存在各种不确定性, 设计鲁棒性好和精度高的分布式参数估计算法是传感器网络应用的迫切需要. 本文结合预测和滤波的思想, 提出了一类重要的随机逼近 - 趋同型分布式估计算法, 并证明算法对随机传感通信噪声、随机信道增益和 Markov 信号丢失等多种不确定性因素具有鲁棒性.

2.1 传感和通信模型

2.1.1 传感模型

考虑由 N 个传感器构成的传感器网络分布式协同估计某 n 维未知参数向量 θ^* 的问题. 由于传感器感知能力有限, 传感器 i $(i=1,\ldots,N)$ 独立观测得到的局部带噪声观测量往往仅是 θ^* 的部分元素, 即 $n_i \ll n$. 因此需要传感器间的协作通信及自身动态迭代, 才能获知未知参数所有信息的准确估计.

假设传感器 i 对参数向量 θ^* 的观测值为该参数向量的随机线性函数, 并被随机噪声污染, 即传感器 i 在 t 时刻的观测值可表示为如下形式:

$$z_i(t) = C_i(t)\theta^* + v_i(t), \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

其中 $z_i(t)$, $v_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 分别为传感器 i 在 t 时刻的观测向量和随机观测噪声, $C_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$ 为时变随机观测矩阵.

2.1.2 通信模型

各传感器间的通信关系用加权有向图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}}\}$ 来建模. 传感器网络中各邻居传感器按如下方式进行信息交换. 在通信信道 $(j,i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ 的发送端, 传感器 j 将其对未知参数向量在 t 时刻的估计状态 $x_j(t)$ 向传感器 i 发送. 在实际应用中, 由于通信信道的丢失和重建以及随机噪声和随机信道增益等不确定因素的影响, 一部分通信信道会以一定的正概率发生信号丢失. 我们用状态空间为 $\{0,1\}$ 的 Markov 链 m_t^{ji} 描述信道 (j,i) 的丢失和重建随时间的演化, 并按一定的次序将描述每条通信信道状态的 Markov 链列为向量 m_t.

在通信信道 (j,i) 的接收端, 传感器 i 接收到对 $x_j(t)$ 的估计信号描述为

$$y_{ji}(t) = \begin{cases} L_{ji}(t)x_j(t) + w_{ji}(t), & \text{如果 } (j,i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}_t}, \\ 0, & \text{如果 } (j,i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \backslash \mathcal{E}_{\mathcal{G}_t}, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $L_{ji}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 (j,i) 的随机信道增益, 经常产生于模拟通信信道的传输[6]; $w_{ji}(t)$ 为随机可加通信噪声, 它是对通信热噪声、信道衰落等现象的良好建模[7].

2.2 算法设计

基于以上的传感和通信模型, 我们对传感器 i 设计了如下分布式参数估计算法:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + b_i(t)\bigg\{\sum_{j\in\mathcal{N}_{it}} a_{ij}(t)(\bar{L}_{ji}^{-1}y_{ji}(t) - x_i(t)) + \bar{C}_i^{\mathrm{T}}(z_i(t) - \bar{C}_i x_i(t))\bigg\}, \quad i = 1,\dots,N, \tag{2.3}$$

其中 $x_i(t)\in\mathbb{R}^n$ 表示传感器 i 在 t 时刻对参数 θ^* 的估计状态; $\mathcal{N}_{it}$ 表示传感器 i 在 t 时刻的邻居传感器集合. $y_{ji}(t)$ 由 (2.2) 定义, 为传感器 i 接收到的传感器 j 状态的估计; $b_i(t)$ 为增益函数; $\bar{C}_i = EC_i(t)$ 与 t 无关; $a_{ij}(t)$ 由 t 时刻通信拓扑图 $\mathcal{G}_t$ 的加权邻接矩阵 $\mathcal{A}_{\mathcal{G}_t}$ 决定, 即 $a_{ij}(t) = a_{ij}^{(m_t)}$.

为进行收敛性分析, 我们将分布式估计算法 (2.3) 写为如下联立方程:

$$\begin{aligned} X(t+1) &= X(t) - (B(t)\otimes I_n)(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)}\otimes I_n)X(t) + (B(t)\otimes I_n)[\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C}(1_N\otimes\theta^* - X(t)) \\ &\quad + \Delta L_{\mathcal{G}}^{(m_t)}X(t) + w_t^{(m_t)} + \bar{C}^{\mathrm{T}}\tilde{C}(t)(1_N\otimes\theta^*) + \bar{C}^{\mathrm{T}}v(t)], \quad t\geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $X(t) = [x_1^{\mathrm{T}}(t),\dots,x_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, $B(t) = \mathrm{diag}\{b_1(t),\dots,b_N(t)\}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)}$ 是 $\mathcal{G}_t$ 对应的 Laplace 矩阵, $\bar{C} = \mathrm{diag}\{\bar{C}_1,\dots,\bar{C}_N\}$, $\tilde{C}(t) = \mathrm{diag}\{C_1(t)-\bar{C}_1,\dots,C_N(t)-\bar{C}_N\}$, $v(t) = [v_1^{\mathrm{T}}(t),\dots,v_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, $\Delta L_{\mathcal{G}}^{(m_t)} = [\delta l_{ij}(t)]_{1\leqslant i,j\leqslant N}$, $w_t^{(m_t)} = [w_1^{\mathrm{T}}(t),\dots,w_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$,

$$\begin{cases} \delta l_{ij}(t) = a_{ij}(t)(\bar{L}_{ji}^{-1}L_{ji}(t) - I) = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} 1_{[m_t=k]}a_{ij}^{(k)}(\bar{L}_{ji}^{-1}L_{ji}(t) - I), \\ w_i(t) = \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{N}_{it}} a_{ij}(t)\bar{L}_{ji}^{-1}w_{ji}(t) = \sum_{k=1}^{s} 1_{[m_t=k]}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}^{(k)}\bar{L}_{ji}^{-1}w_{ji}(t). \end{cases}$$

算法 (2.3) 的设计思路是传感器 i 首先采用自身获取的局部传感信息进行 "滤波", 利用随机逼近算法[8] 对未知参数进行预估计; 然后采用随机逼近型趋同机制[6,7] 对局部预估计状态进行 "凸平均化". 随机逼近型趋同机制是为了在带噪声的通信网络中, 使各传感器的估计状态趋于一致而引入的. 当传感器的局部估计不更新时, 传感器网络可通过趋同机制进行协作估计, 从而有望改善算法收敛速度, 提高参数估计的精度.

