整函数与其二次迭代周期性之间关系的 Gross 问题

献给杨乐教授 80 华诞

李玉华¹, 乔建永^{2*}

1. 云南师范大学数学学院, 昆明 650500;

2. 北京邮电大学理学院, 北京 100876

E-mail: liyuhua@ynnu.edu.cn, qjy@bupt.edu.cn

收稿日期: 2019-01-28; 接受日期: 2019-06-25; 网络出版日期: 2019-09-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11761081) 资助项目

摘要 1972 年, Gross 提出了下述有趣的问题: 如果 $f(z)$ 是非常数整函数, 而且 $f(f(z))$ 是周期函数, 那么 $f(z)$ 一定也是周期函数吗? 关于这一问题, 本文证明了如下结果: 如果 $f(z)$ 是非常数整函数, $f(f(z))$ 是以 τ 为周期的周期函数, 且 $f'(z+n\tau)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 在复平面 $\mathbb{C}$ 上不局部一致收敛于 0, 则 $f(z)$ 也是周期函数.

关键词 整函数 迭代 周期性 正规族

MSC (2010) 主题分类 30D05, 30D35

1 引言及主要结果

1965 年, Rényi 和 Rényi^[1] 证明了如下结果:

定理 1.1 若 $f(z)$ 是非常数整函数, $P(z)$ 是次数不小于 3 的多项式, 则 $f(P(z))$ 不是周期函数. 另一方面, Baker^[2] 和 Gross^[3] 分别独立地证明了下述结果:

定理 1.2 如果 $f(z)$ 是非常数整函数, 其增长级严格小于 $1/2$, 而 $g(z)$ 是整函数, 则 $f(g(z))$ 是周期函数的充分必要条件是, $g(z)$ 是周期函数.

根据定理 1.1 和 1.2, Gross^[4] 提出了下述公开问题: 如果 $f(z)$ 是整函数, 而且 $f^{\circ 2}(z)$ 是周期函数, 那么 $f(z)$ 一定也是周期函数吗? 关于该问题可参见文献 [5]. 这里的 $f^{\circ 2}(z)$ 表示 $f(z)$ 的 2 次迭代. 一般地, 对于整函数 $f(z)$ 和正整数 n , 我们将 $f(z)$ 的 n 次迭代简记为 $f^{\circ n}(z)$.

在 Baker 和 Gross 关于定理 1.2 的证明中, 起关键作用的是 Wiman 的 $\cos \pi \rho$ -定理, 遗憾的是, $\cos \pi \rho$ -定理对于增长级不小于 $1/2$ 的整函数失效. 事实上, 对于 $f(z)$ 的增长级不小于 $1/2$ 的情形, 定

英文引用格式: Li Y H, Qiao J Y. The Gross' problem concerning periodicity relation between the entire function and its second iteration (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1395–1404, doi: 10.1360/N012019-00034

理 1.2 的结论一般不成立. 例如, 对于整函数 $f(z) = \cos \sqrt{z}$ 和 $g(z) = z^2$ 而言, $f(g(z)) = \cos z$ 是周期整函数, 而 $g(z) = z^2$ 不是周期函数, 整函数 $f(z)$ 的增长级等于 $1/2$. 由于非常数的周期整函数的增长级总是不小于 1 的, 所以不能用定理 1.2 的证明方法处理 Gross 提出的上述公开问题. 上述的 Gross 问题迄今已有四十多年的历史, 关于其研究工作, 长期以来一直没有进展. 对于这一问题, 本文将证明如下结果:

定理 1.3 如果 $f(z)$ 是非常数整函数, $f(f(z))$ 是以 τ 为周期的周期函数, 且 $f'(z+n\tau)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 在复平面上不局部一致收敛于 0, 则 $f(z)$ 一定也是周期函数.

2 几个记号和辅助结果

为了证明定理 1.3, 本节先作一些必要的准备, 对几个概念进行回顾, 并介绍几个符号和辅助结果.

