



量子相位的公式表述和图像

姚志欣^{①*}, 钟建伟^②, 潘佰良^①

① 浙江大学物理学系, 杭州 310027;

② 杭州电子科技大学理学院, 杭州 310018

* E-mail: yaozx@zju.edu.cn

收稿日期: 2009-06-24; 接受日期: 2009-09-20

摘要 在深入剖析经典相位的基础上, 根据对量子力学基本观念的重新认识, 再次诠释了量子相位的概念: 它是角动量算符的正则共轭变量, 相应于经典框架下真实空间中的角坐标 φ , 但在量子框架下的 Hilbert 虚拟空间中却表现为复指数形式 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, 亦即数学上复数域著名的 Euler 公式. 尤其是当 $\varphi = \pi/2$ 时, 相应的量子相位即为单位纯虚数: $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$. 利用最近得到的光子态矢函数, 它作为光子 Schrödinger 方程的普遍解, 除了描述光子的能量特征和光子的动量特征之外, 关键是还包含了光子的角动量特征, 得以体现光子完整的量子行为, 我们据此具体讨论了光子角动量和光子相位的正则共轭关系, 分析了宏观的光波相位和微观的光子相位之间的内在联系和本质差异.

关键词

公式表述
量子相位
光子
态矢函数
极化

杨振宁先生^[1]在 2003 年发表了一篇关于近代科学史的百年回顾文章, 题目是《二十世纪理论物理学的主旋律: 量子化、对称性和相位因子》, 再次强调相位在量子理论中极为重要的作用. 文中引述了 Dirac 在 1972 年给出的著名论断: “相位是极其重要的, 因为它是所有干涉现象的根源, 但是它的物理意义却是语焉不详的”. 又是 6 年过去了, 今天的状况仍然如同 Dirac 当年指出的那样, 对于量子相位确切的物理意义究竟是什么? 学术界始终没有普遍认同的理解, 仅量子光学教科书里就有关于量子相位几种不同的定义, 典型并有普遍影响的是 Dirac 相位、Susskind-Glogower (SG) 相位和 Pegg-Barnett (PB) 相位^[2]. 虽然这些相位的定义各具特色, 但是都有内在的困难^[3]. 问题的关键还在于人们普遍认同正确定义的唯一性, 所以除非证明它们彼此之间等同, 如同在量

子力学的三种基本表现形式中, Schrödinger 的波动力学、Heisenberg 的矩阵力学和 Feynman 的路径积分已经被证明是等同的那样, 否则的话, 就目前有关量子相位定义的状况而言, 可以认为其中大部分的说法是不够恰当的, 至少是不够完善的. 现时的研究状况是: 一方面, 人们在理论上仍然不断地从各个方面进行深入有益的探讨^[4,5]; 另一方面, 在实验上却已经按照各自的理解广泛开展所谓量子相位的测量, 方兴未艾^[6]. 因此, 如何正确理解和认识量子相位的基本概念显得尤为迫切.

纵观量子力学的整个发展历史, 关于量子相位倒是早就有这么一种说法, 或许因为其过于原则性而几乎没有什么争议, 那就是在上个世纪 50 年代理论物理大师 Landau^[7]所说的: “当粒子系统的行为被一个称做波函数的归一化复函数 $\psi(t, \mathbf{r})$ 描述的时候,

引用格式: 姚志欣, 钟建伟, 潘佰良. 量子相位的公式表述和图像. 中国科学 G 辑, 2009, 39(12): 1699—1709

Yao Z X, Zhong J W, Pan B L. Formulation and picture of quantum phase. Sci China Ser G, 2009, 52(12): 1949—1960, doi: 10.1007/s11433-009-0298-4