2.3 收敛性分析

本节我们拟在较弱的随机噪声、算法增益函数和 Markov 随机通信拓扑条件下, 证明分布式估计算法 (2.4) 的均方收敛性和几乎处处收敛性. 定义 σ- 代数 $\mathscr{F}_t = \sigma\{X(0), w_k, L_k, v(k), C(k), m_l, 0\leqslant k\leqslant t, 0\leqslant l\leqslant t+1\}$, 并作如下假设:

(A1) 有向图 $\mathcal{G}^{(i)}, 1\leqslant i\leqslant s$ 为平衡图, 并且有向通信拓扑图集 $\mathscr{C} = \{\mathcal{G}^{(i)}, 1\leqslant i\leqslant s\}$ 的并图 $\mathcal{G}_{\mathscr{C}}$ 含有一棵生成树.

(A2) 噪声序列 $\{w_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ 和 $\{v(t), \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ 是鞅差序列, 并且具有有限二阶矩

$$\sigma_w^2 \triangleq \sup_{t\geqslant 0} E[\|w_t\|^2] < \infty, \quad \sigma_v^2 \triangleq \sup_{t\geqslant 0} E[\|v(t)\|^2] < \infty.$$

(A3) 随机观测矩阵 $C(t)$ 与 $\mathscr{F}_{t-1}$ 独立, 具有均值 $E[C_i(t)] = \bar{C}_i$ (与 t 无关), 以及有限二阶矩 $\sigma_C^2 \triangleq \sup_{t\geqslant 0} E[\|C(t)\|^2] < \infty$. 矩阵 $Q_o = \sum_{i=1}^N \bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i$ 满秩.

(A4) 随机增益矩阵 L_t 与 $\mathscr{F}_{t-1}$ 独立, 并且 $L_{ji}(k)$ 关于 i, j, k 两两独立, 具有满秩均值 $E[L_{ji}(t)] = \bar{L}_{ji}$, 以及有限二阶矩 $\sup_{j,i,t} E[\|L_{ji}(t)\|^2] < \infty$.

(A5) $\{m_t, t \geqslant 0\}$ 是时齐遍历 Markov 链, 具有转移概率矩阵 $[p_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant s}$,

$$P\{m_{t+1}=j \mid m_t=i, m_0,\ldots,m_{t-1}, w_k, v(k), L_k, \tilde{C}(k), 0\leqslant k\leqslant t\}=p_{ij}.$$

(A6) 增益函数 $b_i(t)$ 满足: $b_i(t)>0$, $\sum_{t=0}^{\infty} b_i(t)=\infty$, $\sum_{t=0}^{\infty} b_i^2(t)<\infty$. 存在常数 α_1, $\alpha_2>0$, 使得

$$\alpha_1 b_i(t)\leqslant b_i(t+1)\leqslant \alpha_2 b_i(t),\quad \forall\, t>0.$$

定理 1 在假设 (A1)–(A6) 下, 并且 $b_i(t)$ $(i=1,\ldots,N)$ 满足

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant N}|b_i(t)-b_j(t)|=o\bigg(\sum_{i=1}^{N} b_i(t)\bigg),\quad \text{当 } t\to\infty, \tag{2.5}$$

则分布式估计算法 (2.4) 均方收敛, 即 $\lim_{t\to\infty} E[\|x_i(t)-\theta^*\|^2]=0$. 进一步, 若 (2.5) 由下式替代,

$$\sum_{t=0}^{\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant N}|b_i(t)-b_j(t)|<\infty, \tag{2.6}$$

则分布式估计算法 (2.4) 几乎处处收敛, 即 $\lim_{t\to\infty} x_i(t)=\theta^*$ 几乎处处成立. 此时, 若 $b_i(t)\downarrow 0$, $t\to\infty$, 则对参数估计的收敛速度有如下估计:

$$\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t}\|\delta(k)\|=o\bigg(\frac{1}{\sqrt{\bar{b}(t)t}}\bigg),\quad \text{当 } t\to\infty \text{ 几乎处处成立},$$

其中 $\bar{b}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} b_i(t)$.

3 分布式控制

趋同问题是分布式控制领域的一个基本问题, 在分布式参数估计, 以及聚集[9] 和队形控制[10] 等领域得到广泛应用. 主要是研究如何为各自主体设计基于局部信息的分布式网络协议, 使得自主体的状态趋于某个共同值.

目前关于多自主体系统分布式趋同控制的文献大都假设通信信道是理想的, 即相邻自主体间可以无误差地交换信息. 然而实际中很难避免通信信道约束, 有时只能传输整值信号, 而不能传输任意的实值信号, 需要先对其进行量化处理, 而能量和带宽约束通常又会导致量化通信信道的容量是有限的. 此外, 由于外部环境干扰、自主体感知能力或通信半径有限, 多自主体系统的网络拓扑经常是时变的. 因此, 量化通信信道约束下, 研究设计适于有向时变通信拓扑的分布式量化平均趋同协议, 并探究趋同性与通信数据率之间的关系具有重要意义.

3.1 量化通信模型

自主体 i $(i=1,\ldots,N)$ 的系统动态模型由一阶离散方程描述:

$$x_i(t+1)=x_i(t)+hu_i(t),\quad t=0,1,\ldots, \tag{3.1}$$

其中 $x_i(t)\in\mathbb{R}$, $u_i(t)\in\mathbb{R}$ 分别表示自主体 i 的状态和控制, h 为控制增益.