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 的一个子区域, $f_n(z)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 是 D 上的一个解析函数列, 在区域 D 上 $g(z)$ 解析或 $g(z) \equiv \infty$, 那么将 $f_n(z)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 在 Euclid 度量下于 D 上局部一致收敛到 $g(z)$ 简记为

$$f_n(z) \xrightarrow{\text{Loc}} g(z) \quad (n \rightarrow \infty, \quad z \in D).$$

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 的一个子区域, $\mathcal{F}$ 是由 D 上的某些解析函数构成的函数族. 如果对于取自 $\mathcal{F}$ 中的任意一个函数列 $f_n(z)$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 总是相应存在其某个子列 $f_{n_k}(z)$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 在 D 上按球面距离局部一致收敛到 D 上的某函数 $g(z)$ (这里的 $g(z)$ 可以在 D 上恒等于 ∞), 则称 $\mathcal{F}$ 是 D 上的一个正规的解析函数族; 设 z_0 为 D 内一点, 如果存在 z_0 的邻域 $U(z_0)$ ($\subset D$) 使得 $\mathcal{F}$ 在 $U(z_0)$ 上正规, 则称 $\mathcal{F}$ 在点 z_0 处正规. 易见, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规的充分必要条件是, $\mathcal{F}$ 在 D 的每一点处都正规 (参见文献 [6]).

引理 2.1 [7] 设 $\mathcal{F}$ 是某些整函数构成的一个函数族, z_0 是复平面 $\mathbb{C}$ 内的一个点, 则 $\mathcal{F}$ 在点 z_0 处不正规的充分必要条件是, 对于任意的 $\alpha \in (-1, +\infty)$, 相应存在 $\mathcal{F}$ 中的函数列 $f_n(z)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)、 D 中的点列 z_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 和正数列 ρ_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 以及增长级不大于 1 的非常数整函数 $g(z)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$, 而且

$$\rho_n^\alpha f_n(z_n + \rho_n z) \xrightarrow{\text{Loc}} g(z) \quad (n \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}).$$

注 2.1 上述的引理 2.1 仅是文献 [7] 中主要引理 (即 Zalcman 引理推广形式) 的特殊情形.

下述的引理 2.2 是由 Fuchs 于 1981 年证明的 Phragmén-Lindelöf 型定理.

引理 2.2 [8] 设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 的一个无界子区域, 其有限边界部分 Γ 至少含有一个点. 再设 $f(z)$ 在 D 内解析, 并且对于每一个有限边界点 $\zeta \in \Gamma$ 均有

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in D}} |f(z)| \leq 1,$$

则在下述三种可能性中, 必有一种且仅有一种可能性发生:

- (1) 对于任意的 $z \in D$ 均有 $|f(z)| \leq 1$;
- (2) 无穷远点 ∞ 是 $f(z)$ 的一个极点;
- (3) $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log M\{D \cap (|z|=r), f\}}{\log r} = +\infty$,

其中, 对于充分大的正数 r , $M\{D \cap (|z|=r), f\} := \max\{|f(z)| : z \in D, |z|=r\}$.

引理 2.3^[9] 设 $f(z)$ 、 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 是三个整函数, 如果它们满足 $f(\alpha(z)) \equiv f(\beta(z))$, 而且存在点 $z_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $\alpha(z_0) = \beta(z_0)$, $f'(\alpha(z_0)) \neq 0$, 则在 $\mathbb{C}$ 中一定有 $\alpha(z) \equiv \beta(z)$.

除了上述几个引理以外, 为了简化定理 1.3 的证明, 我们还需要先证明如下的两个引理:

引理 2.4 如果 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是两个非常数整函数, 则对于任意的 $z_0 \in \mathbb{C}$, 在 $\mathbb{C}$ 中存在点 c 和 z_0^* , 使得 $\phi(z_0^*) - c = 0$, 而且 $\psi^{\circ 3}(z_0) - \psi^{\circ 2}(c) \neq 0$.

证明 对于任意预先给定的 $z_0 \in \mathbb{C}$, 由于 $\phi(z)$ 至多具有一个有穷的 Picard 例外值, 而且 $\psi^{\circ 3}(z_0) - \psi^{\circ 2}(z)$ 零点集合至多是可数集, 所以, $\mathbb{C}$ 中存在点 c 和 z_0^* , 使得 $\phi(z_0^*) - c = 0$, 而且 $\psi^{\circ 3}(z_0) - \psi^{\circ 2}(c) \neq 0$. 引理 2.4 证毕. $\square$

引理 2.5 设 $g(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数, 它在复平面中的上半平面 $\mathcal{H}^+$ 上无界, D 是复平面 $\mathbb{C}$ 的一个无界子区域. 如果 $\Im z \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow \infty, z \in D$), 而且在 D 中存在每一条都是平行于实轴的线段组成的序列 Γ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf \{\Im z : z \in \Gamma_n\}) = +\infty$, 并且对充分大的正整数 n , 总有 $\sup \{\Re z : z \in \Gamma_n\} - \inf \{\Re z : z \in \Gamma_n\} \geq 2$, 则 $g(z)$ 在 D 上无界.

