



距离平方成本函数的最优传输问题

陈世炳^{1*}, 刘佳堃²

1. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026;

2. School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong, Wollongong, NSW 2522, Australia

E-mail: chenshib@ustc.edu.cn, jiakunl@uow.edu.au

收稿日期: 2023-09-06; 接受日期: 2023-12-06; 网络出版日期: 2024-01-22; * 通信作者

科技部重点研发计划 (批准号: 2022YFA1005400 和 2020YFA0713100)、国家自然科学基金 (批准号: 12225111 和 12141105) 和 Australian Research Council (批准号: DP200101084, DP230100499 和 FT220100368) 资助项目

摘要 距离平方函数是最优传输问题中最重要的成本函数之一, 它在许多领域都有着重要的应用. 本文简要介绍在该成本函数下的最优传输问题, 包括解的存在性、正则性、部分正则性以及相关的自由边界问题.

关键词 最优传输 自由边界 正则性

MSC (2020) 主题分类 35J96, 35J25, 35B65

1 引言

最优传输理论, 也称为 Wasserstein 距离或 Monge-Kantorovich 问题, 致力于研究如何在两个概率分布之间找到最优的映射方式, 以最小化某种成本. 这个理论的起源可以追溯到 18 世纪的数学家 Monge^[29], 但在 20 世纪得到了 Kantorovich^[21, 22] 及 Kantorovich 和 Rubinshtein^[23] 等数学家的进一步发展. 最优传输理论在多个领域中都有广泛的应用. 在图像匹配、图像合成和图像编辑方面, 最优传输理论有着显著的影响. 通过将两个图像之间的差异建模为概率分布, 并使用最优传输方法来找到最佳映射, 可以实现图像风格迁移、图像去噪和图像配准等任务 (参见文献 [24]). 在分布匹配、生成模型和域适应等领域, 最优传输理论被用于解决数据分布之间的匹配和对齐问题. 这在领域适应、迁移学习和生成对抗网络 (generative adversarial network, GAN) 中发挥了重要作用 (参见文献 [1, 12]).

最优传输理论的核心思想是考虑如何将一个概率分布的质量以最小化总的运输成本从一个位置运送到另一个位置. 这可以形式化地表述为如下问题: 给定 $\mathbb{R}^n$ 上的两个分别集中在 Ω 和 Ω^* ($\mathbb{R}^n$ 中的有界开集) 上的概率密度函数 f 和 g , 以及一个成本函数 $c: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 是否可以找到一种映射方式 T , 将 Ω 中的质量分配到 Ω^* 中, 使得总的运输成本最小化? 这可以表示为以下最优化问题:

$$\inf_{T \# f = g} \int_{\mathbb{R}^n} c(x, Tx) f(x) dx, \quad (1.1)$$

英文引用格式: Chen S B, Liu J K. Optimal transport problems with the squared distance cost function (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 775–783, doi: 10.1360/SSM-2023-0248

这里记号 $T_{\sharp}f = g$ 的含义是 T 保测度, 即对于任意 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 有 $\int_{T^{-1}A} f dx = \int_A g dx$. 这个问题的解决有助于理解和优化资源分配的方式, 以及如何量化两个分布之间的相似性或距离.

最优传输问题解的存在性在 Kantorovich、Brenier、McCann 等数学家的努力下已经有相对比较完善的理论. 但关于一般成本函数的最优传输问题解的正则性结果几乎没有进展, 直到 2005 年, 解的光滑性条件才由 Ma 等^[26] 找到, 被命名为 Ma-Trudinger-Wang (MTW) 条件, 它给出了光滑解存在的关于成本函数的充分性条件. 之后, Loeper^[25] 构造了一些例子, 表明 MTW 条件也是必要条件. 在最优传输理论及其应用, 距离平方函数 (即 $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$) 是最重要的成本函数之一. 本文将重点介绍在这种情形下最优传输问题解的存在性和正则性理论. 关于最优传输问题的更广泛理论和应用, 可参见文献 [30, 35, 36] 以及其中的相关文献.

