

基于极限应力状态条件的主动土压力解析

刘光秀^{1,2}, 党发宁¹, 王旭¹, 李玉根²

(1. 西安理工大学 岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2. 榆林学院 建筑工程学院, 陕西 榆林 719000)

摘要: 为探究非光滑的挡土墙主动土压力分布特征及墙后土体处于主动极限平衡状态时的应力状态, 以墙后无黏性土为研究对象, 建立极限应力状态条件下挡土墙的主动土压力计算方法。首先, 假定当滑动土楔处于极限平衡状态时, 滑裂面、墙土界面处的土体单元及楔体内部单元都达到极限应力状态, 及土楔中小主应力传递为圆弧形主应力迹线。基于上述假定, 将滑动土楔沿最小主应力迹线分层为若干个圆弧形薄层单元, 继而利用静力平衡对该薄层单元进行受力分析, 推导出极限应力状态下挡土墙的主动土压力。分析墙土摩擦角 δ 对主动土压力的分布形式、大小、合力作用点及对墙底的倾覆力矩的影响规律, 并与 Coulomb 等土压力理论进行比较。理论分析结果表明: (1) 主动土压力 σ_w 随深度呈凸形非线性分布, 挡土墙背的粗糙度, 即墙土摩擦角 δ 的取值, 对非线性分布形式有显著影响。当挡土墙背光滑($\delta = 0^\circ$)时, 土压力分布退化为 Coulomb 直线分布; 随着墙土摩擦角的增加, 土压力分布曲线逐渐左移, 曲线的拐点位置升高, 非线性效应愈加明显。(2) 随着墙土摩擦角的增大, 主动土压力的合力逐渐减小, 合力作用点的位置受非线性分布的影响而逐渐提升, 对墙底的倾覆力矩先减小后增加。(3) 极限应力状态条件下挡土墙的主动土压力的合力是 Coulomb 土压力合力的外包络线, 基于 Mohr-Coulomb 强度理论, 推论出滑动土楔体处于极限平衡状态时内部单元的应力状态为: 挡土墙背光滑($\delta = 0^\circ$), 滑动土楔体内部单元为极限应力状态, 即为经典的 Rankine 土压力理论; 挡土墙背粗糙($\delta > 0^\circ$)时, 滑动土楔体内部单元已进入塑性-破坏应力状态, 并随着挡土墙背粗糙度的增加, 塑性状态越显著。(4) 极限应力状态条件下的主动土压力为主动土压力的塑性上限解, Coulomb 土压力为塑性下限解。最后, 通过数值模拟与实例验证本文方法的可行性与合理性。

关键词: 土力学; 主动土压力; 挡土墙; 主应力迹线; 非线性分布; 极限应力状态

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2024)11-2832-14

Analytical solution of active earth pressure under ultimate stress state conditions

LIU Guangxiu^{1,2}, DANG Faning¹, WANG Xu¹, LI Yugen²

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China;

2. School of Architecture Engineering, Yulin University, Yulin, Shaanxi 719000, China)

Abstract: To investigate the distribution characteristics of active earth pressure on non-smooth retaining walls and the stress state of soil behind the wall under active limit equilibrium conditions, a method for calculating the active earth pressure of retaining walls under ultimate stress conditions is developed for cohesionless soil. Firstly, it is assumed that in the limiting equilibrium of the sliding wedge, the soil elements on the slip surface, at the wall-soil

收稿日期: 2024-05-29; **修回日期:** 2024-07-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51979225); 陕西省重点研发计划项目(2022ZDLSF07-02); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2024JC-YBMS-415)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 51979225), Key Research and Development Plan Project in Shaanxi Province(Grant No. 2022ZDLSF07-02) and Natural Science Basic Research Program of Shaanxi Province(Grant No. 2024JC-YBMS-415)

作者简介: 刘光秀(1986-), 男, 2009年毕业于燕山大学土木工程专业, 现为博士研究生、副教授, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: liugx789@yulinu.edu.cn。通讯作者: 党发宁(1962-), 男, 博士, 现任教授、博士生导师。E-mail: dangfn@mail.xaut.edu.cn

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2024.0329

interface, and within the wedge body all achieve the ultimate stress state. Additionally, the principal stresses within the wedge are assumed to transfer as a circular arc principal stress trace. The sliding soil wedge is then discretized into multiple thin-layer units along the minor principal stress traces. By applying static equilibrium principles, the active earth pressure on retaining walls under ultimate stress conditions is derived through force analysis of these units. Subsequently, the influence of the wall-soil friction angle δ on the distribution form, magnitude, resultant force action point of active earth pressure, and overturning moment at the base of the retaining wall is analyzed, and comparisons are made with Coulomb's theory and other earth pressure theories. Theoretical analysis demonstrates that: (1) The active earth pressure σ_w exhibits a convex nonlinear distribution with depth, which is significantly influenced by the roughness of the retaining wall's back, characterized by the wall-soil friction angle δ . When the wall back is smooth ($\delta = 0^\circ$), the earth pressure distribution degenerates into Coulomb's linear distribution. As the wall-soil friction angle increases, the earth pressure distribution curve shifts gradually to the left, with the inflection point on the curve rising, accentuating the nonlinear effect. (2) As the wall-soil friction angle increases, the resultant force of the active earth pressure gradually decreases, while the position of the resultant force's action point rises due to the influence of nonlinear distribution. The overturning moment at the base of the wall initially decreases and then increases. (3) The resultant force of active earth pressure under ultimate stress conditions is the outer envelope of the Coulomb's earth pressure resultant force. Based on Mohr-Coulomb strength theory, it is deduced that the stress state of internal units within the sliding soil wedge at limit equilibrium can be described as follows: When the retaining wall back is smooth ($\delta = 0^\circ$), internal units of the sliding soil wedge reach ultimate stress conditions, corresponding to the classical Rankine earth pressure theory. When the retaining wall back is rough ($\delta > 0^\circ$), internal units of the sliding soil wedge enter a plastic-failure stress state. As the roughness of the retaining wall back increases, the plasticity becomes more pronounced. (4) The active earth pressure under ultimate stress conditions represents the upper bound plastic solution, while Coulomb's earth pressure represents the lower bound plastic solution. Finally, the feasibility and rationality of the proposed method are validated through numerical simulations and practical examples.

Key words: soil mechanics; active earth pressure; retaining wall; principal stress trace; nonlinear distribution; ultimate stress state

1 引言

挡土结构的土压力计算是土力学的一个经典问题,国内外进行了大量的研究。自 1776 年, C. A. Coulomb^[1]提出著名的土压力理论,至今土压力的计算仍是学者们研究的热点。经典的 C. A. Coulomb^[1]和 W. Rankine^[2]土压力理论因其力学概念明确,计算过程简便,目前在工程设计中仍有广泛的应用。但 Rankine 和 Coulomb 土压力理论存在如下缺点: Rankine 理论只适用于挡土墙墙背竖直光滑且填土面水平的情况,应用条件过于狭窄; Coulomb 土压力理论虽可以用于较为复杂的边界条件,但计算的土压力沿挡土墙深度为线性分布,而大量的室内试验与现场观测数据表明作用在挡土墙上的土压力沿深度为非线性分布^[3-10]。

1936 年, K. Terzaghi^[11]通过活动门试验验证了土拱效应的存在,并在其著作中将土拱效应描述为

土体中应力的偏转和重分布^[12],同时指出了土压力非线性性质。为了探索可以反映挡土墙土压力非线性分布特点的分析方法,1960 年, M. E. O. Karan^[13]建立了水平微分层求解土压力的非线性分布解法。1985 年, R. L. Handy^[14]以近似悬链线的小主应力轨迹来描述土拱效应,并基于水平微分层分析法按 Rankine 滑裂面建立了考虑土拱效应的土侧压力系数及土压力强度非线性分布计算方法。Y. Z. Wang^[15]基于 Coulomb 滑裂面,利用微分单元体的静力平衡关系,建立了土压力非线性分布的计算方法,但该解法未考虑土拱效应。K. H. Paik 和 R. Salgado^[16]采用圆弧形小主应力迹线的假定,基于水平微分层分析法按 Rankine 滑裂面建立了考虑土拱效应的主动土压力非线性分布的新公式。在此基础上,应宏伟等^[17-24]对水平微分层分析法和土拱法作了诸多改进。但是利用水平微分层分析法求解土压力存在一个共同缺陷,即难以准确考虑水平薄层单元上切向力的作用,而实际工程中挡土墙背往往并

不光滑,则墙背和土体之间必定存在摩擦力,根据剪应力互等定理,水平薄层单元面上必定存在剪应力。显然,若忽略土层间剪应力或作近似处理,都会导致主动土压力的分布与实际存有偏差,合力作用点估计不准等问题。因此,W. G. Cao 等^[25-26]提出了沿主应力迹线分层取圆弧薄层单元受力分析的研究思路,有效地避免了剪应力的影响。但是,W. G. Cao 等^[25-26]在求解圆弧薄层单元上下界面作用力时,假定分层界面上最大(最小)主应力随深度是线性增加,其合理性有待验证。

此外,Coulomb 理论将滑动体视为刚体,未考虑土体内部单元所处的应力状态。而 Rankine 理论只适合墙背竖直光滑填土表面水平条件,墙后土体单元处于极限应力状态。当挡土墙背粗糙时,滑动楔体内部单元所处的应力状态,现有文献鲜有明确的结论及合理的论证。而土拱法认为滑动土体完全达到极限应力状态的观点,在近年来开始受到质疑,刘洋和于鹏强^[27]认为,主动模式下,墙土界面处的土体单元处于极限应力状态,而滑动面上的土体单元没有达到极限应力状态。王雨波和曹文贵^[28]认为滑移面上土体单元达到极限应力状态,而土楔内部及墙背处的土体单元未达到极限应力状态。此外,L. Xu 等^[29-30]的数值模拟研究表明,主动位移模式下的刚性挡土墙处于极限平衡状态时,墙土接触面处及滑裂面上的土体单元达到极限应力平衡状态,而滑动土楔内部的土体单元仍保持弹性应力状态。张恒志等^[31]基于离散元模拟研究表明,刚性挡土墙在平动模式下,土楔内部部分土体达到了极限平衡状态;而在绕墙底转动模式下,则全部达到了极限平衡状态。由此可见,如何把挡土墙墙后土体的应力状态和静力平衡统一考虑有待于更深入的研究。