允许存在一个表现形式为 $e^{i\delta}$ 的常数相位因子(phase factor), 其中 δ 是任意实数, 它们的乘积 $\psi(t, \mathbf{r})e^{i\delta}$ 等同于原先的波函数.” 他随即指出“这种不确定性原则上是无法消除的, 然而这并不重要, 因为它不影响任何物理结果”. 在随后的几十年里, 一些公理化形式表述的量子力学教科书已经将这种认识作为量子力学第一公理陈述^[8]. 我们认为Landau关于量子相位的论述, 尽管同样可以归属于上述被Dirac判断为语焉不详的范畴, 但是它广为流传至今, 在量子力学的长期实践过程中已经表明至少在数学形式上的正确性, 从而给我们指明了进一步探索量子相位真实含义的方向: 原则上不应该脱离复指数因子 $e^{i\delta}$ 的形式, 关键是给出其相关物理意义的合理解释. 回过头来对照上述无论Dirac相位、SG相位、PB相位, 还是其它有关量子相位的新定义^[9], 虽然形式各异, 但无一例外地都包含有复指数因子 $e^{i\delta}$, 这同样佐证了形式上的可取性和认识其相关物理意义的必要性.

量子相位和经典相位的物理概念当然是不一样的, 但这只是问题的一个方面; 而另一个方面, 就目前的讨论有可能更为重要的则是: 量子相位的物理概念只能建立在经典相位的物理概念基础上, 它必定是经典相位物理概念的某种拓展. 我们很容易反过来阐明这个基本判断, 如若量子相位的物理概念与经典相位的物理概念没有内在关联的话, 那又凭什么仿效经典相位而将其称做量子相位呢? 本文将从最基本的经典相位概念出发, 结合我们对光子角动量的最新认识^[10-12], 将光子的角动量本征值方程作为第三个量子化条件, 添加到光子的Schrödinger方程中去, 从而要求光子Schrödinger方程的形式解, 也就是上述Landau所指的波函数对光子而言必须具备矢量的形式, 我们将其命名为光子态矢函数. 论证主要说明的是: 与其说相位因子 $e^{i\delta}$ 附属于态矢函数, “不影响任何物理结果”, 还不如说它附属于态矢函数中的角动量本征矢量, 明显影响涉及角动量的测量结果. 在进一步分析光子相位和光波相位关系的基础上, 得以判断量子相位就是普通角坐标在Hilbert空间的复数表示, 同时成为角动量算符的正则共轭(canonically conjugate)变量.

1 经典相位的数学表示和物理图像

在经典力学里, 相位表现为周期运动最重要的

特征参量, 典型例子是质点的一维简谐振动:

$$z = z_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

(1)式给出了振动三要素: 振幅 z_0 、角频率 ω 和相位 $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$. 更为普遍的例子则是由矢径表征的质点在 X - Y 平面上的匀速圆周运动, 属于二维简谐振动:

$$\mathbf{r}(t) = r_0 [\mathbf{i} \cos(\omega t + \varphi_0) + \mathbf{j} \sin(\omega t + \varphi_0)]. \quad (2)$$

通常取振幅 $r_0 = 1$. 匀速圆周运动意味角频率 ω 取常数, 从而该质点在任何时刻 t 的特征仅取决于相位 $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$, 关键是初始相位 $\varphi_0 = \varphi(t=0)$ 的取值. (1)和(2)式都表明相位的本意是以 2π 为周期的运动在其运动周期中某一点的取值, (2)式则形象地将相位表示为矢径与 X 轴之间的夹角, 所以相位在经典力学里的物理图像就是角度或者角坐标(angular position). 有的著作进一步明确将这个角度称做相位角(phase angle), 还规定了相位角的符号, 即定义从 X 轴逆时针方向旋转到矢径得到的相位角为正值^[13].