2 解的存在性

由于缺乏紧性, 最优传输问题 (1.1) 的解的存在性并不显然. 事实上, 假设 $\{T_k\}$ 是一个极小子序列, 即

$$\int_{\mathbb{R}^n} c(x, T_k x) f(x) dx \rightarrow \inf_{T_{\sharp}f=g} \int_{\mathbb{R}^n} c(x, T x) f(x) dx, \quad k \rightarrow \infty,$$

先验来看并不清楚 $\{T_k\}$ 是否有收敛子列. 直到 1942 年, Kantorovich 提出在测度意义下的传输方案中寻找最优解, 这与传统的传输映射不同, 测度意义下的传输方案允许质量分裂. 一个传输方案对应于一个概率测度 $\pi \in \Pi(f, g)$, 其中

$$\Pi(f, g) := \left\{ \sigma \in \mathbb{P}(\Omega \times \Omega^*) : \sigma(A \times \Omega^*) = \int_A f, \sigma(\Omega \times A) = \int_A g, \forall \text{ Borel 集 } A \subset \mathbb{R}^n \right\}.$$

Kantorovich 提出的问题如下: 求泛函

$$\min_{\pi \in \Pi(f, g)} \int c(x, y) d\pi \quad (2.1)$$

的极小值. 由于概率测度空间 $\Pi(f, g)$ 关于弱拓扑是紧集, 所以问题 (2.1) 的解的存在性可以很容易地通过选取极小子序列得到.

Kantorovich 的另一个重要贡献是, 他发现了以下关于最优传输问题的对偶性定理, 这有助于计算和进一步描述最优方案. 记 $C_b(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数全体, 对于 $u, v \in C_b(\mathbb{R}^n)$, 令 $J(u, v) := \int_{\mathbb{R}^n} (-uf) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (-vg) dx$.

定理 2.1 (Kantorovich 对偶) 以下对偶性成立:

$$\min_{\pi \in \Pi(f, g)} \int c(x, y) d\pi = \max_{\substack{u, v \in C_b(\mathbb{R}^n) \\ u(x) + v(y) \geq -c(x, y) \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n}} J(u, v). \quad (2.2)$$

当成本函数 $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ 时, Brenier^[3] 利用定理 2.1 给出了最优映射一个非常漂亮的刻画, 并将其与经典 Monge-Ampère 方程联系了起来.

定理 2.2^[3] 当成本函数 $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ 且区域 Ω 和 Ω^* 有界时, 最优传输问题 (1.1) 存在唯一的最优映射 $T: \Omega \rightarrow \Omega^*$, 且可找到一个 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数 u 使得 $T = Du$.

Brenier 定理中的凸函数 u 满足

$$(Du)_{\sharp}f = g. \quad (2.3)$$

反过来, 如果一个凸函数满足 (2.3), 则也能说明 Du 即是问题 (1.1) 的唯一解. Brenier 定理要求 f 和 g 的支撑集有界, 或者更一般地要求 $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f dx$ 和 $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 g dx$ 有界. McCann^[27] 去掉了这个条件, 即对于任意两个概率密度函数 f 和 g , 在相差一个常数的意义下, (2.3) 存在唯一解. McCann^[28] 在一个重要的工作中在 Riemann 流形上对于测地距离平方函数的最优传输问题建立了 Brenier 型的定理.

在 (2.3) 中, 若 $u \in C^2(\Omega)$, 则

$$g(Du(x)) \det D^2 u(x) = f(x), \quad (2.4)$$

这即是经典 Monge-Ampère 方程. 一般情形下, (2.3) 的解只是 f - 几乎处处满足 (2.4). 因此 (2.3) 可看作弱意义下的 Monge-Ampère 方程. 满足 (2.3) 的凸函数 u 也称为 (2.4) 的 Brenier 解.

3 正则性理论

3.1 内部正则性

本小节主要介绍 (2.3) 解的内部正则性理论. 仍然假设 f 和 g 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的两个概率密度函数, 它们的支撑集分别是两个有界开集 Ω 和 $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ 的闭包. 进一步假设存在一个正的常数 λ , 使得对于任意 $x \in \Omega$ 和 $y \in \Omega^*$ 都成立

$$\frac{1}{\lambda} < f(x) < \lambda, \quad \frac{1}{\lambda} < g(y) < \lambda. \quad (3.1)$$

Caffarelli^[6] 提供了一个重要的例子, 说明当目标区域 Ω^* 非凸时, 即使密度函数都是常数, (2.3) 的解也可能在 Ω 内部具有奇点. 例如, 设 $\Omega = B_1(0)$, $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$, 其中

$$\begin{aligned} \Omega_1^* &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x - e_1 \in B_1(0), x_1 \geq 1\}, \\ \Omega_2^* &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x + e_1 \in B_1(0), x_1 \leq -1\}. \end{aligned}$$

再令 $f = \chi_\Omega$, $g = \chi_{\Omega^*}$, 则 (2.3) 的凸解为 $u = \frac{1}{2}|x|^2 + |x_1|$. 显然, u 在 $x_1 = 0$ 处仅仅是 Lipschitz 的. 为了说明奇点并不是因为拓扑原因及区域边界的角点导致的, Caffarelli 通过在 Ω_1^* 和 Ω_2^* 之间连接一条细小的管子并对区域作适当的光滑处理, 构造了光滑的、连通的区域 Ω^* , 使得解 u 仍然具有奇点. Ma 等^[26] 在更一般情形下构造了例子, 说明只要 Ω^* 非凸, 即使 Ω 光滑凸, 也可以找到光滑的正函数 f 和 g , 使得 (2.3) 的解具有奇点.