基于上述分析,有必要对挡土墙主动土压力分布特征及墙后土体的应力状态作进一步的探究,完善土压力计算理论。为此,本文在已有研究基础上,提出并建立了极限应力状态条件下挡土墙主动土压力的计算方法。首先,基于刚性挡土墙后滑动土楔的土拱效应及挡土墙背处与滑裂面上土体主应力发生偏转的特点,假定当滑动土楔处于极限平衡状态时,滑裂面、墙土界面处及楔体内部的土体单元都达到极限应力状态。同时假定土楔中小主应力传递为圆弧形主应力迹线。继而,采用 W. G. Cao 等^[25]提出的沿最小主应力迹线分层的方法,取圆弧薄层单元受力分析,推导出极限应力状态条件下挡土墙

主动土压力。利用本文建立的计算方法,研究分析了墙土摩擦角 δ 对主动土压力的分布形式、大小、合力作用点及对墙底的倾覆力矩的影响规律,并与 Coulomb 等土压力理论进行比较。根据 Mohr-Coulomb 强度理论及挡土墙后土体的主动渐进破坏机理,判别了滑动土体内部的应力状态。最后,利用数值模拟及结合模型试验数据,对本文计算方法的合理性与可行性进行了验证。此外,本文在求解圆弧薄层单元上下界面作用力时,基于墙后土体重力场的特点,假定薄层单元分层界面上竖向应力的随深度呈线性变化^[32],较 W. G. Cao 等^[25]假定分层界面上最大主应力随深度线性变化作了改进。

2 理论计算推导

2.1 基本假定

为便于本文工作的开展,对研究内容作如下假设:

(1) 土体滑裂面为通过墙踵的平面,当滑动土楔处于极限平衡状态时,滑裂面、墙土界面处及楔体内部的土体单元都达到极限应力状态。

(2) 假定滑动土楔中小主应力传递为圆弧形主应力迹线。

(3) 挡土墙背竖直,墙后土体为无黏性土,内摩擦角为 φ ,墙土摩擦角为 δ 。

(4) 土体遵循 Mohr-Coulomb 屈服准则。

2.2 墙后土体主应力传递及其主应力迹线

根据基本假定,建立挡土墙主动土压力的计算模型,如图 1 所示。挡土墙高为 H ,墙后填土面水平,其上作用均布竖向荷载 q ,墙后土体处于主动极限平衡状态时,形成滑动土楔 ABC ,滑裂面 BC 与水平面夹角为 α 。显然,挡土墙背竖直光滑时,根据 Rankine 土压力理论,滑动土楔的滑裂角 $\alpha = \pi/4 + \varphi/2$,滑动面、墙土界面处及楔体内部的土体单元都达到极限应力状态,且任意土体单元的竖向、水平向应力即为其最大、最小主应力。若挡土墙背粗糙时,由于受墙土摩擦力和滑裂角 α 变化的影响,必然使墙土界面处及滑裂面上土体单元主应力方向发生偏转,且基于连续介质内力的传递,滑动土楔内部土体单元主应力方向也必然发生偏转。设墙土界面处土体法向正应力为 σ_w ,剪应力为 τ_w ,滑裂面上正应力为 σ_α ,剪应力为 τ_α ,则有

$$\tau_w = \sigma_w \tan \delta \quad (1)$$

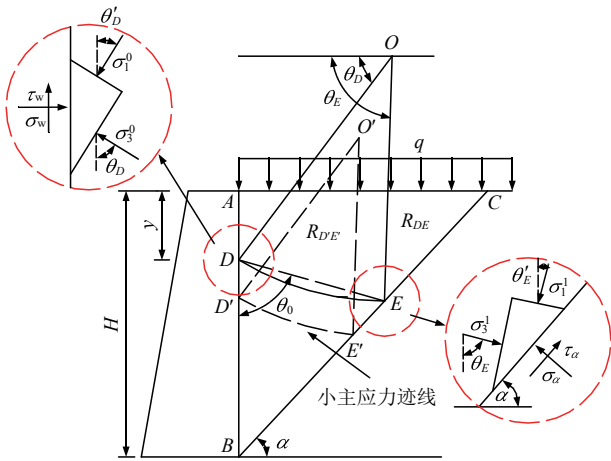


图 1 挡土墙土压力计算简图

Fig.1 Calculation sketch of earth pressure on retaining walls

$$\tau_{\alpha} = \sigma_{\alpha} \tan \varphi \quad (2)$$

如图 1 所示, 设墙土界面处的土体单元的最大主应力为 σ_1^0 , 最小主应力为 σ_3^0 ; 滑裂面上土体单元的最大主应力为 σ_1^i , 最小主应力为 σ_3^i 。深度 y 处, 在墙土界面和滑裂面上分别取三角形单元进行受力分析, 则有

$$\sigma_w = \sigma_1^0 \cos^2 \theta_D + \sigma_3^0 \sin^2 \theta_D \quad (3)$$

$$\tau_w = (\sigma_1^0 - \sigma_3^0) \sin \theta_D \cos \theta_D \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_3^i \cos^2 (\theta_E - \alpha) + \sigma_1^i \sin^2 (\theta_E - \alpha) \quad (5)$$

$$\tau_{\alpha} = (\sigma_1^i - \sigma_3^i) \sin (\theta_E - \alpha) \cos (\theta_E - \alpha) \quad (6)$$

式中: θ_D 为墙土界面处的土体单元最小主应力方向与竖直方向的夹角, $\theta_D = \pi/2 - \theta_D'$, θ_D' 为墙土界面处的土体单元主应力方向的偏转角度; θ_E 为滑裂面处的土体单元最小主应力方向与竖直方向的夹角, $\theta_E = \pi/2 - \theta_E'$, θ_E' 为滑裂面处的土体单元主应力方向的偏转角度。

当墙土界面和滑裂面上土体单元处于极限应力状态时, 根据 Mohr-Coulomb 准则, 则有

$$J = \frac{\sigma_3^0}{\sigma_1^0} = \frac{\sigma_3^i}{\sigma_1^i} = \tan^2 (45^\circ - \varphi/2) \quad (7)$$

式中: J 为墙土界面处或滑动面处最小与最大主应力之比。分别联立式(1), (3), (4), (7)及式(2), (5)~(7), 即可解得

$$\theta_D = \arctan \frac{(1-J) + \sqrt{(1-J)^2 - 4J \tan^2 \delta}}{2J \tan \delta} \quad (8)$$

$$\theta_E = \alpha + \arctan \frac{(1-J) + \sqrt{(1-J)^2 - 4J \tan^2 \varphi}}{2 \tan \varphi} =$$

$$\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (9)$$

由式(8), (9)及结合式(7)可知, θ_D , θ_E 分别只与参数 δ , φ 及参数 α , φ 有关, 与埋深无关, 即墙

土界面、滑裂面处土体单元的主应力方向偏转程度均不随深度发生改变。由前所述, 滑动楔体内部土体单元的主应力方向由墙土界面至滑裂面边界不断发生偏转, 可假定以圆弧形曲线描述该主应力的传递规律^[33-34], 曲线上任意一点的切线方向代表该点最小主应力方向, 法线方向为该点最大主应力方向, 该曲线定义为最小主应力迹线。

设深度 y 处, 其最小主应力迹线为圆弧曲线 $\widehat{DE}$, O 为圆心, 直线 OD , OE 为圆弧半径, 半径长度为 R_{DE} , 虚线 DE 与竖直方向的夹角为 θ_0 , 如图 1 所示。由三角几何关系易得, 直线 OD , OE 与水平方向的夹角分别为 θ_D , θ_E 以及下列几何关系式:

$$\theta_0 = \frac{\theta_D + \theta_E}{2} \quad (10)$$

$$R_{DE} = \frac{(H-y) \cos \alpha}{2 \cos (\theta_0 - \alpha) \sin \left(\frac{\theta_E - \theta_D}{2} \right)} \quad (11)$$

由此可确定最小主应力迹线的几何参数, 从而获得一系列这样的迹线。且显然, 沿着小主应力迹线的方向, 土体单元主应力的大小和方向不断发生变化。

对点 E 进行分析, 由式(9)可知, 当滑裂角 $\alpha = \pi/4 + \varphi/2$, 即为 Rankine 滑裂面时, $\theta_E = \pi/2$, 主应力方向的偏转角度 $\theta_E' = 0^\circ$; 当滑裂角 $\alpha > \pi/4 + \varphi/2$ 时, $\theta_E > \pi/2$, $\theta_E' = \pi/2 - \theta_E < 0^\circ$, 表明滑裂面处主应力方向绕逆时针偏转; 当滑裂角 $\alpha < \pi/4 + \varphi/2$ 时, $\theta_E < \pi/2$, $\theta_E' = \pi/2 - \theta_E > 0^\circ$, 表明滑裂面处主应力方向绕顺时针偏转。

2.3 主应力迹线上土体单元的应力状态分析

如图 2 所示, 在小主应力迹线 $\widehat{DE}$ 上任取一点 F , 设该处土体单元的竖向应力为 σ_y^i , 水平向应力为 σ_x^i , 竖向剪应力为 τ_{xy} , 水平向剪应力 τ_{yx} , $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; 其大主应力为 σ_1^i , 小主应力为 σ_3^i , 主应力方向的偏转角度为 θ_i' , 小主应力方向与竖直方向的夹角为 θ_i , 如图 3 所示。显然, 其大主应力方向与水平向的夹角也为 θ_i , 且 $\theta_i = \pi/2 - \theta_i'$ 。对该点进行应力分析, 由图 3 莫尔应力圆可得

$$\sigma_y^i = \frac{1}{2}(\sigma_1^i + \sigma_3^i) + \frac{\sigma_1^i - \sigma_3^i}{2} \cos [\pi - (2\theta_i)] = \frac{1}{2}(\sigma_1^i + \sigma_3^i)[1 - \sin \varphi \cos (2\theta_i)] \quad (12)$$

又 $\sigma_3^i / \sigma_1^i = \tan^2 (45^\circ - \varphi/2)$, 代入式(12)整理可得

$$\sigma_y^i = \frac{\sigma_1^i}{1 + \sin \varphi} [1 - \sin \varphi \cos (2\theta_i)] \quad (13)$$