众所周知, 振动在空间的传播形成波动, 容易得到沿坐标 Z 轴正方向传播单色平面波的一般表达式, 通常写成为

$$\mathbf{A}(t, z) = [\mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_0) + \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \varphi_0)], \quad (3)$$

其中已经取振幅 $A_0 = 1$. 类似于(2)式简谐振动的情况, 如(3)式所表示单色平面波的特征也完全取决于相位 $\varphi(t, z) = \omega t - \kappa z + \varphi_0$ 的取值, 但是由于这时相位已经不仅仅是时间的函数, 所以初始相位不是单值、不再有确切的含义, 习惯上将 $\varphi_0 = \varphi(t=0, z=0)$ 称做为这个波的固有(intrinsic)相位. 由于在简单的情况下一般都不考虑色散效应, 所以(3)式这种“单色波”意味这个波的角频率 ω 和波数 κ 都是常数, 从而在任何时刻 t 和传播位置 z 处这个波的特征仅取决于固有相位 φ_0 的取值. 此外, 容易确认这个波的相速度 v_{phase} 也是一个常数, 只要在这个波中追踪某个固定的相位值就可以得到. 具体的做法是令相位 $\varphi(t, z) = \omega t - \kappa z + \varphi_0 = C$ 是一个常数, 因为由此构成的等相位面表现为垂直于 Z 轴的平面, 所以才称做“平面波”; 进而对这个常数 C 求微分, 那么就有 $0 = \omega \cdot dt - \kappa \cdot dz$, 于是这个平面波沿 Z 轴方向传播的相速度就是 $v_{\text{phase}} = dz/dt|_{\text{phase}=C} = \omega/\kappa$ ^[13]. 由于表征振动方向的

基矢量 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 全都垂直于传播方向 z 轴, 所以(3)式这样的平面波是横波. 普通的光波当然也可以用(3)式描述, 这时的 $\mathbf{A}(t, z)$ 看成是标准化的光矢量: $[\mathbf{A}(t, z)]^2 \equiv 1$. 按照经典光学的相关规定, 当我们正对光源在固定点 $z = z_0 > 0$ 处观察时, 因为这个光矢量表现为逆时针方向的旋转, 所以称之为左旋圆偏振光^[14], 相应的也可以观察到光矢量顺时针方向旋转的右旋圆偏振光, 它的一般表达式是 $\mathbf{A}(t, z) = \mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_0) - \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \varphi_0)$. 但是原则上, 左旋圆偏振光和右旋圆偏振光可以具有各自不同的固有相位, 所以有必要将它们有所区别地重新表示为

$$\mathbf{A}_L(t, z) = \mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_L) + \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \varphi_L), \quad (4a)$$

$$\mathbf{A}_R(t, z) = \mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_R) - \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \varphi_R), \quad (4b)$$

其中 φ_L 和 φ_R 分别是左旋圆偏振光波和右旋圆偏振光波的固有相位. 又因为对于简谐光波来说相速度就是光速, 而光速是不变的, 所以对于在真空中传播的一切单色光波来说, 不仅这个波的角频率 ω , 而且它的波数 $\kappa = \omega/c$ 都是固定不变的, 本质上只有两种形式分别如同(4a)式那样的左旋圆偏振光和(4b)式那样的右旋圆偏振光, 其数学形式上的差异仅仅在于这两个等式各自右边第二项前的正号或负号. 由于数学恒等式 $\sin \varphi \equiv \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ 对任意角度 φ 都成立,

所以(4a)式所表示的任何位置 z 处、在 X - Y 平面上逆时针方向旋转的匀速圆周运动可以改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_L(t, z) &= [\mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_L) + \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \varphi_L)] \\ &= \mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_L) + \mathbf{j} \cos\left(\omega t - \kappa z + \varphi_L - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\equiv \mathbf{i} \cos \varphi_x + \mathbf{j} \cos \varphi_y, \end{aligned}$$

不仅可以看成是分别在 X 方向和 Y 方向两个标准化一维简谐振动的合成, 而且在任何的时间 t 和传播距离 z 处, 它们之间的相位差恒定为 $\varphi_x - \varphi_y \equiv \pi/2$; 类似地, 由(4b)式所表示的任何时间 t 和位置 z 处、在 X - Y 平面上顺时针方向旋转的匀速圆周运动也可以看成是 X 方向和 Y 方向两个标准化一维简谐振动的合成,