由上述讨论, 可以看出 (2.3) 的正则性的一个自然要求是 Ω^* 为凸集. Caffarelli^[6] 建立了如下定理, 可认为是最优传输问题弱解正则性理论的起点.

定理 3.1^[6] 假设 Ω 和 Ω^* 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, Ω^* 凸. 假设 f 和 g 满足 (3.1), 则 (2.3) 的解 u 在 Ω 中严格凸, 且 $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$.

Caffarelli 观察到当 Ω^* 凸时, (2.3) 的解 u 在 Alexandrov 意义下满足:

$$\frac{1}{C} \chi_\Omega < \det D^2 u < C \chi_\Omega \quad (3.2)$$

对于某个正的常数 C 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立. Alexandrov 意义下的不等式 (3.2) 可解释为对于任意 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\left| \frac{1}{C}(\Omega \cap A) \right| < |\partial u(A)| < |C(\Omega \cap A)|,$$

这里 $\partial u(x)$ 定义为凸函数 u 在 x 处的次微分, 即

$$\partial u(x) := \{p \in \mathbb{R}^n : u(z) \geq u(x) + p \cdot (z - x), \forall z \in \Omega\},$$

$\partial u(A) := \bigcup_{x \in A} \partial u(x)$. 利用 (3.2) 和凸分析的技术, Caffarelli 证明了 u 的严格凸性, 然后通过文献 [5] 中关于严格凸的 Alexandrov 解的 $C^{1,\alpha}$ 正则性理论, 推导出了 $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$.

u 是一个凸函数, 如果对于任意 Borel 集 $A \subset \Omega$ 都有 $|\partial u(A)| = \int_A f$, 则称 u 是

$$\det D^2 u = f \quad (3.3)$$

在 Ω 中的 Alexandrov 解. Caffarelli [4] 建立了 (3.3) 的严格凸解的内部 $W^{2,p}$ 和 $C^{2,\alpha}$ 正则性理论, 特别地, 他证明了如下定理.

定理 3.2 [4] 假设 $0 < f \in C^0(\Omega)$. 假设 u 是 (3.3) 的一个严格凸解, 则 $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$. 若进一步假设 $f \in C^\alpha(\Omega)$, 则 $u \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega)$.

为了证明这个定理, Caffarelli 充分发掘了 Monge-Ampère 算子的仿射不变性, 发展了一套精细的扰动办法, 对 (3.3) 的凸解的等值面 (代替传统的球体) 建立了一个重要的 Vitali 覆盖引理. 对于 Monge-Ampère 方程, 右端项 f 起到了类似线性一致椭圆方程的系数的作用. 定理 3.2 在某种意义上通过对 $f = 1$ (常系数) 时的光滑解进行扰动得到. 对于只有正的上下界的 f , (3.3) 的严格凸解是否具有 $W^{2,p}$ 估计? 直到 2012 年才由 De Philippis 和 Figalli [13] 证明了 $W^{2,1}$ 正则性, 随后 De Philippis 等 [15] 以及 Schmidt [32] 将其改进到 $W^{2,1+\epsilon}$. 然而, Wang [37] 提供的例子表明这个 ϵ 需要足够小.

定理 3.3 [13, 15, 32] 假设存在一个正的常数 C 使得 $\frac{1}{C} < f < C$. 假设 u 是 (3.3) 的一个严格凸解, 则存在一个只依赖于 C 和 n 的常数 ϵ , 使得 $u \in W_{\text{loc}}^{2,1+\epsilon}(\Omega)$.

因为定理 3.1 建立了 (2.3) 的凸解的严格凸性, 所以由定理 3.2 和 3.3 可得最优传输问题解的相应正则性.

推论 3.1 假设定理 3.1 的条件满足, 且 u 是 (2.3) 的一个凸解, 则 $u \in W_{\text{loc}}^{2,1+\epsilon}(\Omega)$. 若进一步假设 $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\Omega^*)$, 则 $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$. 若再进一步假设 $f \in C^\alpha(\Omega)$, $g \in C^\alpha(\Omega^*)$, 则 $u \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega)$.