相邻自主体间采用数字通信信道交换符号信息, 因此, 每个自主体的实值状态需经过量化后才能被传送. 自主体间的通信机制包括动态编码器、不可靠数字通信信道和动态解码器. 自主体 i 利用编码器对其实值状态编码, 将编码器的内部状态通过通信信道发送至邻居自主体 $\mathcal{N}_i^-$. 由于通信信道受不可靠因素影响, i 的邻居自主体集是时变的, 即 $\mathcal{N}_i^-(t)\subseteq\mathcal{N}_i^-$, 从而导致自主体系统具有时变通信拓扑 $\mathcal{G}(t)=\{\mathcal{V},\mathcal{E}_{\mathcal{G}(t)},\mathcal{A}_{\mathcal{G}(t)}\}$. 与文献 [11] 中无向固定通信拓扑下的通信机制相比, 时变通信拓扑会带来如下问题: 当自主体 j 将其 t 时刻的状态 $x_j(t)$ 编码后向其理想邻居节点 $i\in\mathcal{N}_j^-$ 传送时, 由于通信信道的不确定性, 可能致使传输失败, 进而致使自主体 i 的解码器不对自主体 j 的状态估计进行更新, 使得解码器输出与自主体 j 编码器的内部状态不一致.

为解决此问题, 我们将重新设计通信协议, 修正误差补偿型趋同算法, 给出适于时变通信拓扑的分布式趋同协议. 编/解码器设计的关键是在时变通信拓扑的前提下, 发送端和接收端自主体亦能构建对发送端自主体状态一致的估计, 从而可以利用误差补偿方法[11] 设计分布式趋同协议.

在通信信道 $(j,i)\in\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ 的发送端, 自主体 j $(j=1,\dots,N)$ 采用编码器 Φ_{ji} 对其状态进行编码, 并将编码器的输出向其理想出邻居节点 $i\in\mathcal{N}_j^-$ 发送, $\Phi_{ji}\in\Phi_j\triangleq\{\Phi_{ji},i\in\mathcal{N}_j^-\}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&\xi_{ji}(0)=0,\\
&\Delta_{ji}(t)=q(g^{-1}(t-1)(x_j(t)-\xi_{ji}(t-1))),\\
&\xi_{ji}(t)=\begin{cases}g(t-1)\Delta_{ji}(t)+\xi_{ji}(t-1), & \text{如果}\,i\,\text{在}\,t\,\text{时刻从}\,j\,\text{接收到}\,\Delta_{ji}(t),\\ \xi_{ji}(t-1), & \text{否则},\quad t=1,2,\dots,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

其中 $\xi_{ji}(t)$ 是 Φ_{ji} 的内部状态; $\Delta_{ji}(t)$ 是 Φ_{ji} 的输出, 将被发送给邻居节点 i; $g(t)>0$ 是尺度变换函数; $q(\cdot)$ 是具有 $2K+1$ 个量化层的均匀量化器, 即 $q(\cdot):\mathbb{R}\to\Lambda=\{0,\pm i,i=1,\dots,K\}$:

$$
q(y)=\begin{cases}0, & -\dfrac{1}{2}\leqslant y<\dfrac{1}{2},\\ i, & \dfrac{2i-1}{2}\leqslant y<\dfrac{2i+1}{2},\quad i=1,\dots,K-1,\\ K, & y\geqslant\dfrac{2K-1}{2},\\ -q(-y), & y\leqslant-\dfrac{1}{2}.\end{cases}
\tag{3.3}
$$

在通信信道 $(j,i)\in\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ 的接收端, 自主体 $i\in\mathcal{N}_j^-$ 根据接收到或未接收到自主体 j 编码器输出 $\Delta_{ji}(t)$, 来判断是否更新解码器 Ψ_{ij} 的输出, 从而得到自主体 j 的状态估计. $\Psi_{ij}\in\Psi_i\triangleq\{\Psi_{ij},j\in\mathcal{N}_i^+\}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}_{ji}(0)=0,\\
&\hat{x}_{ji}(t)=\begin{cases}g(t-1)\Delta_{ji}(t)+\hat{x}_{ji}(t-1), & \text{如果}\,i\,\text{在}\,t\,\text{时刻从}\,j\,\text{接收到}\,\Delta_{ji}(t),\\ \hat{x}_{ji}(t-1), & \text{否则},\quad t=1,2,\dots,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

其中 $\hat{x}_{ji}(t)$ 解码器 Ψ_{ij} 在 t 时刻的输出. 从 (3.2) 和 (3.4) 看出, $\xi_{ji}(t)$ 和 $\hat{x}_{ji}(t)$ 具有相同的迭代式及初始值, 故我们在发送端和接收端构造了对发送端自主体状态相同的估计.

基于以上的通信机制及动态系统 (3.1), 对每个自主体 i $(i\in\mathcal{V})$, 我们拟利用局部量化通信信息 $\mathcal{U}_l(t)=\{x_i(s),x_j(s),r_i(s),r_j(s),j\in\mathcal{N}_i^+(s),s\leqslant t\}$, 设计分布式控制协议 $u_i(t)$, 使对任意的初始状态 $x_1(0),\dots,x_N(0)$ 各自主体的状态渐近收敛到 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i(0)$.

3.2 分布式量化趋同控制

基于以上的通信协议, 我们设计如下的误差补偿型分布式趋同控制:

$$u_i(t)=\sum_{j\in\mathcal{N}_i^+(t)}a_{ij}(t)\hat{x}_{ji}(t)-\sum_{j\in\mathcal{N}_i^-(t)}a_{ji}(t)\xi_{ij}(t),\quad i=1,2,\dots,N. \tag{3.5}$$

分布式趋同控制 (3.5) 的设计存在两个关键点: 一是通过误差补偿保证在任一时刻 t 系统状态均值保持不变, 即 $\sum_{i=1}^N x_i(t)=\sum_{i=1}^N x_i(0)$; 二是自主体 j 需获知其编码器的输出是否被出邻居节点 $i\in\mathcal{N}_j^-$ 接收到. 类似于文献 [12], 此处我们通过引入无噪声反馈通信信道来解决. 自主体 i 可通过此通信信道传送 1 bit 的信号至自主体 j, 以告知自主体 j 是否已经接收到了量化信号 $\Delta_{ji}(t)$, 如符号 "1" 表示 "传送成功", "0" 表示 "传送失败".