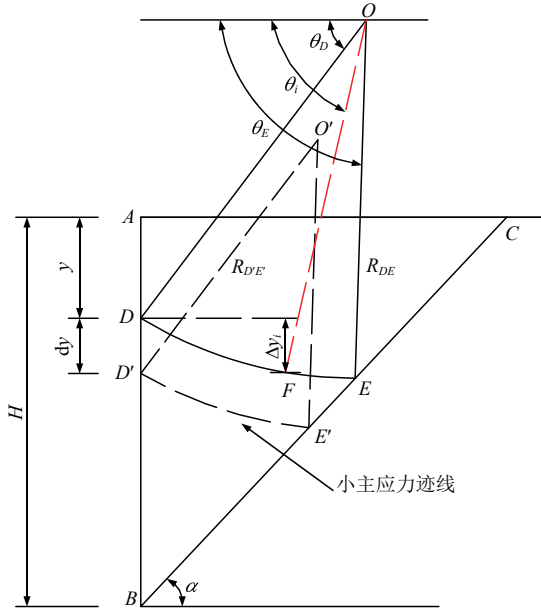


图2 最小主应力迹线

Fig.2 Minor principal stress trace

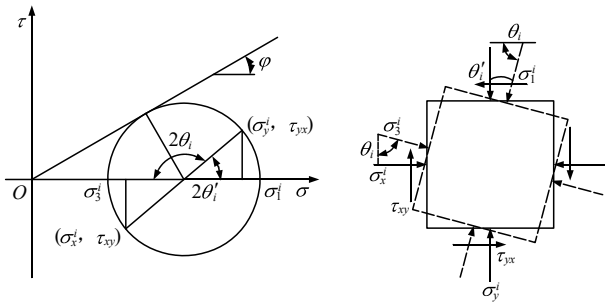


图3 最小主应力迹线上土体单元莫尔应力圆

Fig.3 Mohr stress circle of soil elements on the trace of the minor principal stress

2.4 曲线薄层单元受力分析

本节基于分层法计算主动土压力。如图2所示，在深度 y 处，沿最小主应力迹线进行分层，取得圆弧薄层单元 $DED'E'$ ，令 $DD' = dy$ 。以此薄层单元作为隔离体进行受力分析，如图4所示，由薄层单元的静力平衡关系建立起微分控制方程，继而利用边界条件求解出主动土压力。具体求解过程如下：

(1) 薄层单元界面应力分析

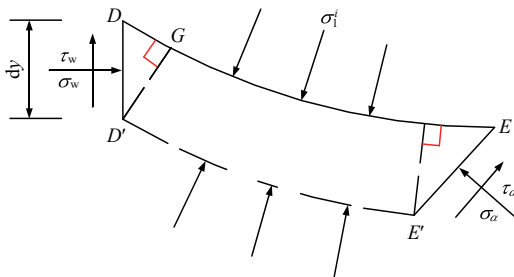


图4 曲线薄层单元界面应力

Fig.4 Interfacial stress of curved thin-layer unit

由前所述，圆弧薄层单元的分层是沿着最小主应力迹线进行，于是可知作用在隔离体上下界面 DE 、 $D'E'$ 上任一点的法向正应力即等于该处最大主应力 σ_1^i ，方向指向隔离体，沿界面切向的剪应力为零，如图4所示。由节2.2可知，隔离体的左界面 DD' 上任一点受到法向正应力 σ_w 与切向剪应力 τ_w 的作用，右界面 EE' 上任一点受到法向正应力 σ_α 与切向剪应力 τ_α 的作用。

(2) 薄层单元上下界面作用力分析

由于墙体位移较小，基于墙后土体重力场的特点，假定分层界面上竖向应力的大小随深度呈线性变化。而 W. G. Cao 等^[25]在求解薄层单元上下界面作用力时，则是假定分层界面上最大主应力随深度线性增加。显然，基于墙后土体应力场的特点，本文假定的逻辑性更加严谨。

设墙土界面处 D 点土体竖向应力为 σ_y ，则 σ_y^i 可表示为

$$\sigma_y^i = \sigma_y + \gamma \Delta y_i \quad (14)$$

式中： γ 为土体重度， Δy_i 为同一主应力迹线分层界面上任一点 F 与墙土界面处 D 点的高差，如图2所示，由几何关系可得

$$\Delta y_i = R_{DE} (\sin \theta_i - \sin \theta_D) \quad (15)$$

联立式(13)~(15)可解得

$$\sigma_1^i = \frac{\sigma_y^i (1 + \sin \varphi)}{1 - \sin \varphi \cos(2\theta_i)} = \frac{\sigma_y + \gamma R_{DE} (\sin \theta_i - \sin \theta_D)}{1 - \sin \varphi \cos(2\theta_i)} (1 + \sin \varphi) \quad (16)$$

如图2所示，从墙土界面到滑裂面处， θ_i 由 θ_D 变化到 θ_E ，利用积分方法，可得作用在上界面 DE 上的水平力 F_x^{DE} 为

$$F_x^{DE} = \int_{\theta_D}^{\theta_E} \sigma_1^i R_{DE} \cos \theta_i d\theta_i \quad (17)$$

将式(16)代入式(17)，整理得

$$F_x^{DE} = R_{DE} (1 + \sin \varphi) \left[(\sigma_y - \gamma R_{DE} \sin \theta_D) \cdot \int_{\theta_D}^{\theta_E} \frac{\cos \theta_i d\theta_i}{1 - \sin \varphi \cos(2\theta_i)} - \frac{\gamma R_{DE}}{4} \int_{\theta_D}^{\theta_E} \frac{d\cos(2\theta_i)}{1 - \sin \varphi \cos(2\theta_i)} \right] \quad (18)$$

令 $t_1 = \int_{\theta_D}^{\theta_E} \frac{\cos \theta_i d\theta_i}{1 - \sin \varphi \cos(2\theta_i)}$ ，则有

$$t_1 = \int_{\theta_D}^{\theta_E} \frac{\cos \theta_i d\theta_i}{1 - \sin \varphi \cos(2\theta_i)} = \int_{\theta_D}^{\theta_E} \frac{d\sin \theta_i}{(1 - \sin \varphi) + 2 \sin \varphi \sin^2 \theta_i} = \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi (1 - \sin \varphi)}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} \sin \theta_E \right) - \arctan \left(\sqrt{\frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} \sin \theta_D \right) \right] \quad (19)$$

又:

$$\int_{\theta_D}^{\theta_E} \frac{d\cos(2\theta_i)}{1 - \sin\varphi \cos(2\theta_i)} = -\frac{1}{\sin\varphi} \ln \frac{1 - \sin\varphi \cos(2\theta_E)}{1 - \sin\varphi \cos(2\theta_D)} \quad (20)$$

将 t_1 , 式(20)代入式(18), 整理得

$$F_x^{DE} = \sigma_y R_{DE} (1 + \sin\varphi) t_1 + \gamma R_{DE}^2 (1 + \sin\varphi) \cdot \left[\frac{1}{4\sin\varphi} \ln \frac{1 - \sin\varphi \cos(2\theta_E)}{1 - \sin\varphi \cos(2\theta_D)} - t_1 \sin\theta_D \right] \quad (21)$$

令

$$t_2 = (1 + \sin\varphi) t_1$$

$$t_3 = (1 + \sin\varphi) \left[\frac{1}{4\sin\varphi} \ln \frac{1 - \sin\varphi \cos(2\theta_E)}{1 - \sin\varphi \cos(2\theta_D)} - t_1 \sin\theta_D \right]$$

并代入式(21)可得

$$F_x^{DE} = \sigma_y R_{DE} t_2 + \gamma R_{DE}^2 t_3 \quad (22)$$

同理, 作用在上界面 DE 上的竖向力 F_y^{DE} 为

$$F_y^{DE} = \int_{\theta_D}^{\theta_E} \sigma_1^i R_{DE} \sin\theta_i d\theta_i \quad (23)$$

与水平力 F_x^{DE} 的计算过程相类似, 将式(16)代入式(23), 进行积分整理可得

$$F_y^{DE} = \sigma_y R_{DE} t_6 + \gamma R_{DE}^2 t_7 \quad (24)$$

其中,

$$t_6 = (1 + \sin\varphi) t_4$$

$$t_7 = (1 + \sin\varphi) \left[\frac{\theta_E - \theta_D}{2\sin\varphi} + t_5 \left(1 - \frac{1}{\sin\varphi} \right) - t_4 \sin\theta_D \right]$$

$$t_4 = \frac{1}{2\sqrt{2\sin\varphi(1+\sin\varphi)}} \ln \left| \frac{\sqrt{2\sin\varphi \cos\theta_E} - \sqrt{1+\sin\varphi}}{\sqrt{2\sin\varphi \cos\theta_E} + \sqrt{1+\sin\varphi}} \cdot \frac{\sqrt{2\sin\varphi \cos\theta_D} + \sqrt{1+\sin\varphi}}{\sqrt{2\sin\varphi \cos\theta_D} - \sqrt{1+\sin\varphi}} \right|$$

$$t_5 = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{(1-\sin\varphi)(1+\sin\varphi)}} \cdot \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \tan\theta_E \right) - \arctan \left(\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \tan\theta_D \right) \right] & (\theta_E \leq \pi/2) \\ \frac{1}{2\sqrt{(1-\sin\varphi)(1+\sin\varphi)}} \cdot \left[2\arctan \left(\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \tan\pi/2 \right) - \arctan \left(\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \tan(\pi - \theta_E) \right) - \arctan \left(\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \tan\theta_D \right) \right] & (\theta_E > \pi/2) \end{cases}$$

式(22), (24)确定了作用在隔离体上界面 DE 上

的水平力与竖向力, 相应地, 隔离体下界面上的竖向应力可以表示为 $\sigma_y + \Delta\sigma_y$ 。同理, 可得到作用在隔离体下界面 $D'E'$ 上的水平力 $F_x^{D'E'}$ 和竖向力 $F_y^{D'E'}$:

$$F_x^{D'E'} = (\sigma_y + \Delta\sigma_y) R_{D'E'} t_2 + \gamma R_{D'E'}^2 t_3 \quad (25)$$

$$F_y^{D'E'} = (\sigma_y + \Delta\sigma_y) R_{D'E'} t_6 + \gamma R_{D'E'}^2 t_7 \quad (26)$$

其中,

$$R_{D'E'} = \frac{(H - y - dy) \cos\alpha}{2\cos(\theta_O - \alpha) \sin\left(\frac{\theta_E - \theta_D}{2}\right)}$$

(3) 薄层单元左右界面作用力分析

作用在隔离体墙土界面 DD' 与滑裂界面 EE' 上的水平力 $F_x^{DD'}$, $F_x^{EE'}$ 和竖向力 $F_y^{DD'}$, $F_y^{EE'}$ 分别为

$$F_x^{DD'} = \sigma_w \overline{DD'} = \sigma_w dy \quad (27)$$

$$F_y^{DD'} = \tau_w \overline{DD'} = \tau_w \tan\delta dy \quad (28)$$

$$F_x^{EE'} = (-\sigma_\alpha \sin\alpha + \tau_\alpha \cos\alpha) \overline{EE'} \quad (29)$$

$$F_y^{EE'} = (\sigma_\alpha \cos\alpha + \tau_\alpha \sin\alpha) \overline{EE'} \quad (30)$$