3.2 整体正则性

本小节仍然假设 (3.1) 成立, 并且假设 g 的支撑集 Ω^* (目标区域) 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸集. 本小节将介绍 (2.3) 的凸解在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 附近的正则性理论. Urbas [34] 构造了一个例子, 说明即使 f 和 g 均为常数, 也存在光滑非凸的单连通区域 Ω , 使得 u 在 $\partial\Omega$ 附近不是 C^2 . 因此, 研究 u 的边界正则性的一个自然条件是假设 Ω 凸. 在适当的条件下, Delanoë [16] 在二维情形下以及 Urbas [33] 在一般维数下证明了 (2.3) 的光滑解的存在性.

定理 3.4 (参见文献 [16] ($n = 2$) 和 [33] ($n \geq 3$)) 假设 Ω 和 Ω^* 为 $\mathbb{R}^n$ 中的边界为 $C^{2,1}$ 且一致凸的区域. 假设 $0 < f \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, $0 < g \in C^{1,1}(\overline{\Omega^*})$, 则 (2.3) 存在唯一的 $C^{2,\alpha}$ 的凸解, 其中 α 可取 $(0, 1)$ 中的任何数.

Delanoë [16] 和 Urbas [33] 采用了连续性方法. 注意到 (2.3) 可以写成边值问题

$$g(Du(x)) \det D^2 u(x) = f(x) \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (3.4)$$

$$Du(\Omega) = \Omega^*. \quad (3.5)$$

(3.4) 和 (3.5) 在文献中一般被称为第二边值问题或者自然边值问题. 经过平移不妨设 Ω 和 Ω^* 的重心均为 0. 因为 Ω 和 Ω^* 的边界是 $C^{2,1}$ 且一致凸的, 令 h_0 和 h_1 分别为它们的 $C^{2,1}$ 且一致凹的定义函数, 即 $\Omega = \{h_0 < 0\}$, $\Omega^* = \{h_1 < 0\}$. 然后, 令 $h_t = (1-t)h_0 + th_1$. 记 $\Omega_t^* = \{h_t < 0\}$, 此时 Ω_t^* 也是 $C^{2,1}$ 且一致凸的. 考虑一族方程

$$g(Du_t)\det D^2u_t^\delta = e^{\delta(u_t - u_0)}(tf + (1-t)g(Du_t)) \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (3.6)$$

$$h_t(Du_t) = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (3.7)$$

其中 $u_0 = \frac{1}{2}|x|^2$.

令 I 为 $[0, 1]$ 中所有使得 (3.6) 和 (3.7) 有 $C^{2,\alpha}$ 凸解的 t 的全体. 显然, $t=0$ 时, u_0 即为解, 因此 $0 \in I$. 对方程进行线性化, 然后利用 Banach 空间中的隐函数定理, 可以说明 I 是 $[0, 1]$ 中的开集. 通过建立 (3.6) 和 (3.7) 的解 u_t^δ 不依赖于 t 的先验估计 $\|u_t^\delta\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_\delta$, 可以得出 I 是一个闭集. 因此, I 是 $[0, 1]$ 中既开又闭的非空集合, 因此 $I = [0, 1]$. 经过简单分析, 也可以得到 $\|u_1^\delta\|_{C^{2,\alpha}} \leq C$, 其中常数 C 与 δ 无关. 令 $\delta \rightarrow 0$, 取一个 u_1^δ 的收敛子列, 得到的极限函数即是我们想要找到的 (3.4) 和 (3.5) 的解.

这个证明的主要部分是建立先验估计, 而区域的光滑性和一致凸性使得可以构造合适的辅助函数来应用极大值原理. 其中最关键的部分是建立如下的一致斜估计:

$$\nu_\Omega(x) \cdot \nu_{\Omega_t^*}(Du_t^\delta(x)) > c, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (3.8)$$

这里, $c > 0$ 是一个与 t 无关的常数, $\nu_\Omega(x)$ 和 $\nu_{\Omega_t^*}(Du_t^\delta(x))$ 分别表示 Ω 和 Ω_t^* 在相应边界点处的单位内法向量.

Caffarelli^[7] 建立了 (3.4) 和 (3.5) 的边界 $C^{2,\alpha'}$ 正则性.

定理 3.5 假设 Ω 和 Ω^* 为 $\mathbb{R}^n$ 中边界是 C^2 且一致凸的区域. 假设 $0 < f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < g \in C^\alpha(\overline{\Omega^*})$. 若 u 为 (3.4) 和 (3.5) 的凸解, 则 $u \in C^{2,\alpha'}(\overline{\Omega})$ 对某个 $\alpha' \in (0, \alpha)$ 成立.