但是它们之间的相位差恒定为 $\varphi_x - \varphi_y \equiv -\pi/2$. 此外, 容易设想由(4a)式和(4b)式的线性叠加将给出沿 z 轴方向传播单色平面光波的一般表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, z) &= a\mathbf{A}_L(t, z) + b\mathbf{A}_R(t, z) \\ &= a[\mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_L) + \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \varphi_L)] \\ &\quad + b[\mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_R) - \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \varphi_R)], \end{aligned} \quad (5)$$

其中系数 a 和 b 分别是左旋圆偏振光和右旋圆偏振光的相对振幅, 这是因为经典光学认为强度正比于振幅的平方, 所以如果利用(5)式将强度的时间平均值归一化: 即取 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^2(t, z) dt = 1$, 那么导致的必

然结果就是 $a^2 + b^2 = 1$. 由此显而易见的是, 在该单色平面光波中左旋圆偏振光的相对份额是 a^2 , 右旋圆偏振光的相对份额是 b^2 , 自然有 $0 \leq a^2 \leq 1$, $0 \leq b^2 \leq 1$. 当 $a = 1$ 而 $b = 0$ 时, (5)式简化为(4a)式; 当 $a = 0$ 而 $b = 1$ 时, (5)式简化为(4b)式; 当 $a = b = 1/\sqrt{2}$ 时, (5)式简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{LR}(t, z) &= \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \kappa z + \frac{\varphi_L + \varphi_R}{2}\right) \\ &\quad \times \left[\mathbf{i} \cos\left(\frac{\varphi_L - \varphi_R}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\varphi_L - \varphi_R}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4c)$$

如果其中的 φ_L 和 φ_R 取固定值, 那么(4c)式代表线偏振光波, 具有固定不变的极化取向, 该极化取向与 X 轴之间的夹角即为极化角或偏振角 $\varphi_{\text{polar}} = (\varphi_L - \varphi_R)/2$, 而这个线偏振光波的固有相位则是 $\varphi_{\text{lin}} = (\varphi_L + \varphi_R)/2$; 如果 φ_L 和 φ_R 在其定义域中都是均匀分布的, 那么由此得到的线偏振光组合中所有极化角 $\varphi_{\text{polar}}^{\text{sym}} = (\varphi_L - \varphi_R)/2$ 和固有相位 $\varphi_{\text{lin}}^{\text{sym}} = (\varphi_L + \varphi_R)/2$ 的分布也将是均匀的, 这时的(4c)式描述自然光.

2 光子角动量和光子相位

根据量子力学原理的 Schrödinger 波动力学表述形式, 一切微观粒子的行为准则全都遵循广义的 Schrödinger 方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{r}) = \hat{H} \psi(t, \mathbf{r}), \quad (6)$$

其中 $\psi(t, \mathbf{r})$ 是描述该粒子系统量子状态的函数, 通

常称做态函数. 方程右边的 $\hat{H}$ 是粒子系统的量子 Hamilton 算符, 可以简单理解为能量算符 $\hat{E}$, 通常包括动能算符 $\hat{T}$ 和势能算符 $\hat{U}$, 形式上分别表现为动量算符 $\hat{p}$ 和坐标参量 $\mathbf{r}$ 的函数. 方程(6)左边相对于参量 t 的一阶微分算符 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 则是能量算符的普遍形式,

由于参量 t 在经典物理中通常表示为时间变量, 所以方程(6)习惯上被称做量子力学中的运动方程. 然而, 有一点需要特别强调指出的是, 方程(6)的定义域并不是在真实的物理空间(physical space), 而是在被称做 Hilbert 空间的虚拟空间 (virtual space), 其特点是作为该方程解的态函数不可以是实函数而必须是复函数, 这可以简单取方程右边的 $\hat{H} = E$ 为能量本征值, 进而从由此得到的能量本征值方程确认:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{r}) = E\psi(t, \mathbf{r}). \quad (7)$$