式中: $\overline{EE'}$ 为界面 EE' 的长度。由 $\overline{DD'} = dy$, 依据几何关系, 得 $\overline{EE'} = \sin\theta_D dy / \cos(\theta_E - \alpha)$, 如图 4 所示。

(4) 薄层单元重力分析

显然隔离体的重力可由其面积与土体重度的乘积进行计算, 但由图 2 可知, 该薄层单元上下界面的圆心与半径各不相同, 致使曲线单元的精确面积难以确定。于是, 采用 W. G. Cao 等^[25]近似计算方法, 即将单元面积视为其展平后的梯形单元面积, 由此可得薄层单元的重力 dw :

$$dw = \frac{\gamma(l_{DE} + l_{D'E'})t}{2} \quad (31)$$

式中: t 为薄层单元的高, 近似等于线段 $D'G$ 的长度, 如图 4 所示; l_{DE} , $l_{D'E'}$ 分别为单元上下圆弧边界 DE , $D'E'$ 的弧长。由几何关系可得

$$t = \sin\theta_D dy \quad (32)$$

$$l_{DE} = R_{DE}(\theta_E - \theta_D) = \frac{(H - y)(\theta_E - \theta_D) \cos\alpha}{2\cos(\theta_O - \alpha) \sin\left(\frac{\theta_E - \theta_D}{2}\right)} \quad (33)$$

$$l_{D'E'} = R_{D'E'}(\theta_E - \theta_D) = \frac{(H - y - dy)(\theta_E - \theta_D) \cos\alpha}{2\cos(\theta_O - \alpha) \sin\left(\frac{\theta_E - \theta_D}{2}\right)} \quad (34)$$

(5) 薄层单元平衡控制方程

上述即为薄层单元作为隔离体所受的各向作用力, 根据静力平衡条件, 建立起平衡控制方程, 为

$$F_x^{DD'} - F_x^{DE} + F_x^{D'E'} + F_x^{EE'} = 0 \quad (35)$$

$$F_y^{DD'} - F_y^{DE} + F_y^{D'E'} + F_y^{EE'} - dw = 0 \quad (36)$$

将单元所受的各水平向作用力代入式(35), 化简整理得

$$\frac{\sigma_\alpha \sin \theta_D}{\cos(\theta_E - \alpha)} dy = [\sigma_w dy + \sigma_y (R_{D'E'} - R_{DE}) t_2 + \Delta \sigma_y R_{D'E'} t_2 + \gamma t_3 (R_{D'E'}^2 - R_{DE}^2)] / (\sin \alpha - \tan \varphi \cos \alpha) \quad (37)$$

将单元所受的各竖直方向作用力代入式(36), 化简整理得

$$\sigma_w \tan \delta dy + \sigma_y (R_{D'E'} - R_{DE}) t_6 + \Delta \sigma_y R_{D'E'} t_6 + \gamma t_7 (R_{D'E'}^2 - R_{DE}^2) + (\cos \alpha + \tan \varphi \sin \alpha) \cdot \frac{\sigma_\alpha \sin \theta_D}{\cos(\theta_E - \alpha)} dy - \frac{\gamma(l_{DE} + l_{D'E'}) \sin \theta_D}{2} dy = 0 \quad (38)$$

将式(37)代入式(38), 整理得到薄层单元体的控制方程, 为

$$a_1 \sigma_w dy - \frac{a_2 a_3}{2} \sigma_y dy + \frac{a_2 a_3}{2} (H - y - dy) d\sigma_y - \frac{a_2^2 a_4 + a_5}{2} \gamma \left(H - y - \frac{dy}{2} \right) dy = 0 \quad (39)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_1 &= \tan \delta + \cot(\alpha - \varphi) \\ a_2 &= \frac{\cos \alpha}{\cos(\theta_E - \alpha) \sin\left(\frac{\theta_E - \theta_D}{2}\right)} \\ a_3 &= t_6 + t_2 \cot(\alpha - \varphi) \\ a_4 &= t_7 + t_3 \cot(\alpha - \varphi) \\ a_5 &= a_2 (\theta_E - \theta_D) \sin \theta_D \end{aligned}$$

令 $k_w = \sigma_w / \sigma_y$, 根据墙土界面处土体单元的极限应力状态, 联立式(3), (7), (13)可解得

$$k_w = \{(1 + \sin^2 \varphi) - [(1 + \sin^2 \varphi)^2 - (4 \tan^2 \delta + \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi]^{1/2}\} / (4 \tan^2 \delta + \cos^2 \varphi) \quad (40)$$

将 $\sigma_w = k_w \sigma_y$ 代入式(39), 略去高阶小量, 可获得墙土界面处竖向应力 σ_y 的微分控制方程, 为

$$\frac{d\sigma_y}{dy} - \frac{\lambda_1}{H - y} \sigma_y - \frac{\gamma}{\lambda_2} = 0 \quad (41)$$

其中,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \frac{2k_w a_1}{a_2 a_3} \\ \lambda_2 &= \frac{a_2 a_3}{a_2^2 a_4 + a_5} \end{aligned}$$

求解微分方程式(41), 得

$$\sigma_y = C(y - H)^{-\lambda_1} + \frac{\gamma(y - H)}{(1 + \lambda_1) \lambda_2} \quad (42)$$

$$\sigma_w = k_w C(y - H)^{-\lambda_1} + \frac{k_w \gamma(y - H)}{(1 + \lambda_1) \lambda_2} \quad (43)$$

式中: C 为待定常数。根据边界条件, 当 $y = 0$ 时, $\sigma_y = q$, 代入式(42), 可解得

$$C = \left[q + \frac{\gamma H}{(1 + \lambda_1) \lambda_2} \right] (-H)^{\lambda_1} \quad (44)$$

将式(44)代入式(43), 由此获得挡土墙法向主动土压力强度 σ_w 的计算公式:

$$\begin{aligned} \sigma_w &= k_w \left[q + \frac{\gamma H}{(1 + \lambda_1) \lambda_2} \right] (-H)^{\lambda_1} (y - H)^{-\lambda_1} + \\ &\frac{k_w \gamma (y - H)}{(1 + \lambda_1) \lambda_2} = k_w q \left(1 - \frac{y}{H} \right)^{-\lambda_1} + \frac{k_w \gamma}{(1 + \lambda_1) \lambda_2} \cdot \\ &\left[H \left(1 - \frac{y}{H} \right)^{-\lambda_1} + (y - H) \right] \end{aligned} \quad (45)$$

于是, 挡土墙主动土压力的合力 E_a 可表示为

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{1}{\cos \delta} \int_0^H \sigma_w dy = \frac{1}{\cos \delta} \int_0^H \left\{ k_w q \left(1 - \frac{y}{H} \right)^{-\lambda_1} + \right. \\ &\frac{k_w \gamma}{(1 + \lambda_1) \lambda_2} \left[H \left(1 - \frac{y}{H} \right)^{-\lambda_1} + (y - H) \right] \Big\} dy = \\ &\frac{1}{\cos \delta} \left[\frac{k_w q H}{1 - \lambda_1} + \frac{k_w \gamma H^2}{2(1 - \lambda_1) \lambda_2} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

主动土压力对墙底的弯矩(倾覆力矩) M , 为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^H \sigma_w (H - y) dy = \int_0^H H \sigma_w dy - \int_0^H y \sigma_w dy = \\ &\frac{k_w q H^2}{2 - \lambda_1} + \frac{k_w \gamma H^3}{3(2 - \lambda_1) \lambda_2} \end{aligned} \quad (47)$$

主动土压力的合力的作用点距墙底的距离 h_a 可表示为

$$h_a = \frac{M}{E_a \cos \delta} = \frac{2(1 - \lambda_1)(3\lambda_2 q + \gamma H)H}{3(2 - \lambda_1)(2\lambda_2 q + \gamma H)} \quad (48)$$

上述即为基于最小主应力迹线分层法求解极限应力状态条件下挡土墙主动土压力的计算公式。

3 分析与讨论

利用本文计算方法对平动位移模式下挡土墙主动土压力的大小、分布与影响规律, 及墙后土体的应力状态展开分析与讨论。计算参数取值为: 挡土墙高 $H = 8$ m, 无黏性填土重度 $\gamma = 18.0$ kN/m³, 内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$, 土体表面荷载 $q = 0$ kN/m², 考虑相关参数影响时再另外取值。

3.1 滑裂角 α 的确定

根据节 2.1 基本假定(1), 本文研究的挡土墙的受力状态为墙后土体处于主动极限平衡状态, 基于挡土墙发生主动破坏的实际滑裂面, 本文的滑裂面遵循 Coulomb 滑裂面^[17], 即

$$\alpha = \arctan \left[\sqrt{\tan^2 \varphi + \frac{\tan \varphi}{\tan(\varphi + \delta)}} + \tan \varphi \right] \quad (49)$$

3.2 土压力 σ_w 的分布规律及墙土摩擦角 δ 的影响

利用式(45), 分别作出墙土摩擦角 $\delta = 0.1^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ 的主动土压力 σ_w 随挡土墙深度 y 的分布曲线, 如图5所示。为了便于比较分析, 同时给出了 C. A. Coulomb 等^[1, 14, 16, 25, 30]的计算结果。