Caffarelli 的证明和上述 Delanoë 和 Urbas 的方法完全不同. 他充分发掘了问题的仿射不变性和对偶性, 证明了解的等值面的几何衰减和一致密度估计等重要的性质, 然后先将解的正则性从 $C^{1,\alpha}$ 提升至 $C^{1,1-\epsilon}$, 再利用扰动法最终提升至 $C^{2,\alpha'}$. 整个证明中最关键也是最复杂的部分是建立与 (3.8) 类似的一致斜估计, 即

$$\nu_\Omega(x) \cdot \nu_{\Omega^*}(Du(x)) > c, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (3.9)$$

这里 c 只依赖于 f 和 g 的 C^0 范数和下界以及 Ω 和 Ω^* 的 C^2 范数和一致凸性. Caffarelli 的证明中关于区域的 C^2 正则性以及一致凸性也是至关重要的. 例如, 当证明上述关键估计 (3.9) 时, 这些关于区域的条件确保在针对最优传输问题的爆破分析中, 两个极限区域为两个非负二次多项式的图像, 使得 Caffarelli 可以利用它们构造合适的辅助函数再应用极值原理来推导出矛盾.

最近, Chen 等^[10] 不仅去掉了区域的一致凸性要求, 而且对区域的正则性要求也降低为 $C^{1,1}$. 他们建立了如下定理.

定理 3.6^[10] 假设 Ω 和 Ω^* 为 $\mathbb{R}^n$ 中边界是 $C^{1,1}$ 的凸区域. 假设 $0 < f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < g \in C^\alpha(\overline{\Omega^*})$. 若 u 为 (3.4) 和 (3.5) 的凸解, 则 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

上述问题一旦有 $C^{2,\alpha}$ 正则性, 若 f 、 g 、 Ω 和 Ω^* 有更高阶的正则性, 则 u 的更高阶正则性可以由经典的椭圆方程斜边值问题的正则性理论得到 (详见文献 [19]). 在给定条件下, 进行爆破分析时, 极

限区域仅为两个一般的凸集. 因此, 传统的方法不再适用. Chen 等^[10] 进一步发掘了最优传输的对偶性, 并精确地描述了解的等值面形状. 这使他们能够更好地控制在爆破分析中使用的仿射变换. 特别地, 他们成功建立了极限区域的分裂性质, 即 Ω 的极限区域具有类似于 $\mathbb{R}^{n-2} \times \omega$ 的结构, 其中 ω 是一个二维凸集. Ω^* 对应的极限区域也具有类似的性质, 因此在某种程度上, 可以将问题化为二维情形. 接下来, 采用特殊的爆破序列, 以确保在进行爆破分析时保持原始解的一些重要衰减估计. 他们引入新的逼近方法, 并采用一种新的方法来选择辅助函数. 先初步构造一个涉及 u 的一阶导数的 n - 变量辅助函数, 对其中 $n-1$ 个变量取极值得到真正要用的一维辅助函数. 然后, 使用极值原理证明这个辅助函数的凹性质. 最后, 通过结合辅助函数的衰减估计, 得出矛盾.

在二维情形下, 在文献 [9] 中能进一步降低对 Ω 和 Ω^* 的正则性要求, 事实上只需要它们是 $C^{1,\alpha}$ 的. 同样在二维情形下, 当密度函数 $f = \chi_\Omega$ 、 $g = \chi_{\Omega^*}$ 时, Savin 和 Yu^[31] 在只要求 Ω 和 Ω^* 为有界凸集的条件下证明了 $u \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$, $\forall p > 1$. 事实上, 他们的证明适用于 $f \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $g \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}^*) > 0$ 的情形.

3.3 部分正则性

前两小节关于最优传输问题解的正则性的结论都对区域的凸性有一定要求. 一个自然的问题是, 对于一般区域之间的最优传输问题解的奇点集是否有合适的刻画, 如奇点集的测度大小和 Hausdorff 维数等. 这个问题十分困难, 在成本函数为距离平方情形下, 目前最好的结果是 Figalli 和 Kim^[18] 所证明的定理.

定理 3.7^[18] 假设 Ω 和 Ω^* 为 $\mathbb{R}^n$ 中的两个有界开集, 且 f 和 g 满足条件 (3.1). 假设 u 是 (2.3) 的一个凸解. 则存在一个常数 $\alpha \in (0, 1)$ 以及满足 $|\Omega \setminus \Omega'| = 0$ 和 $|\Omega^* \setminus \Omega'^*| = 0$ 的两个开集 $\Omega' \subset \Omega$ 和 $\Omega'^* \subset \Omega^*$, 使得 $u \in C^{1,\alpha}(\Omega')$ 且 $Du : \Omega' \rightarrow \Omega'^*$ 是一个双 Hölder 的同胚.