证明 由于 $g(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数, 它在复平面中的上半平面 $\mathcal{H}^+$ 上无界, 所以, $g(z)$ 必定是超越整函数, 它以无穷远点 ∞ 为本性奇点. 令 $B_0 := \max\{|g(x)| : -2 \leq x \leq 2\}$, 则 B_0 是有限正数, 而且 $|g(z)| \leq B_0$ ($\forall z \in \partial \mathcal{H}^+$). 现在对 $g(z)/B_0$ 在 $\mathcal{H}^+$ 上应用引理 2.2 可得

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log M\{\mathcal{H}^+ \cap \{|z| = r\}, g\}}{\log r} = +\infty. \quad (2.1)$$

令 $G(z) := g(z)/(z + i)$ ($z \in \mathbb{C}$), 则 $G(z)$ 至多在点 i 处不解析 (i 可能是 $G(z)$ 的极点), 且 $|G(z)| \leq B_0$ ($\forall z \in \partial \mathcal{H}^+$). 又由上述的 (2.1) 可推知, $G(z)$ 在 $\mathcal{H}^+$ 上无界. 从而, 对于任意预先给定的正数 $A > B_0 + 1$, $D_A := \{z : \Im z > 0, |G(z)| > A\}$ 是 $\mathcal{H}^+$ 的非空开子集, 由此以及解析函数最大模原理可知, D_A 的每一个分支 (即 D_A 的每一个最大连通开子集) 都是无界的单连通区域. 现在取定 D_A 的一个分支 $\tilde{D}_{A,1}$, 则

$$g(z) \geq A|z + i| \quad (\forall z \in \tilde{D}_{A,1}). \quad (2.2)$$

又因为 $\tilde{D}_{A,1} \subset \mathcal{H}^+$ 且 $g(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数, 由此并结合上述的 (2.2) 可知, 对于 $\tilde{D}_{A,1}$ 内任意预先取定的一点 z_0 , 在 $\tilde{D}_{A,1}$ 内存在一条从 z_0 出发延伸至 ∞ 的曲线 γ 使得 $\Im z \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow \infty, z \in \gamma$). 于是对于充分大的正整数 n , 在 γ 和 Γ_n 上分别存在点 z'_n 和 z''_n 使得 $z''_n - z'_n$ 是整数, 进而有 $z''_n \in \Gamma_n \subset D$, 且 $|g(z''_n)| = |g(z'_n)| \geq A|z'_n + i| \geq A$.

故 $g(z)$ 在 D 上无界. 引理 2.5 证毕. $\square$

注 2.2 将引理 2.5 中的上半复平面 $\mathcal{H}^+$ 变更为下半复平面 $\mathcal{H}^-$, 而将条件 $\Im z \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow \infty, z \in D$) 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf \{\Im z : z \in \Gamma_n\}) = +\infty$ 分别变更为 $\Im z \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow \infty, z \in D$) 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup \{\Im z : z \in \Gamma_n\}) = -\infty$, 其余条件不变, 该引理的结论仍然成立.

3 定理 1.3 的证明

由于 $f^{\circ 2}(z)$ 是以 τ ($\neq 0$) 为周期的周期整函数, 令 $g(z) := \frac{1}{\tau} f(\tau z)$, 则 $g^{\circ 2}(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数, 而且显然有 $g(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数蕴含 $f(z)$ 是以 τ 为周期的周期整函数. 鉴于此, 不失一般性, 不妨假设 $f^{\circ 2}(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数. 于是有

$$f^{\circ 2}(z+1) \equiv f^{\circ 2}(z). \quad (3.1)$$

现在考虑如下的整函数族:

$$\mathcal{F} := \{F_n(z) = f(z+n) : n = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.2)$$

下面区分两种情形进行讨论.

情形 1 $\mathcal{F}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上不正规.

在该情形, 必存在 $\mathbb{C}$ 中的一点 z_0 , 使得 $\mathcal{F}$ 在点 z_0 处不正规. 于是, 由引理 2.1 可知, 存在由某些正整数构成的严格递增的数列 n_k ($k = 1, 2, 3, \dots$)、正数列 ρ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$)、复数列 z_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) 和非常数整函数 $H(z)$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0, \quad (3.3)$$

且

$$F_{n_k}(z_k + \rho_k z) = f(z_k + \rho_k z + n_k) \xrightarrow{\text{Loc}} H(z) \quad (k \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.4)$$

于是, 由 (3.1) 和 (3.4) 得

$$f^{\circ 2}(z_k + \rho_k z + n_k) \xrightarrow{\text{Loc}} f(H(z)) \quad (k \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.5)$$

再由 (3.3) 和 (3.5) 得 $f(H(z)) \equiv f^{\circ 2}(z_0)$ ($z \in \mathbb{C}$), 这显然是不可能的, 这是因为 $f(z)$ 和 $H(z)$ 均为非常数整函数.