3.3 趋同性分析

由 (3.1) 和 (3.5), 多自主体的闭环系统方程可写为如下的向量形式:

$$X(t+1)=(I-h\mathcal{L}_{\mathcal{G}(t)})X(t)-h[(\mathcal{L}_{\mathcal{G}(t)}\odot\Lambda(t))-(\mathcal{L}_{\mathcal{G}(t)}\odot\Lambda(t))^{\mathrm{T}}]\mathbf{1}, \tag{3.6}$$

其中 $X(t)=[x_1(t),\dots,x_N(t)]^{\mathrm{T}}$, $\Lambda(t)=[\lambda_{ij}(t)]$, $\lambda_{ij}(t)$ 定义为

$$\lambda_{ij}(t)=\begin{cases}\hat{x}_{ji}(t)-x_j(t), & \text{如果 } j\in\mathcal{N}_i^+,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases} \tag{3.7}$$

我们需要对有向时变通信拓扑图序列 $\{\mathcal{G}(t),t\geqslant 0\}$ 及初始状态 $\{x_i(0),i=1,\dots,N\}$ 作如下假设:

(B1) $\{\mathcal{G}(t)=\{\mathcal{V},\mathcal{E}_{\mathcal{G}(t)},\mathcal{A}_{\mathcal{G}(t)}\},t=0,1,\dots\}$ 是有向平衡图序列, 并且存在整数 $h_0>0$, 使得 $\inf_{m\geqslant 0}\lambda_{mh_0}^{h_0}\geqslant\lambda_0>0$, 其中 $\lambda_k^{h_0}=\lambda_2(\mathcal{L}_{\hat{\mathcal{G}}_k^{h_0}})$, $\mathcal{G}_k^{h_0}=\sum_{i=k}^{k+h_0-1}\mathcal{G}(i)$, $\hat{\mathcal{G}}_k^{h_0}$ 是 $\mathcal{G}_k^{h_0}$ 的对称化图;

(B2) 存在正整数 T_0, 使得对任意时刻 $t_1\geqslant 0$ 及任意的自主体 $j\in\mathcal{N}_i^+$, $i=1,\dots,N$, 在时间区间 $[t_1,t_1+T_0)$ 上, 至少存在一个时刻 t 满足 $j\in\mathcal{N}_i^+(t)$;

(B3) $\max_i|x_i(0)|\leqslant C_x$, $\max_i|\delta_i(0)|\leqslant C_\delta$, 其中 C_x 和 C_δ 是已知非负常数, $\delta(t)=X(t)-J_NX(t)$, $J_N=\frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$.

(B1) 等价于常见的周期连通性条件 [13], 保证了存在一个时间周期, 对任意的两个自主体 i 和 j, 不论从哪个时刻开始, 自主体 i 总能在此时间周期内通过通信信道与其邻居自主体间的信息交换影响到自主体 j. (B2) 保证了各自主体的动态编码 (3.2) 和解码器 (3.4) 不会达到饱和. 考虑到实际中初始趋同误差 C_δ 的上界可能会远远小于 $2C_x$, (B3) 分别给出了初始状态和初始趋同误差的上界.

闭环系统 (3.6) 的收敛性结论可归纳为如下定理.

定理 2 假设 (B1)–(B3) 成立, 且对任给的正整数 $K\geqslant K_1(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)$, 选取正常数 h, ϵ_1, γ 和 g_0, 使得 $\rho_{h,\epsilon_1}\in(0,1)$, $\gamma\in(\rho_{h,\epsilon_1}^{\frac{1}{2h_0}},1)$, 以及

$$g_0>\max\left\{\frac{(1+2hd^*)C_x+2hd^*C_\delta}{K+\frac{1}{2}},\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{3.8}$$

则在量化层数为 $2K+1$ 的均匀量化器 (3.3)、尺度变换函数 $g(t)=g_0\gamma^t$ 和趋同协议 (3.2)–(3.5) 下, 闭环系统 (3.6) 以指数收敛速度实现静态平均趋同, 即

$$\left\|x_i(t)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N x_j(0)\right\|=O(\gamma^t),\quad t\to\infty,\quad i=1,\dots,N, \tag{3.9}$$

其中 d^* 是正常数, 满足 $d^* \geqslant \sup_k d^*(k)$, $d^*(k)$ 是图 $\mathcal{G}(k)$ 的度,

$$
\begin{aligned}
&K_1(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)=\left\lfloor M_1(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)-\frac{1}{2}\right\rfloor+1,\\
&M_1(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)=\max\left\{\frac{1}{2\gamma},M^{\frac{1}{2}}+M^{\frac{1}{2}}\gamma^{-(T_0+1)}+\frac{1}{2}\gamma^{-(T_0+2)}\right\}+\frac{hd^*}{\gamma}+2hd^*M^{\frac{1}{2}},\\
&M\triangleq M(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)\\
&\quad=\frac{N\rho_{h,\epsilon_1}d^{*2}\rho_{h,\epsilon_2}^{h_0}}{\epsilon_1\gamma^4(\gamma^{2h_0}-\rho_{h,\epsilon_1})}\sum_{j=0}^{2h_0-2}(h_0-|j-(h_0-1)|)\gamma^{j-2}\sum_{l=0}^{j}C_j^lh^lL^l+\frac{N\rho_{h,\epsilon_2}d^{*2}(1-\gamma^{-4h_0}\rho_{h,\epsilon_2}^{2h_0})}{\epsilon_2\gamma^4(1-\gamma^{-2}\rho_{h,\epsilon_2})},\\
&\rho_{h,\epsilon_1}=1-2h\lambda_0+\sum_{l=2}^{2h_0}h^lC_{2h_0}^lL^l+\epsilon_1h^2,\\
&\rho_{h,\epsilon_2}=1+2hL+h^2L^2+\epsilon_2h^2,\\
&\Theta_1=N\rho_{h,\epsilon_2}^{2h_0}\gamma^{-4h_0}(\gamma^{2h_0}-\rho_{h,\epsilon_1})(C_\delta^2+4\rho_{h,\epsilon_2}\epsilon_2^{-1}\gamma^{-2}d^{*2}C_x^2),\\
&\Theta_2=N\rho_{h,\epsilon_1}\epsilon_2^{-1}d^{*2}\gamma^{-4}\rho_{h,\epsilon_2}^{h_0}\sum_{j=0}^{2h_0-2}(h_0-|j-(h_0-1)|)\gamma^{j-2}\sum_{l=0}^{j}C_j^lh^lL^l,
\end{aligned}\tag{3.10}
$$

ϵ_2 是正常数, C_j^l 表示从 j 个元素中选取 l 种组合的个数, $L\geqslant \sup_k\|\mathcal{L}_{\mathcal{G}(k)}\|$.