在 Figalli 和 Kim 的证明中, $\Omega' = \{x \in \Omega : \partial u(x) \subset \Omega^*\}$. 对于一般成本函数, 当 f 和 g 为正的连续函数或具有更高的正则性时, 与定理 3.7 对应的部分正则性定理由 De Philippis 和 Figalli^[14] 建立. 最优传输领域的一个重要猜测是奇点集的闭包的 Hausdorff 维数为 $n-1$, 但是即使对于距离平方成本函数, 对一般维数这个猜测仍然没有取得任何实质进展.

4 最优部分传输和自由边界

在经典最优传输问题中, 通常要求源区域和目标区域具有相同的质量; 但在实际应用中, 源区域和目标区域的质量往往是不相同的, 这就是所谓的最优部分传输问题. 假设 f 和 g 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$, 它们的支撑集分别是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸集 Ω 和 Ω^* , 且 $\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}^* = \emptyset$. 此外, 假设 $\int_\Omega f > \int_{\Omega^*} g$. 成本函数仍然采用 $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$, 即从 Ω 中的点 x 传输单位质量到 Ω^* 中的点 y 的成本. 最优部分传输问题的目标是寻找一种方案, 将来自 (Ω, f) 的质量 $m < \int_{\Omega^*} g$ 传输到 (Ω^*, g) , 并使总成本最小.

一个非负有限的 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的 Borel 测度 γ 称为从分布 (Ω, f) 到分布 (Ω^*, g) 的传输方案 (质量为 m), 如果 $\gamma(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = m$ 且对于任意 Borel 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$, 有不等式

$$\gamma(A \times \mathbb{R}^n) \leq \int_{A \cap \Omega} f(x) dx, \quad \gamma(\mathbb{R}^n \times A) \leq \int_{A \cap \Omega^*} g(y) dy.$$

传输方案 γ 称为最优, 如果它在所有传输方案中最小化了成本函数

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|x - y|^2 d\gamma(x, y).$$

对于一个重要的情形, 即当 $m = \int_{\Omega^*} g dx$ 时的情形, 最优部分传输问题等价于研究如下障碍问题的凸解:

$$(Du)_{\sharp} f \chi_{\{u > \frac{1}{2}|x|^2\}} = g. \quad (4.1)$$

实际上, 如果 u 是 (4.1) 的凸解, 则 $(\text{id} \times Du)_{\sharp} f \chi_U$ 即为最优传输方案, 其中

$$U = \left\{ u > \frac{1}{2}|x|^2 \right\} \cap \Omega.$$

本节余下的内容将主要关注 (4.1) 的解. 注意, 成本最小的传输方法实际上是将 Ω 中 U 上的质量通过映射 Du 传输至 Ω^* . 这个问题的自由边界为 $\mathcal{F} := \partial U \cap \Omega$.

Caffarelli 和 McCann^[8] 首先研究了这个问题. 当 $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^*} = \emptyset$ 时, 他们证明了解的存在唯一性. 自由边界 $\mathcal{F}$ 的正则性以及 u 在 $\mathcal{F}$ 附近的正则性是一个很困难的问题.

记 $\Omega_{\delta} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Caffarelli 和 McCann^[8] 证明了如下定理.

定理 4.1^[8] 假设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的支撑集 Ω 和 Ω^* 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸区域, 且 $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^*} = \emptyset$. 假设 f 和 g 分别在 Ω 和 Ω^* 中有正的上下界. 若 u 是 (4.1) 的凸解, 则存在一个 $\alpha \in (0, 1)$ 使得 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{U} \cap \Omega_{\delta})$ 对于任意 $\delta > 0$ 都成立. 同时, $\mathcal{F} \in C^{1,\alpha}$.

注 4.1 Figalli^[17] 研究了当 $\Omega \cap \Omega^* \neq \emptyset$ 时的最优部分传输问题, 证明解的存在性和唯一性的方法与 Caffarelli 和 McCann 的方法不同. Figalli 证明了自由边界在 $\overline{\Omega \cap \Omega^*}$ 上是 C^1 的. 之后, Indrei^[20] 进一步将自由边界正则性改进至 $C^{1,\alpha}$.

一个自然的问题是, 当 f, g, Ω 和 Ω^* 具有更好的正则性时, 是否会导致类似于经典最优传输 u 的更好正则性. Caffarelli 和 McCann 在文献 [8] 的引言中也指出, 为自由边界建立的几何性质不足以判定自由边界的高阶正则性以及最优映射在自由边界附近的高阶正则性, 当时这个问题没有得到解决. 然而, 在最近的工作中, Chen 等^[11] 彻底解决了这个问题, 证明了如下结果.