情形 2 $\mathcal{F}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上正规.

在这一情形, 我们又区分两种子情形进行讨论.

子情形 2.1 存在由某些正整数构成的严格递增的数列 n_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) 和整函数 $h(z)$, 使得

$$f(z + n_k) \xrightarrow{\text{Loc}} h(z) \quad (k \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.6)$$

由 (3.1) 和 (3.6) 得 $f^{\circ 2}(z) \equiv f(h(z))$ ($z \in \mathbb{C}$), 所以, $h(z)$ 是非常数整函数, 于是,

$$E := \{z : f'(z) = 0 \text{ 或者 } z \text{ 是 } h(z) \text{ 的有穷的 Picard 例外值}\}$$

至多是一个可数集. 于是存在点 $\tilde{c} \in \mathbb{C} \setminus E$ 和 $\tilde{z}_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $f'(\tilde{c}) \neq 0$, 且 $h(\tilde{z}_0) = \tilde{c}$. 由此和 (3.6) 以及 Hurwitz 定理可知, 存在正整数 k_0 , 使得当整数 $k \geq k_0$ 时, 相应存在 $\tilde{z}_k \in \mathbb{C}$, 使得

$$f(\tilde{z}_k + n_k) = \tilde{c} \quad (k \geq k_0), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_k = \tilde{z}_0. \quad (3.7)$$

由 (3.1) 和 (3.7) 可得 $f^{\circ 2}(\tilde{z}_k) = f(\tilde{c})$ ($k \geq k_0$) 且 $f^{\circ 2}(\tilde{z}_0) = f(\tilde{c})$. 于是, 存在正整数 k_0^* ($\geq k_0$), 使得 $\tilde{z}_k = \tilde{z}_0$ ($k \geq k_0^*$). 由此并结合 (3.7) 得

$$f(\tilde{z}_0 + n_k) = \tilde{c} = f(\tilde{z}_0 + n_{k+1}) \quad (k \geq k_0^*). \quad (3.8)$$

另一方面, 由 (3.1) 得

$$f(f(z + n_k)) \equiv f(f(z + n_{k+1})) \quad (z \in \mathbb{C}, \quad k \geq k_0^*). \quad (3.9)$$

又因为 $f'(f(\tilde{z}_0 + n_k)) = f'(\tilde{c}) \neq 0$ ($k \geq k_0^*$), 由此和 (3.8)、(3.9) 以及引理 2.3 可得

$$f(z + n_k) \equiv f(z + n_{k+1}) \quad (z \in \mathbb{C}, \quad k \geq k_0^*). \quad (3.10)$$

由 (3.10) 可知, $f(z)$ 是周期函数.

子情形 2.2 对于 $\mathbb{C}$ 中的任意一点 z_0 , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_0 + n) = \infty. \quad (3.11)$$

由于 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{C}$ 中正规, 由此和 (3.11) 可得

$$f(z + n) \xrightarrow{\text{Loc}} \infty \quad (n \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.12)$$

对于任意预先给定的充分大的正数 A , 令

$$\Omega_A := \{z : \Re z \geq 0, |\Im z| < A\}.$$

由 (3.12) 得到

$$f(z) \xrightarrow{\text{Loc}} \infty \quad (\Re z \rightarrow +\infty, \quad z \in \Omega_A). \quad (3.13)$$

下面又进一步区分两种子情形进行讨论.

子情形 2.2.1 存在正数 A_0 和 $M(A_0)$, 使得 Ω_{A_0} 中存在点列 z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n = +\infty$, 而且

$$-M(A_0) < \Im f(z_n) < M(A_0) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.14)$$

现在定义

$$S_{A_0} := \{z : |\Im z| \leq A_0, 0 \leq \Re z < 1\}, \quad (3.15)$$

则对于任意的正整数 n , 相应存在 S_{A_0} 中的点 $\hat{z}_n$ 和非负整数 k_n 使得

$$z_n = k_n + \hat{z}_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty. \quad (3.16)$$

于是点列 $\hat{z}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 在 $\bar{S}_{A_0}$ 上至少有一个聚点 $\hat{z}_0$. 不失一般性, 不妨假设

$$\hat{z}_n \rightarrow \hat{z}_0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.17)$$

令

$$a_n := [\Re f(k_n + \hat{z}_n)] = [\Re f(z_n)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.18)$$

这里以及下文中, 对于实数 x , 符号 $[x]$ 总是表示不超过 x 的最大整数.