由定理 2 知, 闭环系统 (3.6) 以指数速度实现平均趋同. 为得到较快的收敛速度, 需使 γ 尽量接近 $\rho_{h,\epsilon_1}^{\frac{1}{2h_0}}$, 并选取 h, ϵ_1 使 ρ_{h,ϵ_1} 尽量小. 但由 (3.10) 可以看出, γ 越小, 传输的比特率越多, 而当 $\gamma\to\rho_{h,\epsilon_1}^{\frac{1}{2h_0}}$ 时, 所需的比特数趋于无穷. 因此需研究通信比特率与趋同性之间的关系. 可归结为如下定理.

定理 3 假设 (B1)–(B3) 成立, 则对任意的整数 $K\geqslant\lfloor\overline{M}_1\rfloor+1$, 以下的参数向量集 $\Omega_1(K)$ 非空,

$$\Omega_1(K)=\left\{(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)\mid\rho_{h,\epsilon_1}\in(0,1),\gamma\in(\rho_{h,\epsilon_1}^{\frac{1}{2h_0}},1),M_1(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)<K+\frac{1}{2}\right\},$$

其中 ρ_{h,ϵ_1} 及 $M_1(h,\gamma,\epsilon_1,\epsilon_2)$ 由 (3.10) 定义,

$$\overline{M}_1=d^*N^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{2h_0-2}(h_0-|j-(h_0-1)|)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\max\left\{\frac{2}{\lambda_0},\frac{1}{L^{\frac{1}{2}}|\lambda_0\sqrt{C_{2h_0}^2}-LC_{2h_0}^2|^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

对任意 $(h^*,\gamma^*,\epsilon_1^*,\epsilon_2^*)\in\Omega_1(K)$, 在量化层数为 $2K+1$ 的均匀量化器 (3.3)、尺度变换函数 $g(t)=g_0\gamma^{*t}$ (g_0 满足 (3.8)) 和趋同协议 (3.2)–(3.5) 下, 闭环系统 (3.6) 实现平均趋同.

4 分布式适应控制

多自主体系统自适应控制既能对付诸如未知系统结构参数、未建模动态和外部干扰等不确定性, 又能实现期望的宏观群体目标, 因此正逐渐被研究者所重视. 与传统单自主体系统适应控制不同[14], 多自主体系统的适应控制需要考虑自主体间的交互作用、系统动态方程和性能指标中的耦合作用项, 以及各自主体的信息收集能力等. 但与单自主体系统类似, 多自主体系统自适应控制的理论框架也应包含具有在线学习能力的参数估计器, 以及为完成特定控制目标而设计的分布式控制律. 参数估计器选取的不同、分布式控制器设计的不同, 以及两者不同的联合可以产生不同的多自主体适应控制系统. 目前这方面的研究文献仍相对较少[15,16].

本节将结合单自主体适应控制领域理论分析结果和多自主体系统自身特点, 在非合作个体 - 种群博弈框架下, 针对一类耦合大种群随机线性多自主体系统, 利用拓广最小二乘算法、Nash 必然等价原则和必然等价原则, 提出一个可应对未知结构参数、随机干扰和未知耦合项多种不确定性因素的分布式自适应控制方法, 证明闭环系统的稳定性、种群状态平均估计的强一致性和适应跟踪控制的渐近 Nash 均衡最优性, 给出个体性能指标收敛到最优值的速率估计.

4.1 分布式适应跟踪博弈问题

自主体 i $(i=1,\dots,N)$ 的不确定性包括未知定常参数、随机扰动和未知耦合项, 其动态系统由以下耦合 ARMAX 模型描述:

$$
\begin{aligned}
x_i(t+1) = & -\sum_{k=1}^{p_i} A_{ik} x_i(t-k+1) + \sum_{k=1}^{q_i} B_{ik} u_i(t-k+1) + \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{j\in\mathcal{N}_i} G_{ijk} x_j(t-k+1) \\
& + w_i(t+1) + \sum_{k=1}^{r_i} C_{ik} w_i(t-k+1), \quad t \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

其中 $x_i(t)\in\mathbb{R}^m$, $u_i(t)\in\mathbb{R}^m$ 和 $w_i(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别表示自主体 i 在 t 时刻的状态、控制输入以及所受的随机噪声项. 当 $t<0$ 时, $x_i(t)=0$, $u_i(t)=0$, $w_i(t)=0$. $\{A_{ik}, 1\leqslant k\leqslant p_i\}$, $\{B_{ik}, 1\leqslant k\leqslant q_i\}$, $\{G_{ijk}, j\in\mathcal{N}_i,\ 1\leqslant k\leqslant n_i\}$ 是具有适当维数的未知参数矩阵; $\mathcal{N}_i=\{n_{i1},\dots,n_{i,m_i}\}$ 表示自主体 i 的邻居个体; $\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} G_{ijk}x_j(t-k+1)$ 是对自主体 i 与邻居自主体间相互作用项的建模, 耦合系数 G_{ijk} $(k=1,\dots,n_i)$ 表示自主体 j 对自主体 i 的影响强度.

自主体 i $(i=1,\dots,N)$ 采用如下的随机耦合性能指标来刻画是否实现最优跟踪:

$$
J_i^N(u_i, u_{-i}^N) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t} \|x_i(k+1) - \Phi(\overline{x}_N(k))\|^2, \tag{4.2}
$$

其中 $u_{-i}^N \triangleq (u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_N)$, $\Phi(\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为 Borel 可测函数, $\overline{x}_N(k)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i(k)$ 表示多自主体系统在 k 时刻的种群状态平均项 (PSA).

4.2 分布式适应跟踪控制设计

系统 (4.1) 和 (4.2) 的分布式适应跟踪博弈研究框架包括三部分: 利用参数估计器估计未知结构参数; 利用 Nash 必然等价原则估计未知 PSA 项; 利用必然等价原则设计分布式适应控制律.