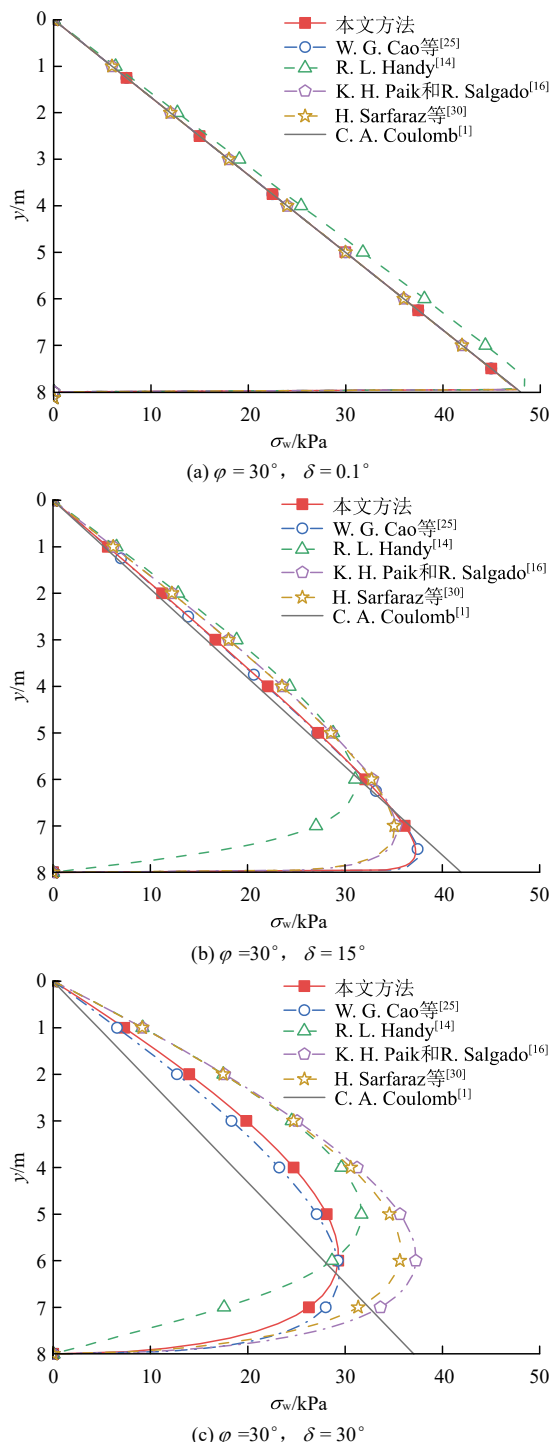


图5 主动土压力 σ_w 沿深度 y 的分布曲线

Fig.5 Distribution curves of active earth pressure σ_w with depth y

从图5可以看出, Coulomb 主动土压力 σ_w 随深度呈线性分布, 而 R. L. Handy 等^[14, 16, 25, 30]及本文

的主动土压力 σ_w 随深度都呈凸形非线性分布, 且墙背的粗糙度对非线性分布形式有显著影响。当挡土墙背光滑时, 即 δ 很小时, K. H. Paik 等^[16, 25, 30]及本文的土压力分布曲线都退化为 Coulomb 直线分布, 而 R. L. Handy^[14]解也退化为线性分布, 但大于 Coulomb 值; 随着墙土摩擦角 δ 的增大, 土压力分布曲线逐渐左移, 曲线拐点位置升高, 非线性愈加明显。在分布曲线与 Coulomb 线相交处的墙高以上部分, 本文的主动土压力 σ_w 大于 Coulomb 解, 在靠近墙的底部, 本文的主动土压力 σ_w 衰减, 小于 Coulomb 解; 当 $\delta = \varphi$ 时, 土压力曲线的非线性最为明显, 如图5(c)所示。

从图5中同时可以看出, 当 δ 较小时, W. G. Cao 等^[25]分布曲线与本文分布曲线高度吻合; 随着 δ 的增大, 两者分布曲线的差别逐渐显现; 当 $\delta = \varphi$ 时, 二者分布曲线的差别达到最大。在二者曲线相交处的墙高以上部分, 本文的主动土压力 σ_w 大于 W. G. Cao 等^[25]解, 在墙高以下部分, 本文的主动土压力 σ_w 小于 W. G. Cao 等^[25]解。

3.3 墙土摩擦角 δ 对合力作用点高度 h_a 的影响

利用式(48), 分别得出墙土摩擦角 $\delta = 0.1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ 时, 主动土压力的合力的作用点距墙底的距离 h_a , 为便于分析比较, 进行 $\delta/\varphi, h_a/H$ 无量纲化处理, 如图6所示。同时给出了 C. A. Coulomb 等^[1, 14, 16, 25, 30]的计算结果。

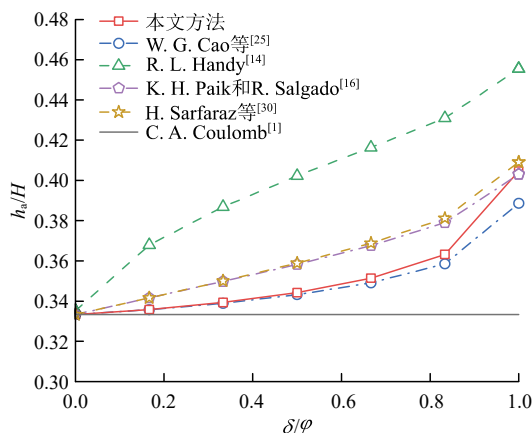


图6 墙土摩擦角 δ 对合力作用点高度 h_a 的影响

Fig.6 Effect of wall-soil friction angle δ on the height h_a of the resultant force action point

由图6可知, Coulomb 土压力合力的作用点位于 $h_a = H/3$ 处, 而 R. L. Handy 等^[14, 16, 25, 30]及本文的合力作用点位置随着墙土摩擦角 δ 的增加而增大。当挡土墙背光滑时, 即 δ 很小时, K. H. Paik 等^[16, 25, 30]及本文的合力作用点与 Coulomb 一致; 当 $\delta = \varphi$ 时, 本文合力作用点位置为 $h_a = 0.405H$,

W. G. Cao 等^[25]合力作用点位置为 $h_a = 0.390H$, R. L. Handy^[14]合力作用点位置最高为 $h_a = 0.456H$, 本文较 Coulomb 合力作用点高度增加 $\Delta h_a = 7.2\%H$. 分析原因, 由节 3.2 可知, 受墙土的摩擦作用, R. L. Handy 等^[14, 16, 25, 30]及本文的主动土压力 σ_w 随深度呈非线性分布, δ 越大 σ_w 的非线性分布越明显, 主动土压力分布的质心与墙底之间的距离就越高, 即合力作用点的位置就越高, 如图 5 所示。

3.4 水平向土压力合力 E_{xa} , 倾覆力矩 M 随墙土摩擦角 δ 的影响

由式(46), (47), 可分别得出墙土摩擦角 $\delta = 0.1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ 的水平向主动土压力合力 E_{xa} 及对墙底的倾覆力矩 M , 如图 7, 8 所示, 同时给出了 C. A. Coulomb 等^[1, 14, 16, 25, 30]的计算结果。

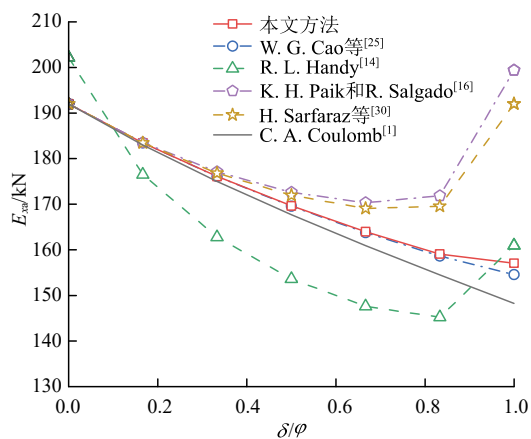


图 7 水平向土压力合力 E_{xa} 随墙土摩擦角 δ 的变化
Fig.7 Variation of horizontal earth pressure resultant force E_{xa} with wall-soil friction angle δ

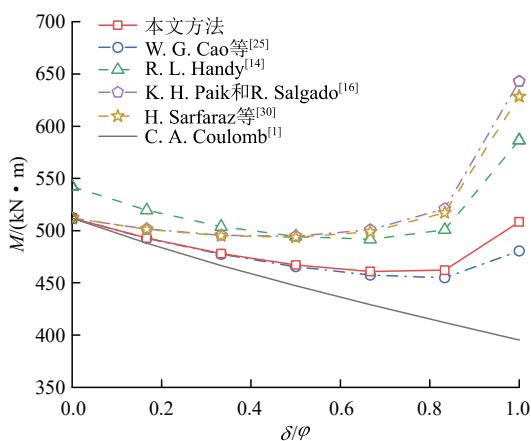


图 8 倾覆力矩 M 随墙土摩擦角 δ 的变化
Fig.8 Variation of overturning moment M with wall-soil friction angle δ

由图 7 可知, C. A. Coulomb 等^[1, 25]及本文解得水平向土压力合力 E_{xa} 随着墙土摩擦角 δ 的增大而减小, 而 R. L. Handy 等^[14, 16, 30]的计算结果先

减小后增加。当墙土摩擦角 δ 较小时, K. H. Paik 等^[16, 25, 30]及本文解的水平向土压力合力 E_{xa} 与 Coulomb 结果趋于一致, 而 R. L. Handy^[14]解大于 Coulomb 解。随着 δ 的增加, 本文与 W. G. Cao 等^[25]解的水平向土压力合力 E_{xa} 逐渐大于 Coulomb 解, K. H. Paik 等^[16, 30]的解要显著大于 Coulomb 解。而 R. L. Handy^[14]解小于 Coulomb 解, 但当 δ 接近于 φ 时, R. L. Handy^[14]解大于 Coulomb 解。

由图 8 可知, 随着墙土摩擦角 δ 的增大, R. L. Handy 等^[14, 16, 25, 30]及本文解的主动土压力对墙底的弯矩 M 先减小后增加, 而 Coulomb 主动土压力对墙底的弯矩 M 逐渐减小。当 $\delta = \varphi$ 时, 本文计算的倾覆力矩 $M = 508.38 \text{ kN} \cdot \text{m}$, W. G. Cao 等^[25]解的倾覆力矩为 $M = 480.49 \text{ kN} \cdot \text{m}$, K. H. Paik 和 R. Salgado^[16]解的倾覆力矩最大为 $M = 642.98 \text{ kN} \cdot \text{m}$, Coulomb 倾覆力矩为 $M = 395.30 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 本文较 Coulomb 结果高出 28.61%。分析原因, 由节 3.2, 3.3 可知, 受墙土的摩擦作用, 主动土压力 σ_w 随深度呈非线性分布, δ 越大 σ_w 的非线性分布越明显, 土压力合力作用点的位置就越高。尽管水平向土压力合力 E_{xa} 随着 δ 的增大有所减小, 但受土压力合力作用点位置提升的影响, 采用本文方法计算的倾覆力矩大于 Coulomb 的计算结果。而 Coulomb 理论计算的倾覆弯矩通常偏小, 高估了挡土墙的抗倾覆性能^[35]。

综合分析图 5~8 可知, 不同的假设条件计算的主动土压力的大小、分布形式、合力作用点及倾覆力矩, 随着墙土摩擦角的增加差别愈加明显。但当假设条件相近时, 计算结果与影响规律较为相近。如本文解与 W. G. Cao 等^[25]计算结果较为接近, K. H. Paik 等^[16, 30]的计算结果较为接近。通过与本文解对比分析, 为 W. G. Cao 等^[25]的假设可行性进行了验证。