由于能量本征值一定是实数, 所以作为方程(7)形式解的态函数 $\psi(t, \mathbf{r})$ 只能是复函数; 倘或限定 $\psi(t, \mathbf{r})$ 只能是实函数, 那么从数学形式上就可以直接判断方程(7)无解. 由广义 Schrödinger 方程导出的能量本征值方程具有普遍的适用性, 它要求描述一切微观粒子量子行为的态函数 $\psi(t, \mathbf{r})$ 都必须取复函数形式, 所以能量本征值方程也就自然成为广义 Schrödinger 方程的量子化条件. 除此之外, 对于不论怎样的微观粒子, 原则上还有另外两个量子化条件, 分别是该微观粒子的动量本征值方程和角动量本征值方程, 由于本征值一定取实数, 所以它们也都要求相应的态函数取复函数形式. 与这些量子化条件关联的量子力学基本观念则是对出现在广义 Schrödinger 方程(6)中形式参量 t 和 $\mathbf{r}$ 的再认识, 它们如同量子态函数 $\psi(t, \mathbf{r})$ 一样, 同样也定义在抽象的 Hilbert 空间, 也就是说它们不再具备真实空间中时间和坐标的物理意义. 为了避免概念上的混淆, 有必要强调指出: 在量子力学理论体系中, 无论是包括 Schrödinger 方程在内的众多公式化表述, 还是各式各样的状态函数, 其中的参量 t 都应该理解为虚拟时间, 而参量 $\mathbf{r}$ 则应该理解为虚拟坐标. 除此之外, 本文将着重表明的是: 相对于经典力学里描述周期运动最重要的特征参量-经典

相位而言, 在量子力学里相应的量子相位亦将表现为虚拟形式. 运用量子理论处理实际问题的关键是从虚拟的公式表述中获取真实的物理图像, 采用这样的方式, 先前我们已经在描述激光束的 Laguerre-Gaussian 模式花样方面取得成功^[15], 下面我们将根据对量子相位的重新认识, 得以用类似的方式对光波的相位、光矢量的极化方向等宏观现象作出量子力学微观机制的物理解释.

对于光子来说, 可以认为它所处的势能状态等于零或者可以忽略不计, 继而根据光速不变原理, 故光子的 Hamilton 算符可以简单表示为 $\hat{H}_{\text{photon}} = \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\text{photon}} = -i\hbar \mathbf{c} \cdot \nabla$, 于是得到一阶偏微分方程形式的光子 Schrödinger 方程(为了简单起见, 以下简称为光子方程)^[10~12, 15]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\mathcal{A}(t, \mathbf{r})\rangle = -i\hbar \mathbf{c} \cdot \nabla |\mathcal{A}(t, \mathbf{r})\rangle, \quad (8)$$

其中 $|\mathcal{A}(t, \mathbf{r})\rangle$ 是光子方程在满足三个量子化条件下的形式解, 特别是我们补充的角动量本征值方程, 它除了和能量本征值方程、动量本征值方程一样要求作为光子方程形式解的态函数 $\psi(t, \mathbf{r})$ 必须取复数形式之外, 还进一步要求表现为复矢量形式 $\psi(t, \mathbf{r}) \Rightarrow \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{r})$. 也正是因为这个原因, 所以我们将其称做光子态矢函数, 以区别于没有考虑角动量行为时的光子态函数. 在柱面极坐标系里微观粒子角动量本征值方程的一般形式是^[16]

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(t, \mathbf{r}) = L_z \psi(t, \mathbf{r}), \quad (9)$$