4.2.1 参数估计算法

为便于应用拓广最小二乘 (ELS) 算法对未知参数估计, 将 (4.1) 写成如下形式:

$$
x_i(t+1) = \theta_i^{\mathrm{T}} \varphi_i^0(t) + w_i(t+1), \quad t\geqslant 0,
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\theta_i = {} & [-A_{i1},\dots,-A_{i,p_i}, B_{i1},\dots,B_{i,q_i}, C_{i1},\dots,C_{i,r_i}, G_{i,n_{i1},1},\dots,G_{i,n_{i1},n_i},\dots, \\
& G_{i,n_{i,m_i},1},\dots,G_{i,n_{i,m_i},n_i}]^{\mathrm{T}}, \\
\varphi_i^0(t) = {} & [x_i^{\mathrm{T}}(t),\dots,x_i^{\mathrm{T}}(t-p_i+1), u_i^{\mathrm{T}}(t),\dots,u_i^{\mathrm{T}}(t-q_i+1), w_i^{\mathrm{T}}(t),\dots,w_i^{\mathrm{T}}(t-r_i+1),
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

$$x_{n_{i1}}^{\mathrm{T}}(t),\ldots,x_{n_{i1}}^{\mathrm{T}}(t-n_i+1),\ldots,x_{n_{i,m_i}}^{\mathrm{T}}(t),\ldots,x_{n_{i,m_i}}^{\mathrm{T}}(t-n_i+1)]^{\mathrm{T}}. \tag{4.4}$$

我们应用 ELS 算法估计系统未知参数矩阵 θ_i:

$$\hat{\theta}_i(t+1)=\hat{\theta}_i(t)+a_i(t)P_i(t)\varphi_i(t)(x_i(t+1)-\hat{\theta}_i^{\mathrm{T}}(t)\varphi_i(t))^{\mathrm{T}}, \tag{4.5}$$

$$P_i(t+1)=P_i(t)-a_i(t)P_i(t)\varphi_i(t)\varphi_i^{\mathrm{T}}(t)P_i(t), a_i(t)=[1+\varphi_i^{\mathrm{T}}(t)P_i(t)\varphi_i(t)]^{-1}, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\varphi_i(t)=[&x_i^{\mathrm{T}}(t),\ldots,x_i^{\mathrm{T}}(t-p_i+1),u_i^{\mathrm{T}}(t),\ldots,u_i^{\mathrm{T}}(t-q_i+1),\hat{w}_i^{\mathrm{T}}(t),\ldots,\hat{w}_i^{\mathrm{T}}(t-r_i+1),\\ &x_{n_{i1}}^{\mathrm{T}}(t),\ldots,x_{n_{i1}}^{\mathrm{T}}(t-n_i+1),\ldots,x_{n_{i,m_i}}^{\mathrm{T}}(t),\ldots,x_{n_{i,m_i}}^{\mathrm{T}}(t-n_i+1)]^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\hat{w}_i(t)=x_i(t)-\hat{\theta}_i^{\mathrm{T}}(t)\varphi_i(t-1), \tag{4.8}$$

其中 $\hat{\theta}_i(\cdot)$ 是对未知结构参数 θ_i 的估计, 初始值 $\hat{\theta}_i(0)$, $\varphi_i(0)\neq 0$, $P_i(0)>0$ 可以任意选取.

由 (4.5)–(4.8) 知, 各自主体的参数估计器虽然形式上与文献 [14] 相同, 但 N 个估计器性能估计、闭环系统稳定性以及控制组最优性分析却与文献 [14] 有着本质的不同. 难点在于各自主体的回归向量中不仅包含自身的状态, 而且还包含邻居自主体的状态.

4.2.2 分布式适应控制设计

在随机非合作博弈框架下, 应用个体 - 种群交互方法 (Nash 必然等价原则[17–19]) 和必然等价原则设计分布式适应跟踪控制律, 需要自主体的理性假设: (i) 各自主体优化其自身的性能指标函数; (ii) 各自主体假设其他自主体在处理个体间竞争性行为时也是理性的.

第 1 步 未知 PSA 项 $\overline{x}_N(k)$ 的估计. 设 k 时刻 $\overline{x}_N(k)$ 的估计是 $f(k)$. 考虑系统 (4.1) 和指标

$$\hat{J}_i^N(u_i,u_{-i}^N)=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t}\|x_i(k+1)-\Phi(f(k))\|^2,\quad k=0,1,\ldots,t,\quad i=1,\ldots,N$$

的分布式最优跟踪控制. 由自主体理性假设, 自主体 i 的最优控制律 $u_i(t)$ 应满足

$$\Phi(f(t))=E[x_i(t+1)\mid\overline{\mathcal{F}}_t^N]=\theta_i^{\mathrm{T}}\varphi_i^0(t),\quad t\geqslant 0, \tag{4.9}$$

其中 θ_i 和 $\varphi_i^0(t)$ 分别由 (4.3) 和 (4.4) 给出. 此时, 自主体 i 的闭环系统为

$$x_i(t+1)-\Phi(f(t))=w_i(t+1),\quad i=1,\ldots,N. \tag{4.10}$$

自主体系统在 $t+1$ 时刻的 PSA 项为

$$\overline{x}_N(t+1)=\Phi(f(t))+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}w_i(k+1),\quad f(0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(0).$$

注意到 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}w_i(k+1)=0$, $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_i(0)=x_0$, 我们可用 $\Phi(f(t))$ 作为 $\overline{x}_N(t+1)$ 的估计值. 换句话说, 当种群数 N 比较大时, 我们可以用

$$f(t+1)=\Phi(f(t)),\quad f(0)=x_0,\quad t\geqslant 1 \tag{4.11}$$

的迭代解 $\{f(t),t\geqslant 0\}$ 作为 PSA 项的估计. 因此, 当参数矩阵已知时, 由 Nash 必然等价原则, (4.9), (4.11), (4.1) 和 (4.2) 的分布式最优跟踪控制应满足如下方程, 其解记作 $u_i^0(\cdot)$,

$$\theta_i^{\mathrm{T}}\varphi_i^0(t)=f(t+1),\quad t\geqslant 0. \tag{4.12}$$

第 2 步　适应控制的设计. 当参数矩阵未知时, 由必然等价原则, 将 (4.12) 中的 θ_i 和 $w_i(t)$ 分别用 ELS 算法 (4.5)–(4.8) 得到的估计值 $\hat{\theta}_i(t)$ 和 $\hat{w}_i(t)$ 替代, 得到系统 (4.1) 和 (4.2) 的分布式适应跟踪控制律 $\hat{u}_i^*(\cdot)$:

$$\hat{\theta}_i^{\mathrm{T}}(t)\varphi_i(t) = f(t+1), \quad t \geqslant 0, \tag{4.13}$$