3.5 墙后土体的应力状态分析

根据 Mohr-Coulomb 强度理论, 将本文土压力与 Coulomb 土压力作比较, 即可判别滑动土楔体内部的平均应力状态: (1) 若小于 Coulomb 土压力, 表明当滑动土楔处于极限平衡状态时, 土楔体内部应力状态未达到极限应力状态; (2) 若等于 Coulomb 土压力(或接近), 表明当滑动土楔处于极限平衡状态时, 土楔体内部应力状态为极限应力状态(或接近); (3) 若大于 Coulomb 土压力, 表明当滑动土楔处于极限平衡状态时, 土楔体内部的平均应力状态已进入塑性-破坏应力状态。

由图 7 可知, 极限应力状态条件下主动土压力

合力是 Coulomb 土压力合力的外包络线, 依据上述判别准则, 可推论出墙后土体处于极限平衡状态时滑动土楔体内部单元的应力状态为: 挡土墙背光滑时, 即 $\delta = 0^\circ$ 时, 本文的计算结果与 Coulomb 土压力一致, 可知此时滑动土楔体内部单元为极限应力状态, 即为经典的 Rankine 土压力理论; 挡土墙背粗糙时, 即 $\delta > 0^\circ$ 时, 大于 Coulomb 土压力, 表明滑动土楔体内部单元已进入塑性 - 破坏应力状态, 并随着挡土墙背粗糙度的增加(墙土摩擦角的增加), 塑性状态越显著。

为进一步的分析, 在这里有必要引入并阐述下挡土墙主动破坏的源起与发展过程。众所周知, 挡土墙的主动破坏起源于作用在挡土墙上的侧向静止土压力 E_0 , 挡土墙在初始静止土压力作用下向远离土体方向发生位移或转动, 随着位移或转角的增大, 土压力由 E_0 逐渐减小, 待土体中出现破裂面, 墙后的土体处于主动极限平衡状态, 土压力达最小值, 显然该最小值即为 Coulomb 土压力。综上分析, 基于挡土墙主动破坏的源起与发展过程, 根据 Mohr-Coulomb 强度理论, 滑动土楔体内部单元的应力状态也必然经历由初始静止应力状态发展到主动极限平衡状态最后进入塑性 - 破坏应力状态的变化过程, 本文提出的极限应力状态条件下的主动土压力可定义为主动土压力的塑性上限解, Coulomb 土压力为塑性下限解。

4 数值模拟验证

目前, 针对挡土墙后滑动土楔内部土体的应力试验测试存在较大困难, 为了验证本文所建立的极限应力状态条件的挡土墙主动土压力计算方法的合理性及可行性, 与 PLAXIS 有限元数值结果对比分析。

有限元模型的假定如下: (1) 土体遵循 Mohr-Coulomb 屈服准则; (2) 模型满足平面应变条件; (3) 墙 - 土界面接触设置为刚性接触, 即具有与填土相同强度特性的界面($\delta = \varphi$); (4) 不考虑挡土墙对墙后土体初始应力场的影响, 即在挡土墙发生位移前, 土体的初始应力为自重应力; (5) 挡土墙是绝对刚性结构, 挡土墙背竖直, 墙后填土为无黏性土, 填土表面水平, 无地下水影响。墙体高度为 $H = 6.0$ m, 模型尺寸为高 12 m, 宽 24 m, 如图 9 所示。模型的左、右边界为法向固定, 上部为自由边界, 底部边界为双向固定。土体单元为 15 节点三角形平面应变单元。土体的参数为: 重度 $\gamma = 18$ kN/m³; 弹

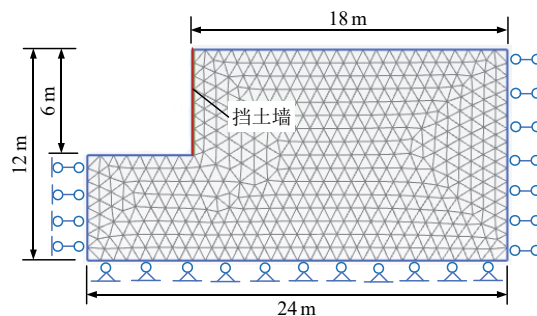


图 9 挡土墙数值模拟计算模型

Fig.9 Numerical simulation calculation model for retaining walls

性模量 $E_s = 13$ MPa; 泊松比 $\nu = 0.3$; 土体的内摩擦角 φ 分别取为 10° , 20° , 30° , 35° , 40° 。通过对挡土墙创建水平线位移来实现挡土墙平动位移的大小, 由初始水平线位移为 0 开始, 逐步增加挡土墙的相对水平线位移量, 直至作用在挡土墙上土压力趋于稳定时, 认为土体达到了塑性极限状态, 即分析步到此停止。定义每一级水平线位移下作用在墙体上的水平向土压力合力为 E_{xs} (kN)。以土体内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ 主动状态为例进行分析, 作用在墙体的水平向土压力合力 E_{xs} 随墙体位移 S 的变化规律如图 10 所示, 极限平衡状态下滑动土楔的塑性区分布如图 11 所示。

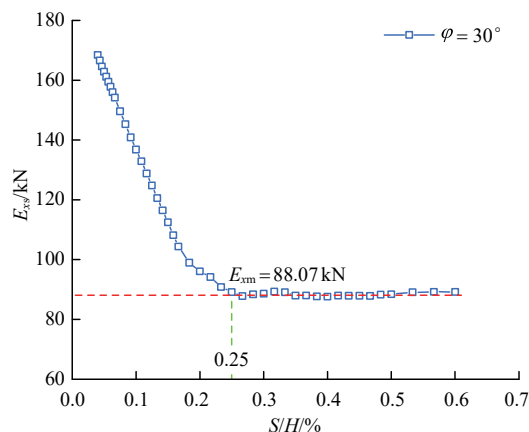
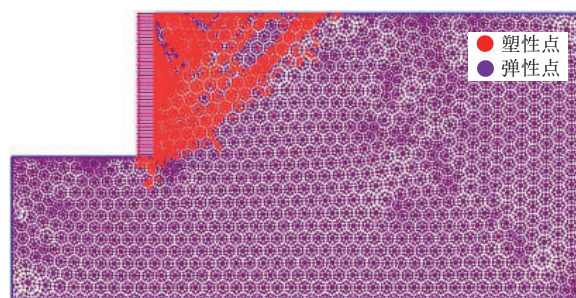


图 10 水平向土压力合力 E_{xs} 随墙体位移 S 的变化规律

Fig.10 Variation of horizontal earth pressure resultant force E_{xs} with wall displacement S



(a) $\varphi = 10^\circ$

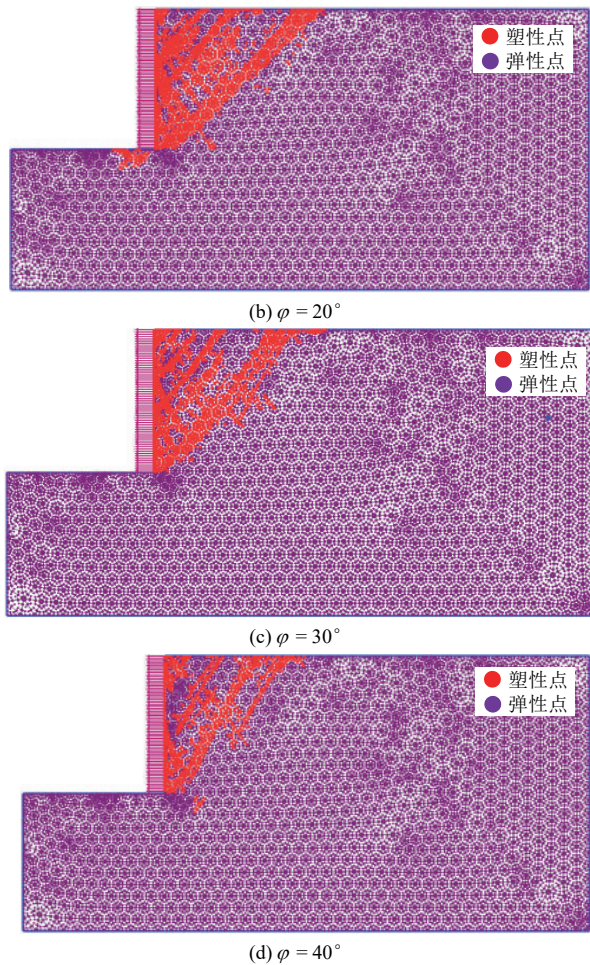
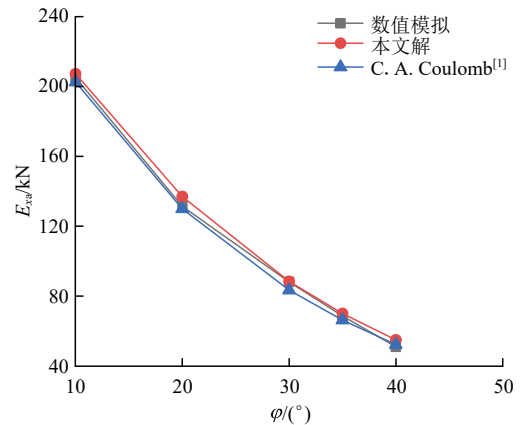


图 11 极限平衡状态下滑动土楔塑性区分布

Fig.11 Distribution of plastic zone in sliding soil wedge under limit equilibrium state

从图 10 可以看出,随着墙体位移量的增加,作用在墙体上的水平向土压力合力逐渐减小。当 $S/H = 0.25\%$ 左右时,水平向土压力合力达到最小值,并趋于稳定,取其平均值为 $E_{xm} = 88.07 \text{ kN}$,即为主动土压力 E_{xa} 。同理,可分别得出土体内摩擦角 $\varphi = 10^\circ, 20^\circ, 35^\circ, 40^\circ$ 时主动极限平衡状态下对应的土压力,如图 12 所示。当 $\varphi = 30^\circ, \delta = 30^\circ$ 时,采用本文公式解得主动土压力 $E_{xa} = 88.35 \text{ kN}$,Coulomb 解为 $E_{xa} = 83.38 \text{ kN}$,及 φ 分别为 $10^\circ, 20^\circ, 35^\circ, 40^\circ$ 相对应的主动土压力,结果如图 12 所示。为便于分析比较,同时给出了 φ 分别为 $10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$ 时极限平衡状态下滑动土楔的塑性区分布,如图 11 所示。

从图 11 可以看出,在极限平衡状态下,从挡土墙踵处斜向上形成一条贯通的塑性滑裂带,滑裂带上的土体全部进入了塑性状态,此时挡土墙背处土体也全部进入了塑性状态,滑动楔体内部分土体为塑性状态。当土体内摩擦角较小时,滑动楔体内大

图 12 不同计算方法水平向土压力合力 E_{xa} 的比较Fig.12 Comparison of horizontal earth pressure resultant force E_{xa} using different calculation methods