定理 4.2^[11] 在定理 4.1 的条件下, 进一步假设 Ω 和 Ω^* 为 C^2 一致凸, 且 $0 < f \in C^{\alpha}(\Omega)$, $0 < g \in C^{\alpha}(\Omega^*)$. 若 u 是 (4.1) 的凸解, 则 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{U} \cap \Omega_{\delta})$ 对于任意 $\delta > 0$ 都成立. 同时, $\mathcal{F} \in C^{2,\alpha}$.

上述定理表明 u 是以下 Monge-Ampère 方程自然边值问题的 C^2 解:

$$g(Du(x)) \det D^2 u(x) = f(x) \quad \text{在 } U \text{ 中}, \quad (4.2)$$

$$Du(U) = \Omega^*. \quad (4.3)$$

自由边界 $\mathcal{F} \subset \partial U$ 一般是非凸的, 且其已有的正则性只是 $C^{1,\alpha}$ 对某个 $\alpha \in (0, 1)$ 成立. 因此, 如果单独看边值问题 (4.2) 和 (4.3), 则不可能得到 u 在 $\mathcal{F}$ 附近的高阶正则性. 我们需要结合部分传输问题独特的结构来克服自由边界非凸性带来的困难. 在本文的证明中, 凸分析中一些基本且重要的性质发挥了关键作用. 第一个性质是, 若 v 是一个定义于整个 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数, 则 $\partial v(\mathbb{R}^n)$ 的闭包是一个凸集. 实际上, 在本文进行爆破分析时得到的极限函数正是定义于整个 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数. 第二个性是, 若 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸集包含一个 $n-2$ 维子空间, 则其分裂为 $\mathbb{R}^{n-2} \times \omega$, 这里 ω 是一个二维凸集. 这个性质可以看作是 Riemann 几何中 Cheeger-Gromoll 分裂定理的凸体情形.

5 若干值得考虑的问题

最优传输的正则性仍然有很多有意思的问题值得研究, 如对于定理 3.6 的结论, 在进一步假设区域光滑、密度函数光滑的条件下, 能不能用连续性方法来证明? 如果可以, 相应的方法也许会对研究

极小 Lagrange 图的边值问题有帮助 (参见文献 [2]). 对于一般成本函数, 以下两个问题也是最优传输领域里面的基本问题.

问题 5.1 对于满足 MTW 条件的成本函数, 能否建立类似于定理 3.6 的边界 $C^{2,\alpha}$ 正则性估计?

问题 5.2 对于满足 MTW 条件的成本函数, 对于相应的最优部分传输问题, 能否建立自由边界的高阶正则性?

参考文献

- 1 Arjovsky M, Chintala S, Bottou L. Wasserstein generative adversarial networks. In: Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning, vol. 70. PMLR, 2017, 70: 214–223
- 2 Brendle S, Warren M. A boundary value problem for minimal Lagrangian graphs. *J Differential Geom*, 2010, 84: 267–287
- 3 Brenier Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm Pure Appl Math*, 1991, 44: 375–417
- 4 Caffarelli L A. Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation. *Ann of Math (2)*, 1990, 131: 135–150
- 5 Caffarelli L A. Some regularity properties of solutions of Monge Ampère equation. *Comm Pure Appl Math*, 1991, 44: 965–969
- 6 Caffarelli L A. The regularity of mappings with a convex potential. *J Amer Math Soc*, 1992, 5: 99–104
- 7 Caffarelli L A. Boundary regularity of maps with convex potentials, II. *Ann of Math (2)*, 1996, 144: 453–496
- 8 Caffarelli L A, McCann R J. Free boundaries in optimal transport and Monge-Ampère obstacle problems. *Ann of Math (2)*, 2010, 171: 673–730
- 9 Chen S, Liu J, Wang X J. Boundary regularity for the second boundary-value problem of Monge-Ampère equations in dimension two. *arXiv:1806.09482*, 2018
- 10 Chen S, Liu J, Wang X J. Global regularity for the Monge-Ampère equation with natural boundary condition. *Ann of Math (2)*, 2021, 194: 745–793
- 11 Chen S, Liu J, Wang X J. $C^{2,\alpha}$ regularity of free boundary in optimal transport. *Comm Pure Appl Math*, 2024, 77: 731–794
- 12 Courty N, Flamary R, Tuia D, et al. Optimal transport for domain adaptation. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2017, 39: 1853–1865
- 13 De Philippis G, Figalli A. $W^{2,1}$ regularity for solutions of the Monge-Ampère equation. *Invent Math*, 2013, 192: 55–69
- 14 De Philippis G, Figalli A. Partial regularity for optimal transport maps. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 2015, 121: 81–112
- 15 De Philippis G, Figalli A, Savin O. A note on interior $W^{2,1+\varepsilon}$ estimates for the Monge-Ampère equation. *Math Ann*, 2013, 357: 11–22
- 16 Delanoë P. Classical solvability in dimension two of the second boundary-value problem associated with the Monge-Ampère operator. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1991, 8: 443–457
- 17 Figalli A. The optimal partial transport problem. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 195: 533–560
- 18 Figalli A, Kim Y H. Partial regularity of Brenier solutions of the Monge-Ampère equation. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2010, 28: 559–565
- 19 Gilbarg D, Trudinger N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer-Verlag, 2001
- 20 Indrei E. Free boundary regularity in the optimal partial transport problem. *J Funct Anal*, 2013, 264: 2497–2528
- 21 Kantorovich L V. On an effective method of solving certain classes of extremal problems. *Dokl Akad Nauk USSR*, 1940, 28: 212–215
- 22 Kantorovich L V. On the translocation of masses. *Dokl Akad Nauk USSR*, 1942, 37: 199–201
- 23 Kantorovich L V, Rubinshtein G S. On a space of totally additive functions. *Vestn Leningrad Univ*, 1958, 13: 52–59
- 24 Kolkin N I, Salavon J, Shakhnarovich G. Style transfer by relaxed optimal transport and self-similarity. In: 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Philadelphia: IEEE, 2019, 10043–10052
- 25 Loeper G. On the regularity of solutions of optimal transportation problems. *Acta Math*, 2009, 202: 241–283
- 26 Ma X N, Trudinger N S, Wang X J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. *Arch Ration Mech Anal*, 2005, 177: 151–183
- 27 McCann R J. Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps. *Duke Math J*, 1995, 80: 309–324