式中 $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} = \hat{L}_z(\varphi)$ 是对应 Z 轴的角动量算符, φ 是围绕 Z 轴的角坐标, 正如上面对虚拟坐标参量 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \varphi, z)$ 已经指出的那样, 其中参量 φ 同样定义在抽象的 Hilbert 空间, 它与普通的角坐标只是数学符号的一致, 除非回复到真实的物理空间, 否则不能直接等同于真实的角坐标概念. 对于普通光子而言, $L_{z\pm} = \pm\hbar$ 是光子在动量方向(选取为 Z 轴正方向)仅有的一对角动量本征值, 从角动量本征值方程(9)出发, 很容易在柱面极坐标系里得到作为该方程形式解的一对角动量本征函数:

$$\psi_+(t, \mathbf{r}) = \psi_{+0}(t, r, z) e^{i\varphi}, \quad (10a)$$

$$\psi_-(t, \mathbf{r}) = \psi_{-0}(t, r, z) e^{-i\varphi}. \quad (10b)$$

直接代入方程(9)运算容易确认它们对应的本征值分别是 $L_{z+} = +\hbar$ 和 $L_{z-} = -\hbar$. 这对角动量本征函数中与角动量本征值方程直接有关的作用项是复指数因子 $e^{i\varphi}$ 和 $e^{-i\varphi}$, 而它们的关联系数 $\psi_{+0}(t, r, z)$ 和 $\psi_{-0}(t, r, z)$ 则是与变量 φ 无关的任意形式函数. 问题的关键并不在于角动量本征值方程本身, 而是在于量子力学基本法则的要求: 相应同一个量子算符但分别对应于两个不同本征值的本征函数必须相互正交^[16]. 正是由于相关的复指数因子 $e^{i\varphi}$ 和 $e^{-i\varphi}$ 的乘积在任何乘法法则的情况下都不可能等于零, 无法满足正交性要求, 所以这对角动量本征函数 $\psi_+(t, \mathbf{r})$ 和 $\psi_-(t, \mathbf{r})$ 的正交性只能通过与各自复指数因子的关联系数得以实现, 也就是说必须将这对关联系数矢量化并使它们相互正交. 先前的文章已经在柱面极坐标系里得到了一对既符合光子方程, 又满足三个充分必要量子化条件, 即光子的能量、动量和角动量本征值方程的各自归一、相互正交的标准化光子态矢函数^[15]:

$$|\mathcal{A}_+(t, \varphi, z)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi} \exp[-i(\omega t - \kappa z)], \quad (11a)$$

$$|\mathcal{A}_-(t, \varphi, z)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi} \exp[-i(\omega t - \kappa z)]. \quad (11b)$$

不仅对上述关联系数 $\psi_{+0}(t, r, z)$ 和 $\psi_{-0}(t, r, z)$ 实施了正交矢量化, 而且兼顾了另外两个量子化条件、即能量本征值方程和动量本征值方程的要求:

$$\begin{aligned} \psi_{+0}(t, r, z) &\Rightarrow \psi_{+0}(t, z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi) \exp[-i(\omega t - \kappa z)], \quad (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{-0}(t, r, z) &\Rightarrow \psi_{-0}(t, z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r - i\mathbf{e}_\varphi) \exp[-i(\omega t - \kappa z)]. \quad (12b) \end{aligned}$$

它们也是 Hilbert 空间中一对标准化的正交共轭矢量. (11a)和(11b)式中的复指数因子项 $e^{-i\omega t}$ 是能量本征值方程的要求, 而 $e^{i\kappa z}$ 则是动量本征值方程的要求, 这两个式子各自的归一性和它们相互之间的正交性很容易通过直接演算得到验证, 例如:

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}_+(t, \varphi, z) | \mathcal{A}_+(t, \varphi, z) \rangle \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi} e^{-i(\omega t - \kappa z)} \right]^* \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi} e^{-i(\omega t - \kappa z)} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \cdot (i\mathbf{e}_\varphi) - i\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_r - i\mathbf{e}_\varphi \cdot (i\mathbf{e}_\varphi)] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 0 - 0 - (i)^2] = 1, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}_-(t, \varphi, z) | \mathcal{A}_+(t, \varphi, z) \rangle \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi} e^{-i(\omega t - \kappa z)} \right]^* \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi} e^{-i(\omega t - \kappa z)} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{i2\varphi} [\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \cdot (i\mathbf{e}_\varphi) + i\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi \cdot (i\mathbf{e}_\varphi)] \\ &= \frac{1}{2} e^{i2\varphi} [1 + 0 + 0 + (i)^2] = 0. \end{aligned}$$