部分土体进入了塑性状态,如图 11(a), (b)所示。为本文的极限应力状态条件的假设提供了依据。同时可以看出,滑动楔体内进入塑性状态的比例与土体内摩擦角相关,随着土体内摩擦角的增加,进入塑性状态的土体比例呈减少趋势,如图 11(c), (d)所示。

从图 12 中可以看出,数值模拟、本文及 Coulomb 三者的计算结果较为接近,验证了本文方法的合理性与可行性。同时可以看出,模拟结果整体上介于本文与 Coulomb 的预测曲线之间,这也初步佐证了,本文提出的极限应力状态条件下的土压力为主动土压力的塑性上限解,Coulomb 土压力为塑性下限解的观点。

5 实例验证

为进一步验证本文计算方法的合理性及可行性,分别以 Z. V. Tsagareli^[3]的全尺模型试验及 Y. S. Fang 和 I. Ishibashi^[5]的模型试验结果与采用本文公式得到的土压力预测值进行对比分析。

5.1 Z. V. Tsagareli^[3]的模型试验

Z. V. Tsagareli^[3]曾进行了墙高 H 分别为 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0 m 的刚性挡土墙,在平移模式下主动土压力测量的模型试验。挡土墙墙背竖直,无黏性填土重度 $\gamma = 18.0 \text{ kN/m}^3$,无表面荷载作用,试验结果如图 13 所示。Z. V. Tsagareli^[3]根据滑裂面的形状,及以墙背光滑条件(墙土摩擦角 $\delta = 0^\circ$)下的 Coulomb 公式与试验数据拟合分析,估算出填土的内摩擦角 $\varphi = 37^\circ$ 。显然,由于忽略了墙土的摩擦作用,致使估算的土体内摩擦角与真实值发生了偏离。R. L. Handy^[14]对此试验数据分析表明,考虑墙土

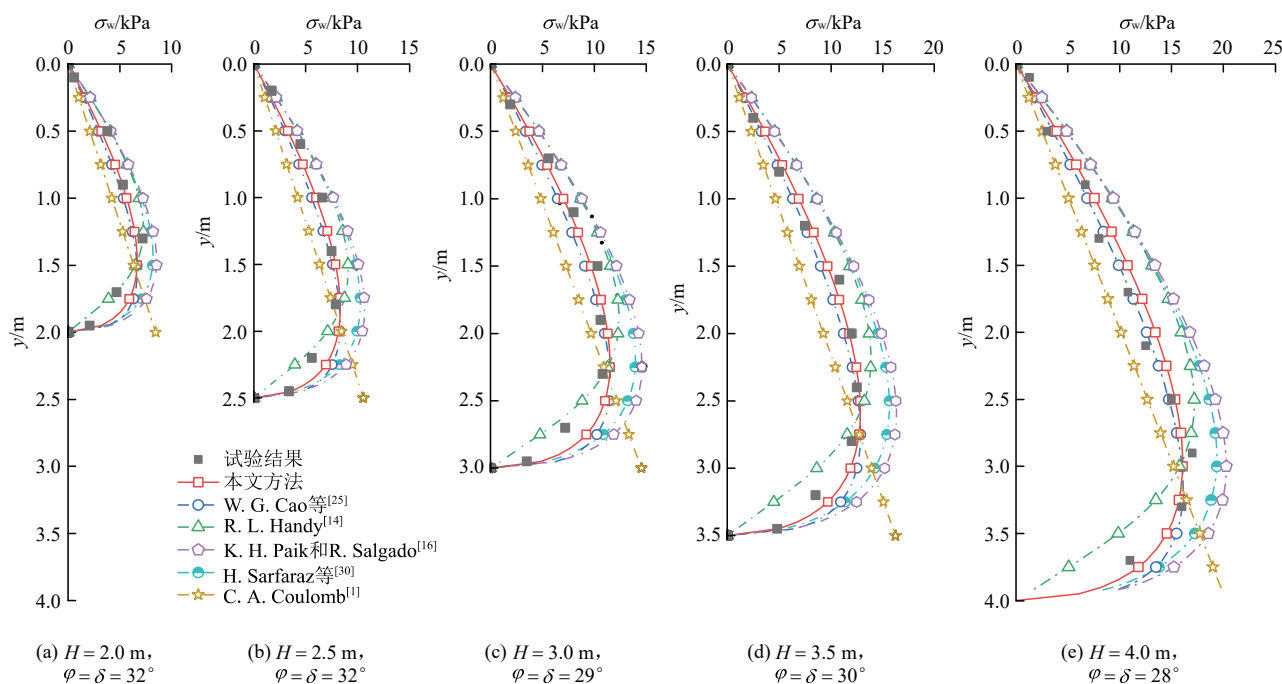


图 13 主动土压力分布曲线对比: Tsagareli 的模型试验

Fig.13 Comparison of active earth pressure distribution curves: Tsagareli's model test

界面的摩擦作用时, 取 $\varphi = \delta = 32^\circ$ 更为合适 ($H = 2.0$ m)。基于此, 本文根据模型实测的水平向合力, 考虑墙土界面充分摩擦的实际条件 (取 $\delta = \varphi$), 采用 Coulomb 土压力计算公式, 反演出 φ , δ 值。以墙高 $H = 2.0$ m 的模型试验为例, 其水平向的合力 (土压力强度分布曲线与墙高围成的面积) $E_{xa} = 8.51$ kN, 利用 Coulomb 公式, 可解得 $\varphi(\delta) = 32^\circ$, 与 R. L. Handy^[14] 结论一致。同理, 可反演出墙高 H 分别为 2.5, 3.0, 3.5, 4.0 m 时的 φ , δ 值, 如图 13 所示。在此基础上, 依据反演的 φ , δ 值, 基于 Coulomb 滑裂面, 本文的计算结果如图 13 所示。为便于分析比较, 同时给出了 C. A. Coulomb 等^[1, 14, 16, 25, 30] 的预测结果。

从图 13 中可以看出, Coulomb 的预测结果为线性分布, 而 R. L. Handy 等^[14, 16, 25, 30] 与本文的预测结果都呈非线性分布。R. L. Handy^[14] 的预测值在墙体的上部大于实测值, 在墙体的下部小于实测值; K. H. Paik 等^[16, 30] 的预测值整体上偏大于实测值, 且随着墙体高度的增加, 愈加明显; W. G. Cao 等^[25] 和本文的预测趋势趋于一致, 但相比较, 本文的预测结果更接近于试验值。

分析原因, 一方面 R. L. Handy 解^[14] 的滑裂面为 Rankine 滑裂面, 即滑裂角 $\alpha = \pi/4 + \varphi/2$, 实际上当挡土墙背与土体存在摩擦时, Rankine 滑裂面并非潜在滑裂面; 另一方面 R. L. Hand 解^[14] 是基于水平微分层在竖向建立微分平衡控制方程, 未考虑

水平方向力的平衡条件, 故也未考虑水平微分层上剪应力的作用。已有研究^[36] 表明, 忽略水平层间切向作用力将使挡土墙上部的主动土压力增加, 墙体底部附近的主动土压力减小, 且提高了土压力作用点的位置。而 K. H. Paik 等^[16, 30] 在求解时, 也假定滑裂面为 Rankine 滑裂面, 且以圆弧曲线薄层单元的土体竖向平均应力代替水平微分层的土体竖向平均应力。这无疑加大了土体的自重应力, 也即加大了土体的侧向作用。随着墙体高度的增加, 加大效应愈加明显, 如图 13 所示。本文以小主应力迹线分层的圆弧曲线薄层单元作为隔离体进行受力分析, 同时考虑了水平向与竖向力的平衡条件, 且基于薄层单元上下界面上主应力的特点, 有效地避免了水平分层法难以准确考虑土层间剪应力的实际情况, 在理论上确保了本文主动土压力的计算方法更具有合理性。通过与 Z. V. Tsagareli^[3] 的全尺模型试验结果对比分析, 在实践上验证了本文计算方法的合理性及可行性。

5.2 Y. S. Fang 和 I. Ishibashi^[5] 的模型试验

Y. S. Fang 和 I. Ishibashi^[5] 进行了编号为 #342 的直立挡墙在平移模式下的主动土压力试验, 墙高 $H = 1.015$ m, 墙后砂土重度 $\gamma = 15.4$ kN/m³, 内摩擦角 $\varphi = 34^\circ$, 墙土摩擦角 $\delta = 23.75^\circ$ ^[21], 土体表面荷载 $q = 0$ kN/m², 试验结果如图 14 所示。在图 14 中, 同时给出了本文, C. A. Coulomb 等^[1, 14, 16, 30] 的预测结果。

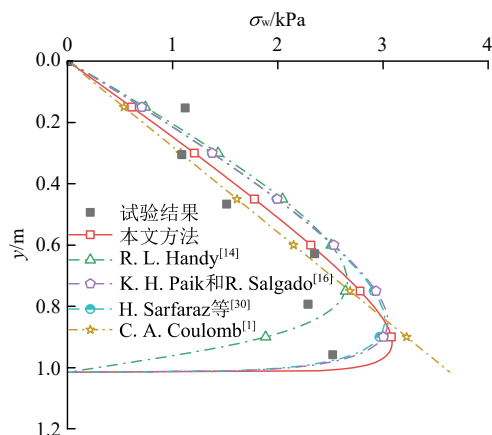


图 14 主动土压力分布曲线对比: Y. S. Fang 和 I. Ishibashi^[5] 的模型试验

Fig.14 Comparison of active earth pressure distribution curves: Y. S. Fang and I. Ishibashi's^[5] model test

从图 14 中可以看出, 本文的预测值与 Y. S. Fang 和 I. Ishibashi^[5]模型试验结果也较为吻合, 进一步验证了本文计算方法的合理性及可行性。

6 结 论

(1) 本文在 Coulomb 土压力理论上, 假设滑动土体处于极限应力状态, 并基于小主应力迹线分层的圆弧曲线薄层单元法, 建立了极限应力状态条件下挡土墙主动土压力的解析方法。通过数值模拟和与模型试验数据比较, 验证了本文方法的合理性和可行性。

(2) 理论分析表明, 主动土压力 σ_w 随深度呈凸形非线性分布, 挡土墙背的粗糙度, 即墙土摩擦角 δ 的取值, 对非线性分布形式有显著影响。当挡土墙背光滑时 ($\delta = 0^\circ$), 土压力分布退化为 Coulomb 直线分布; 随着墙土摩擦角 δ 的增大, 土压力分布曲线逐渐左移, 曲线的拐点位置升高, 非线性效应愈加明显。在墙的上部, 主动土压力 σ_w 大于 Coulomb 土压力, 在靠近墙的底部主动土压力衰减, 小于 Coulomb 土压力。当 $\delta = \varphi$ 时, 土压力曲线的非线性最为显著。