- 28 McCann R J. Polar factorization of maps on Riemannian manifolds. *Geom Funct Anal*, 2001, 11: 589–608
- 29 Monge G. Memoire sur la theorie des d’eblais et des remblais. *Hist IOAcad R Sci Paris*, 1781, 666–704
- 30 Santambrogio F. Optimal Transport for Applied Mathematicians, vol. 87. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Cham: Springer, 2015
- 31 Savin O, Yu H. Regularity of optimal transport between planar convex domains. *Duke Math J*, 2020, 169: 1305–1327
- 32 Schmidt T. $W^{2,1+\epsilon}$ estimates for the Monge-Ampère equation. *Adv Math*, 2013, 240: 672–689
- 33 Urbas J. On the second boundary value problem of Monge-Ampère type. *J Reine Angew Math*, 1997, 487: 115–124
- 34 Urbas J. A remark on minimal Lagrangian diffeomorphisms and the Monge-Ampère equation. *Bull Aust Math Soc*, 2007, 76: 215–218
- 35 Villani C. Topics in Optimal Transportation. *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 58. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 36 Villani C. Optimal Transport: Old and New. Berlin: Springer, 2006
- 37 Wang X J. Some counterexamples to the regularity of Monge-Ampère equations. *Proc Amer Math Soc*, 1995, 123: 841–845

Optimal transport problems with the squared distance cost function

Shibing Chen & Jiakun Liu

Abstract The squared distance function is one of the most important cost functions in optimal transport problem and has significant applications in many fields. In this paper, we briefly introduce the optimal transport problems under this cost function, including the existence, regularity, and partial regularity of solutions, as well as related free boundary problems.

Keywords optimal transport, free boundary, regularity

MSC(2020) 35J96, 35J25, 35B65

doi: 10.1360/SSM-2023-0248

An international forum for innovation
and development in mathematics



Sponsored by
Chinese Academy of Sciences (CAS)
National Natural Science Foundation of China (NSFC)

Mathematics



- Founded in 1950
- A monthly peer-reviewed mathematical journal
- Indexed by SCI, Math Review, zbMATH, MathSciNet, etc.
- Six months from submission to acceptance on average
- No limit to paper length
- Articles online first, available worldwide on Springer

Editor-in-Chief

Nanhua Xi

Academy of Mathematics and Systems Science, CAS, China

Associate Editors-in-Chief

Gui-Qiang G. Chen

University of Oxford, UK

Song Jiang

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, China

Qiman Shao

Southern University of Science and Technology, China

Weiping Zhang

Nankai University, China

Chuanming Zong

Tianjin University, China

CONTACT US:

E-mail: mathematics@scichina.com | Tel: +86-10-64016232 | Fax: +86-10-64016350

Address: 16 Donghuangchenggen North Street, Beijing 100717, China