现在考察如下的整函数族:

$$\hat{\mathcal{F}} := \{f(z + k_n) - a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.19)$$

如果 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{C}$ 的某点 z^* 处不正规, 则由引理 2.1 知, 存在严格递增的正整数列 n_j ($j = 1, 2, 3, \dots$)、复数列 z_j^* ($j = 1, 2, 3, \dots$)、正数列 t_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) 和非常数整函数 $\tilde{H}(z)$ 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} z_j^* = z^*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} t_j = 0, \quad (3.20)$$

且

$$f(z_j^* + t_j z + k_{n_j}) - a_{n_j} \xrightarrow{\text{Loc}} \tilde{H}(z) \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.21)$$

从而, 由引理 2.4 可知, 存在复数 $\tilde{c}$ 和 z^{**} , 使得 $\tilde{H}(z^{**}) - \tilde{c} = 0$, 且

$$f^{\circ 3}(z^*) - f^{\circ 2}(\tilde{c}) \neq 0. \quad (3.22)$$

由 (3.21) 得

$$f(z_j^* + t_j z + k_{n_j}) - a_{n_j} - \tilde{c} \xrightarrow{\text{Loc}} \tilde{H}(z) - \tilde{c} \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}).$$

于是, 由 Hurwitz 定理知, 存在正整数 $N_0 > 0$, 当整数 $j \geq N_0$ 时, 存在 $w_j \in \mathbb{C}$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} w_j = z^{**}$, 而且

$$f(z_j^* + t_j w_j + k_{n_j}) - a_{n_j} = \tilde{c} \quad (j \geq N_0).$$

由上式和 (3.1) 得

$$f^{\circ 3}(z_j^* + t_j w_j) = f^{\circ 2}(\tilde{c}) \quad (j \geq N_0). \quad (3.23)$$

在 (3.23) 中令 $j \rightarrow \infty$, 即可得到 $f^{\circ 3}(z^*) - f^{\circ 2}(\tilde{c}) = 0$. 这与 (3.22) 的结论相矛盾.

所以, $\hat{f}$ 在 $\mathbb{C}$ 中正规, 特别地, $\hat{f}$ 在点 $\hat{z}_0$ 处正规. 又因为点列 $f(\hat{z}_n + k_n) - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 有界, 而且 $\hat{z}_n \rightarrow \hat{z}_0$ ($n \rightarrow \infty$), 从而存在严格递增的正整数列 m_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) 和整函数 $\psi(z)$, 使得

$$f(z + k_{m_j}) - a_{m_j} \xrightarrow{\text{Loc}} \psi(z) \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.24)$$

由 (3.1) 和 (3.24) 得 $f^{\circ 3}(z) \equiv f^{\circ 2}(\psi(z))$ ($z \in \mathbb{C}$), 所以, $\psi(z)$ 是非常数整函数. 类似于子情形 2.1 中的讨论, 可以推知, 存在复数 w_0 和 γ , 使得

$$\psi(w_0) - \gamma = 0 \quad \text{且} \quad (f^{\circ 2})'(\gamma) \neq 0.$$

故由 Hurwitz 定理和 (3.24) 可知, 存在正整数 j_0 , 使得当整数 $j \geq j_0$ 时, 相应存在复数 w_j , 使得

$$f(w_j + k_{m_j}) - a_{m_j} = \gamma \quad (j \geq j_0), \quad \lim_{j \rightarrow \infty} w_j = w_0. \quad (3.25)$$

由 (3.1) 和 (3.25) 得

$$f^{\circ 3}(w_j) = f^{\circ 2}(\gamma) \quad (j \geq j_0), \quad f^{\circ 3}(w_0) = f^{\circ 2}(\gamma).$$

于是, 对于充分大的正整数 j , 都有 $w_j = w_0$. 不失一般性, 不妨假设 $w_j = w_0$ ($j \geq j_0$). 由此并结合 (3.25) 可得

$$f(w_0 + k_{m_j}) - a_{m_j} = \gamma = f(w_0 + k_{m_{j+p}}) - a_{m_{j+p}} \quad (j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots),$$