(3) 随着墙土摩擦角 δ 的增大, 主动土压力的合力减小; 合力作用点的位置升高; 对墙底的倾覆力矩则呈先减小后增大的趋势。

(4) 极限应力状态条件下挡土墙的主动土压力的合力是 Coulomb 土压力合力的外包络线, 基于 Mohr-Coulomb 强度理论, 推论出滑动土楔体处于极限平衡状态时内部单元的应力状态为: 挡土墙背光滑时 ($\delta = 0^\circ$), 滑动土楔体内部单元为极限应力

状态, 即为经典的 Rankine 土压力理论; 挡土墙背粗糙 ($\delta > 0^\circ$) 时, 滑动土楔体内部单元已进入塑性 - 破坏应力状态, 并随着挡土墙背粗糙度的增加, 塑性状态越显著。

(5) 数值模拟结果表明, 在极限平衡状态下, 从挡土墙踵处斜向上形成一条连通的塑性滑裂带, 该滑裂带上的土体全部进入塑性状态。挡土墙背面的土体也全部处于塑性状态, 滑动楔体内部分土体亦进入了塑性状态。土体进入塑性状态的比例与土体的内摩擦角相关。当土体的内摩擦角较小时, 滑动楔体内的大部分土体进入塑性状态; 随着土体内摩擦角的增加, 进入塑性状态的土体比例呈减少趋势。

(6) 本文提出的极限应力状态条件下的主动土压力为主动土压力的塑性上限解, Coulomb 土压力为塑性下限解。

参考文献(References):

- [1] COULOMB C A. Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs a la architecture[J]. Mém Sci Math Phys Acad Roy Paris, 1776, 7: 343 - 387.
- [2] RANKINE W. On the stability of loose earth[J]. Philosophical Transactions of The Royal Society of London, 1857, 147: 9 - 27.
- [3] TSAGARELI Z V. Experimental investigation of the pressure of a loose medium on retaining walls with a vertical back face and horizontal backfill surface[J]. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1965, 91(4): 197 - 200.
- [4] MATSUO M, KENMOCHI S, YAGI H. Experimental study on earth pressure of retaining wall by field tests[J]. Soils and Foundations, 1978, 18(3): 27 - 41.
- [5] FANG Y S, ISHIBASHI I. Static earth pressures with various wall movements[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 112(3): 317 - 333.
- [6] TAKE W A, VALSANGKAR A J. Earth pressures on unyielding retaining walls of narrow backfill width[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, 38(6): 1 220 - 1 230.
- [7] O'NEAL T S, HAGERTY D J. Earth pressures in confined cohesionless backfill against tall rigid walls—a case history[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, 48(8): 1 188 - 1 197.
- [8] KHOSRAVI M H, PIPATPONGSA T, TAKEMURA J. Experimental analysis of earth pressure against rigid retaining walls under translation mode[J]. Geotechnique, 2013, 63(12): 1 020 - 1 028.
- [9] 芮 瑞, 叶雨秋, 陈 成, 等. 考虑墙壁摩擦影响的挡土墙主动土压力非线性分布研究[J]. 岩土力学, 2019, 40(5): 1 797 - 1 804. (RUI Rui, YE Yuqiu, CHEN Cheng, et al. Nonlinear distribution of active earth pressure on retaining wall considering wall-soil friction[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(5): 1 797 - 1 804. (in Chinese))
- [10] 芮 瑞, 蒋 旺, 徐杨青, 等. 刚性挡土墙位移模式对土压力的影响试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2023, 42(6): 1 534 - 1 545. (RUI Rui, JIANG Wang, XU Yangqing, et al. Experimental study of

- the earth pressure on a rigid retaining wall for various patterns of movements[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2023, 42(6): 1 534 - 1 545.(in Chinese))
- [11] TERZAGHI K. Stress distribution in dry and in saturated sand above a yielding trap-door[C]// Proceedings of International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. [S. l.]: [s. n.], 1936: 307 - 311.
- [12] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: Wiley, 1943: 1 - 60.
- [13] КАГАН М Е О. Дав Лении на подпорную стенку при нелинейном его распределений[J]. Строительная механика и расчет сооружений, 1960, (6): 35 - 40.
- [14] HANDY R L. The arch in soil arching[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(3): 302 - 318.
- [15] WANG Y Z. Distribution of earth pressure on a retaining wall[J]. Geotechnique, 2000, 50(1): 83 - 88.
- [16] PAIK K H, SALGADO R. Estimation of active earth pressure against rigid retaining walls considering arching effects[J]. Geotechnique, 2003, 53(7): 643 - 653.
- [17] 应宏伟, 蒋波, 谢康和. 考虑土拱效应的挡土墙主动土压力分布[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(5): 717 - 722.(YING Hongwei, JIANG Bo, XIE Kanghe. Distribution of active earth pressure against retaining walls considering arching effects[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(5): 717 - 722.(in Chinese))
- [18] 章瑞文, 徐日庆. 土拱效应原理解挡土墙土压力方法的改进[J]. 岩土力学, 2008, 29(4): 1 057 - 1 060.(ZHANG Ruiwen, XU Riqing. Solution of problem of earth pressure on retaining wall calculated by method of soil arching effect[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(4): 1 057 - 1 060.(in Chinese))
- [19] 张永兴, 陈林. 挡土墙非极限状态主动土压力分布[J]. 土木工程学报, 2011, 44(4): 112 - 119.(ZHANG Yongxing, CHEN Lin. Active earth pressure on retaining walls in non-limit state[J]. China Civil Engineering Journal, 2011, 44(4): 112 - 119.(in Chinese))
- [20] LI J P, WANG M. Simplified method for calculating active earth pressure on rigid retaining walls[J]. International Journal of Geomechanics, 2014, 14(2): 282 - 290.
- [21] 刘忠玉, 陈捷. 平动模式下考虑剪应力作用的刚性挡土墙主动土压力计算[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(12): 2 254 - 2 261.(LIU Zhongyu, CHEN Jie. Active earth pressure against rigid retaining wall considering shear stress under translation mode[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(12): 2 254 - 2 261.(in Chinese))
- [22] KHOSRAVI M H, KARGAR A R, AMINI M. Active earth pressures for non-planar to planar slip surfaces considering soil arching[J]. International Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 14(7): 730 - 739.
- [23] 曹海莹, 刘杰峰, 武崇福, 等. 非极限状态主动土压力与填土张拉裂缝研究[J]. 中国公路学报, 2020, 33(1): 51 - 61.(CAO Haiying, LIU Jiefeng, WU Chongfu, et al. Active earth pressure and tensile crack of the fill in a non-limit state[J]. China Journal of Highway and Transport, 2020, 33(1): 51 - 61.(in Chinese))
- [24] 彭俊国, 朱彦鹏. 刚性挡土墙黏性填土被动土压力简化计算[J]. 工程力学, 2022, 39(5): 204 - 209.(PENG Junguo, ZHU Yanpeng. Simplified method for calculating the passive earth pressure of cohesive backfill against rigid retaining walls[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(5): 204 - 209.(in Chinese))
- [25] CAO W G, ZHANG H J, LIU T, et al. Analytical solution for the active earth pressure of cohesionless soil behind an inclined retaining wall based on the curved thin-layer element method[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 128: 103851.
- [26] 张慧姐, 曹文贵, 刘涛. 基于主应力迹线分层的挡墙被动土压力分析方法[J]. 岩土力学, 2020, 41(9): 3 022 - 3 030.(HANG Huijie, CAO Wengui, LIU Tao. Analysis method of passive earth pressure for retaining wall layered based on principal stress trajectory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(9): 3 022 - 3 030.(in Chinese))
- [27] 刘洋, 于鹏强. 刚性挡土墙平移模式的土拱形状与主动土压力分析[J]. 岩土力学, 2019, 40(2): 506 - 516.(LIU Yang, YU Pengqiang. Analysis of soil arch and active earth pressure on translating rigid retaining walls[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(2): 506 - 516.(in Chinese))
- [28] 王雨波, 曹文贵. 挡墙后土体应力状态与主动土压力计算分析[J]. 铁道科学与工程学报, 2022, 19(4): 949 - 957.(WANG Yubo, CAO Wengui. Calculation and analysis of soil stress state and active earth pressure behind retaining wall[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2022, 19(4): 949 - 957.(in Chinese))
- [29] XU L, CHEN H B, CHEN F Q, et al. An experimental study of the active failure mechanism of narrow backfills installed behind rigid retaining walls conducted using Geo-PIV[J]. Acta Geotechnica, 2022, 17(9): 4 051 - 4 068.
- [30] SARFARAZ H, KHOSRAV M H, PIPATPONGSA T. Theoretical and numerical analysis of cohesive-frictional backfill against battered retaining wall under active translation mode[J]. International Journal of Geomechanics, 2023, 23(6): 04023079.
- [31] 张恒志, 徐长节, 何寨兵, 等. 基于离散元方法的不同挡墙变位模式下有限土体主动土压力研究[J]. 岩土力学, 2022, 43(1): 257 - 267.(ZHANG Hengzhi, XU Changjie, HE Zhaibing, et al. Study of active earth pressure of finite soils under different retaining wall movement modes based on discrete element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, 43(1): 257 - 267.(in Chinese))
- [32] LAI F W, ZHANG N N, LIU S Y, et al. A generalised analytical framework for active earth pressure on retaining walls with narrow soil[J]. Géotechnique, 2024, 74(11): 1 127 - 1 142.
- [33] HARROP-WILLIAMS K. Arch in soil arching[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1989, 115(3): 415 - 419.
- [34] 蒋波. 挡土结构土拱效应及土压力理论研究[博士学位论文][D]. 杭州: 浙江大学, 2005.(JIANG Bo. Studies on soil arching effect and earth pressure for retaining structure[Ph. D. Thesis][D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005.(in Chinese))
- [35] 刘忠玉, 陈捷, 李东阳. 考虑剪应力作用的刚性挡土墙主动土压力分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(9): 2 443 - 2 450.(LIU Zhongyu, CHEN Jie, LI Dongyang. Calculation of active earth pressure against rigid retaining wall considering shear stress[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(9): 2 443 - 2 450.(in Chinese))
- [36] 李兴高, 刘维宁. 关于水平层分析法的讨论[J]. 岩土力学, 2009, 30(增2): 79 - 82.(LI Xinggao, LIU Weining. Discussion on horizontal slice method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(Supp.2): 79 - 82.(in Chinese))