其中 $\hat{\theta}_i(t)$, $\varphi_i(t)$ 和 $f(t+1)$ 由 (4.5)–(4.8) 和 (4.11) 给出. 由 (4.13), 当 $\hat{B}_{i1}(t)$ 非奇异时, $\hat{u}_i^*(\cdot)$ 可写为

$$\begin{aligned}\hat{u}_i^*(t) = \hat{B}_{i1}^{-1}(t)\Bigg\{&\Phi(f(t)) + \sum_{k=1}^{p_i}\hat{A}_{ik}(t)x_i(t-k+1) - \sum_{k=2}^{q_i}\hat{B}_{ik}(t)\hat{u}_i^*(t-k+1)\\ &- \sum_{k=1}^{r_i}\hat{C}_{ik}(t)\hat{w}_i(t-k+1) - \sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\hat{G}_{ijk}(t)x_j(t-k+1)\Bigg\}.\end{aligned}$$

为克服 ELS 算法迭代过程中出现 $\hat{B}_{i1}(t)$ 奇异的问题, 我们采用文献 [14] 中对 $\hat{B}_{i1}(t)$ 的在线修正方法:

$$\hat{B}_{i1}^*(t) = \begin{cases}\hat{B}_{i1}(t), & \text{如果 } \hat{B}_{i1}^{\mathrm{T}}(t)\hat{B}_{i1}(t) \geqslant \dfrac{1}{\log r_i(t-1)}I,\\ \hat{B}_{i1}(t) + V_i(t)U_i^{\mathrm{T}}(t)\dfrac{1}{\sqrt{\log r_i(t-1)}}, & \text{否则},\end{cases} \tag{4.14}$$

其中 $U_i(t)$ 和 $V_i(t)$ 是正交矩阵, 由矩阵 $\hat{B}_{i1}(t)$ 的奇异值分解得到, 即

$$\hat{B}_{i1}(t) = V_i(t)\begin{bmatrix}\Lambda_i(t) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U_i^{\mathrm{T}}(t),$$

$\Lambda_i(t)$ 为正定对角矩阵. 因此, 得到如下参数未知情形下的分布式适应跟踪控制律:

$$\begin{aligned}u_i^*(t) = \hat{B}_{i1}^{*-1}(t)\Bigg\{&\Phi(f(t)) + \sum_{k=1}^{p_i}\hat{A}_{ik}(t)x_i(t-k+1) - \sum_{k=2}^{q_i}\hat{B}_{ik}(t)u_i^*(t-k+1)\\ &- \sum_{k=1}^{r_i}\hat{C}_{ik}(t)\hat{w}_i(t-k+1) - \sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\hat{G}_{ijk}(t)x_j(t-k+1)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

在此控制律下, 闭环系统的动态方程可写为

$$x_i(t+1) = \tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}(t)\varphi_i(t) + \theta_i^{\mathrm{T}}(\varphi_i^0(t) - \varphi_i(t)) - (\Delta\hat{B}_{i1}(t))u_i^*(t) + \Phi(f(t)) + w_i(t+1), \tag{4.16}$$

其中 $\Delta\hat{B}_{i1}(t) \triangleq \hat{B}_{i1}^*(t) - \hat{B}_{i1}(t)$.

4.3 闭环系统分析

本节证明闭环系统 (4.16) 是稳定的, 并且其稳定性与种群数 N 无关; 种群状态平均 $\overline{x}_N(t)$ 的估计是强一致的; 分布式适应控制组列 $\{U_N = \{u_i^* \in \mathcal{U}_{l,i}^N, 1 \leqslant i \leqslant N\}, N \geqslant 1\}$ 关于相应的性能指标组列 $\{J_N = \{J_i^N, 1 \leqslant i \leqslant N\}, N \geqslant 1\}$ 是几乎必然渐近 Nash 均衡的. 作如下假设:

(C1) $\{\{w_i(t), \mathcal{F}_t^i\}, i \geqslant 1\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一组独立鞅差序列, 满足

$$\sup_{t\geqslant 0} E[\|w_i(t+1)\|^\beta \mid \mathcal{F}_t^i] < \infty \text{ 几乎处处成立}, \quad \text{对某 } \beta > 2, \tag{4.17}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t}w_i(k)w_i^{\mathrm{T}}(k)=R_\sigma \text{ 几乎处处成立,} \tag{4.18}$$

其中 $\mathcal{F}_t^i \triangleq \sigma(w_i(s), 0\leqslant s\leqslant t)$, $R_\sigma\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为正定矩阵;

(C2) $C_i^{-1}(\mathrm{e}^{i\lambda})+C_i^{-\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{-i\lambda})-I>0$, $\forall\,\lambda\in[0,2\pi]$, 其中 $C_i(z)=I+C_{i1}z+C_{i2}z^2+\cdots+C_{i,r_i}z^{r_i}$;

(C3) $\det B_i(z)\neq 0$, $\forall\,z\in\mathcal{C}:|z|\leqslant 1$, 其中 $B_i(z)=B_{i1}+B_{i2}z+B_{i3}z^2+\cdots+B_{i,q_i}z^{q_i-1}$;

(C4) $\{x_i(0), i\geqslant 1\}$ 是具有相同期望 $x_0=Ex_i(0)$ 的独立序列, 并且与 $\{\{w_i(t), t\geqslant 0\}, i\geqslant 1\}$ 独立.