且

$$f^{\circ 2}(f(w_0 + k_{m_j}) - a_{m_j}) = f^{\circ 2}(\gamma) = f^{\circ 2}(f(w_0 + k_{m_{j+p}}) - a_{m_{j+p}}) \quad (j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.26)$$

另一方面, 根据 (3.1) 可得

$$f^{\circ 2}(f(z + k_{m_j}) - a_{m_j}) \equiv f^{\circ 2}(f(z + k_{m_{j+p}}) - a_{m_{j+p}}) \quad (z \in \mathbb{C}, \quad j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.27)$$

注意到 $(f^{\circ 2})'(\gamma) \neq 0$, 由此并结合 (3.25)–(3.27) 和引理 2.3 可推出

$$f(z + k_{m_j}) - a_{m_j} \equiv f(z + k_{m_{j+p}}) - a_{m_{j+p}} \quad (z \in \mathbb{C}, \quad j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.28)$$

由 (3.1) 和 (3.28) 可推知,

$$f(z + k_{m_{j+p}}) - (a_{m_{j+p}} - a_{m_j}) \equiv f(z + k_{m_j}) \quad (z \in \mathbb{C}, \quad j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots).$$

上式蕴含

$$f(z + k_{m_{j+p}} - k_{m_j}) - (a_{m_{j+p}} - a_{m_j}) \equiv f(z) \quad (z \in \mathbb{C}, \quad j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots).$$

从而有

$$\begin{aligned} & f(f(z + k_{m_{j+p}} - k_{m_j}) - (a_{m_{j+p}} - a_{m_j})) \\ & \equiv f(f(z)) \\ & \equiv f(f(z + k_{m_{j+p}} - k_{m_j})) \quad (z \in \mathbb{C}, \quad j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.29)$$

由 (3.29) 可得

$$f(z - (a_{m_{j+p}} - a_{m_j})) \equiv f(z) \quad (z \in \mathbb{C}, \quad j \geq j_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.30)$$

由 (3.12)、(3.14)、(3.16) 和 (3.18) 可知, 存在充分大的正整数 p , 使得 $a_{m_{j_0}} - a_{m_{j_0+p}} \neq 0$. 由此和 (3.30) 可知, $f(z)$ 是周期整函数.

子情形 2.2.2 对于任意给定的正数 A , 都有

$$\Im f(z) \rightrightarrows +\infty \quad (\Re z \rightarrow +\infty, \quad z \in \Omega_A) \quad \text{或者} \quad \Im f(z) \rightrightarrows -\infty \quad (\Re z \rightarrow +\infty, \quad z \in \Omega_A).$$

这里仅考虑第一种情形 (关于第二种情形的讨论与第一种情形完全类似). 于是可设

$$\Im f(z) \rightrightarrows +\infty \quad (\Re z \rightarrow +\infty, \quad z \in \Omega_A). \quad (3.31)$$

令 $B_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{\circ 3}(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{\circ 2}(x)|$, 于是由 (3.1) 可得

$$|f^{\circ 3}(x)| \leq B_0 \quad (\forall x \in (-\infty, +\infty)). \quad (3.32)$$

易见, 存在 $r_0 \geq 0$, 使得

$$M(r_0, f^{\circ 3}) > 6(B_0 + 1). \quad (3.33)$$

于是, 由解析函数的最大模原理和 (3.1) 可知, 对任意的正整数 n 都有

$$\max_{z \in U_{2r_0}} |f^{\circ 3}(z+n)| \geq M(r_0, f^{\circ 3}) > 6(B_0 + 1), \quad (3.34)$$

其中 $U_{2r_0} := \{z : 0 \leq \Re z \leq 1, |\Im z| \leq 2r_0\}$.

由 (3.1)、(3.31)、(3.32)、(3.34) 和引理 2.2 可得 $f^{\circ 2}(z)$ 在复平面中的上半平面中无界. 如果存在正实数 $\hat{r}_0$, 使得 $\Re f(z)$ 在 $\Omega_{\hat{r}_0}$ 中无界, 则在 $\Omega_{\hat{r}_0}$ 中存在点列 z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 使得实数列 $\Re z_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 和 $|\Re f(z_n)|$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 都严格递增趋于 $+\infty$. 因此, 在 $\Omega_{\hat{r}_0}$ 内存在一条以 z_1 为起点从左至右依次通过 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, 并延伸至 ∞ 的简单曲线 γ , 使得 γ 上无 $f'(z)$ 的零点, 而且当点 z 在 γ 上从左至右运动时, 相应的 $\Re z$ 随之递增. 由以上事实和 (3.31) 可知, 在区域 $f(\Omega_{\hat{r}_0})$ 中存在满足引理 2.5 中条件的线段序列 Γ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). 于是, 结合 (3.1) 和引理 2.5 可知, $f^{\circ 2}(z)$ 在 $f(\Omega_{\hat{r}_0})$ 上无界, 即 $f^{\circ 3}(z)$ 在 $\Omega_{\hat{r}_0}$ 上无界, 这显然是不可能的 (因为 $f^{\circ 3}(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数). 所以, 对于任意的 $r > 0$, 相应存在 $B_1 = B_1(r) > 0$, 使得

$$|\Re f(z)| \leq B_1 \quad (\forall z \in \Omega_r). \quad (3.35)$$

对于任意预先给定的正数 r' 和 r'' , 令 $U_{r', r''} := \{z : |\Im z| \leq r', \Re z \geq r''\}$, 且

$$\tilde{L}(r', r'') := \inf_{z \in U_{r', r''}} \{\Re f(z)\}, \quad \tilde{R}(r', r'') := \sup_{z \in U_{r', r''}} \{\Re f(z)\}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{W}(r') := \limsup_{r'' \rightarrow +\infty} \{\tilde{R}(r', r'') - \tilde{L}(r', r'')\}, \quad (3.37)$$

$$W := \lim_{r' \rightarrow +\infty} \tilde{W}(r'). \quad (3.38)$$

下面再细分两种情形进行进一步的讨论:

子情形 2.2.2.1 $W \geq 8$.

在这一子情形, 一定存在正数 r'_0 使得 $\tilde{W}(r'_0) > 7$, 由此和 (3.37) 可知, 存在严格递增的无界正数列 $\{r''_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\tilde{R}(r'_0, r''_n) - \tilde{L}(r'_0, r''_n) > 6 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.39)$$

由 (3.31) 和 (3.37) 可知, 在 $f(\{z : |\Im z| \leq r'_0, \Re z \geq 0\})$ 中存在一个 Jordan 弧序列 Γ_{n_j} ($j = 1, 2, 3, \dots$), 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\inf_{z \in \Gamma_j} \Im z \right) = +\infty \quad \text{且} \quad \sup\{\Re z : z \in \Gamma_{n_j}\} - \inf\{\Re z : z \in \Gamma_{n_j}\} > 4 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.40)$$

注意到 $f^{\circ 2}(z)$ 在复平面中的上半平面上无界, 由此和已知条件并结合 (3.1)、(3.31)、(3.40) 和引理 2.5 可知,

$$f^{\circ 3}(\{z : |\Im z| \leq r'_0, \Re z \geq 0\})$$

是一个无界集合. 这是不可能的, 那是因为 $f^{\circ 3}(z)$ 是以 1 为周期的周期整函数.

子情形 2.2.2.2 $W < 8$.

进一步考察如下的整函数族:

$$\mathcal{T}^{**} := \{f'(z+n) : n = 1, 2, 3, \dots\} \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (3.41)$$

如果 $\mathcal{T}^{**}$ 在 $\mathbb{C}$ 中某点 z^* 处不正规, 则由引理 2.1 知, 存在非常数整函数 $\lambda(z)$ 、严格递增的正整数列 n_j ($j = 1, 2, 3, \dots$)、复数列 z_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) 和正数列 $\{t_j\}_{j=1}^\infty$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^*$, 而且

$$t_j f'(z_j + t_j z + n_j) \xrightarrow{\text{Loc}} \lambda(z) \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.42)$$

从而有

$$f(z_j + t_j z + n_j) - f(z_j + n_j) \xrightarrow{\text{Loc}} \int_0^z \lambda(w) dw \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.43)$$

由 Picard 定理、代数基本定理和 (3.43) 可知, 存在点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $\Re \int_0^{z_0} \lambda(w) dw > 10$, 从而存在无穷多个正整数 j 使得 $\Re f(z_j + t_j z_0 + n_j) - \Re f(z_j + n_j) > 9$, 进而有 $W > 9$, 这与前提条件 $W \leq 8$ 矛盾. 故 $\mathcal{T}^{**}$ 在 $\mathbb{C}$ 上正规.