定理 4 对系统 (4.1), 假设 (C1)–(C4) 成立, 并且非线性迭代 $f(t+1)=\Phi(f(t))$, $f(0)=x_0$ 的解 $\{f(t), t\geqslant 0\}$ 有界, 则闭环系统 (4.16) 对 N 是一致稳定的, 即

$$\sup_{N\geqslant 1}\max_{1\leqslant i\leqslant N}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\|x_i(k)\|^2<\infty \text{ 几乎处处成立.}$$

同时, PSA 项的估计 $f(t)$ 关于种群数 N 是强一致的, 即

$$\lim_{N\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t}\|\overline{x}_N(k)-f(k)\|^2=0 \text{ 几乎处处成立.}$$

此外, 若假设函数 $\Phi(\cdot)$ 是 μ-Hölder 连续的, 即 $\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\leqslant\varrho\|x-y\|^\mu$, $\forall\,x,y\in\mathbb{R}$, 其中 $\mu\in(0,1]$, 那么由 (4.5)–(4.8), (4.11) 和 (4.15) 给出的分布式适应控制组 $\{U_N=\{u_i^*\in\mathcal{U}_{l,i}^N, 1\leqslant i\leqslant N\}, N\geqslant 1\}$ 关于性能指标组 $\{J_N=\{J_i^N, 1\leqslant i\leqslant N\}, N\geqslant 1\}$ 是几乎必然渐近 Nash 均衡的, 并且各自主体性能指标值收敛到最优性能指标值的速度为 $O(N^{-\mu})$.

定理 4 说明在适应控制 (4.5)–(4.8), (4.11) 和 (4.15) 下, 种群个数 N 的扩张不会影响自主体系统的稳定性, 这是讨论控制组的几乎必然渐近 Nash 均衡最优性的前提. 值得注意的是, 各自主体的信息流体现在如下两种交互作用中: 一是个体 - 种群间的交互作用, 由性能指标中的种群状态平均耦合项体现, 并且采用适于理性自主体的个体 - 种群交互方法对其进行处理. 事实上, 个体 - 种群交互是从博弈论的角度理解, 自主体相互间并无信息通信. 二是自主体与邻居自主体间的局部通信. 它是用来进行参数估计器设计以处理自主体动态系统中的弱耦合项, 进而基于估计器得出的良好估计以及均衡原理设计自适应分布式控制. 我们可以看出, 个体 - 种群交互作用对群体行为 (即整体最优跟踪控制) 的实现起关键性作用, 而非自主体间的局部通信作用.

致谢 借此机会衷心感谢导师张纪峰研究员的指导和帮助, 同时感谢加拿大 Carleton 大学的黄民懿教授、中国科学院数学与系统科学研究院的李韬博士和北京理工大学的马宏宾教授的宝贵建议.

参考文献

1 张强. 不确定环境下多自主体系统的分布式估计与控制. 博士学位论文. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究院, 2012

2 Zhang Q, Zhang J F. Quantized data based distributed consensus under directed time-varying communication topology. SIAM J Control Optim, 2013, 51: 332–352

3 Zhang Q, Zhang J F. Adaptive tracking games for coupled stochastic linear multi-agent systems: stability, optimality and robustness. IEEE Trans Automat Control, in press

4 Zhang Q, Zhang J F. Distributed parameter estimation over unreliable networks with Markovian switching topologies. IEEE Trans Automat Control, 2012, 57: 2545–2560

5 Zhang Q, Wang B C, Zhang J F. Distributed dynamic consensus under quantized communication data. Internat J Robust Nonlinear Control, in press

6 Huang M, Manton J H. Stochastic consensus seeking with noisy and directed inter-agent communication: fixed and randomly varying topologies. IEEE Trans Automat Control, 2010, 55: 235–241
7 Li T, Zhang J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises. IEEE Trans Automat Control, 2010, 55: 2043–2057
8 Chen H. Stochastic Approximation and Its Applications. Dordrecht: Kluwer, 2002
9 Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory. IEEE Trans Automat Control, 2006, 51: 401–420
10 Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. IEEE Trans Automat Control, 2004, 49: 1465–1476
11 Li T, Fu M, Xie L, et al. Distributed consensus with limited communication data rate. IEEE Trans Automat Control, 2011, 56: 279–292
12 Carli R, Como G, Frasca P, et al. Distributed averaging on digital erasure networks. Automatica, 2011, 47: 115–121
13 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. IEEE Trans Automat Control, 2003, 48: 988–1001
14 Chen H, Guo L. Identification and Stochastic Adaptive Control. Boston: Birkhäuser, 1991
15 Huang M, Malhamé R, Caines P E. Nash strategies and adaptation for decentralized games involving weakly-coupled agents. In: Proceeding of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the 2005 European Control Conference. Seville: IEEE, 2005, 1050–1055
16 Ma H, Lum K, Ge S. Decentralized Åström-Wittenmark self-tuning regulator of a multi-agent uncertain coupled ARMAX system. In: Proceeding of the 2007 IEEE Multi-conference on Systems and Control. Singapore: IEEE, 2007, 363–368
17 Huang M, Caines P E, Malhamé R. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: Individual-mass behavior and decentralized ε-Nash equilibria. IEEE Trans Automat Control, 2007, 52: 1560–1571
18 Li T, Zhang J F. Asymptotically optimal decentralized control for large population stochastic multiagent systems. IEEE Trans Automat Control, 2008, 53: 1643–1660
19 Ma C, Li T, Zhang J F. Linear quadratic decentralized dynamic games for large population discrete-time stochastic multi-agent systems. J Systems Sci Math Sci, 2007, 27: 464–480

Distributed estimation and control of multi-agent systems in uncertain environment

ZHANG Qiang

Abstract Due to the wide applications in wireless sensor networks, multi-robot cooperative control and satellite formation flying, etc., distributed control and estimation of multi-agent systems (MASs) are now a hot topic in the system control community. In practice, when carrying out distributed tasks, MASs are often subject to various uncertainties, which can make significant macro-influence to the whole systems via affecting each agent's microscopic decisions. The interaction among uncertainties and distributed information pattern may bring essential difficulty to the design and analysis of MASs. This paper is aimed at seeking more robust and more effective distributed estimation and control protocols to achieve global estimation and control tasks under various uncertainties including stochastic noises, signal loses, quantization errors and unknown system structures, etc. Specifically, distributed estimation, distributed control and distributed adaptive control are investigated.

Keywords **multi-agent systems, stochastic systems, distributed estimation, distributed control, adaptive control, consensus, stochastic dynamic game**

MSC(2010) **37H10, 37N35, 60J10**

doi: 10.1360/012013-119