对于 $\mathcal{T}^{**}$ 中的任意预先给定的在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛的函数列 $f'(z + n_j)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), 我们断言

$$f'(z + n_j) \xrightarrow{\text{Loc}} 0 \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}).$$

为了证明上述断言, 考虑整函数族

$$\tilde{\mathcal{T}}^{**} := \{\phi_j(z) = f(z + n_j) - i[\Im f(n_j)] : j = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.44)$$

如果 $\tilde{\mathcal{T}}^{**}$ 在 $\mathbb{C}$ 中某点 z^{**} 处不正规, 则由引理 2.1 可知, 存在非常数整函数 $\lambda^*(z)$ 、复数列 z_k ($k = 1, 2, 3, \dots$)、正数列 ρ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) 以及 n_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) 的子列 n_{j_k} ($k = 1, 2, 3, \dots$), 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z^{**},$$

而且

$$\phi_{j_k}(z_k + \rho_k z) := f(z_k + \rho_k z + n_{j_k}) - i[\Im f(n_{j_k})] \xrightarrow{\text{Loc}} \lambda^*(z) \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.45)$$

由 Picard 定理、代数基本定理和 (3.45) 可推知, $W > 9$. 这也与前提条件 $W \leq 8$ 相矛盾. 故 $\tilde{\mathcal{T}}^{**}$ 必定在 $\mathbb{C}$ 上正规.

又由 (3.35) 可知, 数列

$$\phi_j(0) = f(n_j) - i[\Im f(n_j)] \quad (j = 1, 2, \dots)$$

有界. 于是存在整函数 $\psi(z)$ 以及 $\phi_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots$) 的子列 $\phi_{j_m}(z)$ ($m = 1, 2, \dots$), 使得

$$\phi_{j_m}(z) = f(z + n_{j_m}) - i[\Im f(n_{j_m})] \xrightarrow{\text{Loc}} \psi(z) \quad (m \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.46)$$

由于 $W < 8$, 故由 (3.46)、Picard 定理以及代数基本定理可知, $\psi(z)$ 一定是常数函数. 于是有

$$f'(z + n_{j_m}) \xrightarrow{\text{Loc}} 0 \quad (m \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.47)$$

又因为 $f'(z + n_j)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) 在 $\mathbb{C}$ 中局部一致收敛, 于是, 由此和 (3.47) 可得

$$f'(z + n_j) \xrightarrow{\text{Loc}} 0 \quad (j \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}). \quad (3.48)$$

这就完成了上述断言的证明. 故结合 $\mathcal{T}^{**}$ 在 $\mathbb{C}$ 上正规, 可得

$$f'(z+n) \stackrel{\text{Loc}}{\rightrightarrows} 0 \quad (n \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}).$$

这与定理条件矛盾. 定理 1.3 证毕.

致谢 在尊敬的杨乐先生 80 华诞之际, 衷心感谢杨先生对我们多年的培养和鼓励. 感谢审稿人提出的极有价值的修改建议.

参考文献

- 1 Rényi A, Rényi C. Some remarks on periodic entire functions. *J Anal Math*, 1965, 14: 303–310
- 2 Baker I N. On some results of A. Rényi and C. Rényi concerning periodic entire functions. *Acta Sci Math (Szeged)*, 1966, 27: 197–200
- 3 Gross F. On factorization of meromorphic functions. *Trans Amer Math Soc*, 1968, 131: 215–222
- 4 Gross F. *Factorization of Meromorphic Functions*. Washington: U.S. Government Printing Office, 1972
- 5 杨重骏, 宋国栋, 何育赞. 亚纯函数因子分解理论及其研究问题. *数学进展*, 1991, 20: 142–151
- 6 Yang L. *Value Distribution Theory*. Berlin-Heidelberg-Beijing: Springer-Verlag and Science Press, 1993
- 7 Zalcman L. Normal families: New perspectives. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1998, 35: 215–230
- 8 Fuchs W H J. A Phragmén-Lindelöf theorem conjectured by D. J. Newman. *Trans Amer Math Soc*, 1981, 267: 285–293
- 9 Gross F. On the periodicity of compositions of entire functions. *Canad J Math*, 1966, 18: 724–730

The Gross' problem concerning periodicity relation between the entire function and its second iteration

Yuhua Li & Jianyong Qiao

Abstract In 1972, Gross posed the following interesting open problem: if $f(z)$ is an entire function, and $f^{\circ 2}(z)$ is periodic, must $f(z)$ also be periodic? In this paper, we prove the following result concerning this problem: if $f(z)$ is a nonconstant entire function, $f^{\circ 2}(z)$ is a periodic function with period τ , and $f'(z+n\tau)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) does not converge locally uniformly to 0 in the complex plane, then $f(z)$ is also periodic.

Keywords entire function, iteration, periodicity, normal family

MSC(2010) 30D05, 30D35

doi: 10.1360/N012019-00034