下面的讨论在直角坐标系里会比较方便, 从柱面极坐标系 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ 到直角坐标系 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 的坐标基矢变换关系是:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (13)$$

将(13)式给出的基矢量变换关系直接代入(11a)和(11b)式, 经过并不复杂的三角函数和复指数函数的运算, 容易得到这对光子态矢函数在直角坐标系中的表达式, 简单表示为仅有一个空间变量 $\mathbf{z}$ 的一维形式^[10-12, 15]:

$$|\mathcal{A}_+(t, z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp[-i(\omega t - \kappa z)], \quad (14a)$$

$$|\mathcal{A}_-(t, z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp[-i(\omega t - \kappa z)]. \quad (14b)$$

借用上述 Landau 的观点, 对于描述任何粒子系统行为的归一化波函数, 允许存在一个表现形式为 $e^{i\delta}$ 的常数相位因子. 光子的情况也不例外, 所以上述描述光子行为的这对归一化光子态矢函数(14a)和(14b)式可以有各自不同的相位因子 $e^{-i\alpha}$ 和 $e^{-i\beta}$. 这里指数上的因子改取负号只是为了下面导出的光波公式

与经典光波公式(5)在表达形式上的一致. 于是这对各自归一、相互正交的光子本征态矢函数的一般表达式是

$$|\mathcal{A}_+(t, z)\rangle_{\text{phase}} = e^{-i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp[-i(\omega t - \kappa z)], \quad (15a)$$

$$|\mathcal{A}_-(t, z)\rangle_{\text{phase}} = e^{-i\beta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp[-i(\omega t - \kappa z)]. \quad (15b)$$

(15a)和(15b)式的本质差异, 只是在于由它们描述光子的角动量本征值分别是 $L_{z+} = \hbar$ 和 $L_{z-} = -\hbar$, 仅此而已; 准确地说它们描述的光子处于相同的能量本征态和动量本征态, 但却是两个不同的角动量本征态. 正是因为如此, 所以与其说这两个相位因子 $e^{-i\alpha}$ 和 $e^{-i\beta}$ 分别附属于两个如(14a)式 $|\mathcal{A}_+(t, \mathbf{r})\rangle$ 和(14b)式 $|\mathcal{A}_-(t, \mathbf{r})\rangle$ 那样不同的态矢函数, 还不如说它们分别

附属于两个如 $|\mathcal{L}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{j})$ 和 $|\mathcal{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{i} \cdot \mathbf{j})$ 那样不同的角动量本征矢量,

于是我们将 α 和 β 称做角动量本征值分别为 $L_{z+} = \hbar$ 和 $L_{z-} = -\hbar$ 光子的固有相位. 由于普通光子角动量本征值只有 $L_{z+} = \hbar$ 和 $L_{z-} = -\hbar$ 两个取值, 所以对于光子来说, 只要它同时属于 $E = \hbar\omega$ 的能量本征态和 $p_z = \hbar\kappa$ 的动量本征态, 那么根据量子力学中的态叠加原理^[7], 不论它们的角动量状态究竟如何, 这类光子都可以由这两个各自归一化的态矢函数的一般表达式, 也就是(15a)和(15b)式的线性叠加得到^[10~12,15,17,18]:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(t, z)\rangle &= \sigma_+^{(1)} |\mathcal{A}_+(t, z)\rangle_{\text{phase}} + \sigma_-^{(1)} |\mathcal{A}_-(t, z)\rangle_{\text{phase}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sigma_+^{(1)} e^{-i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \sigma_-^{(1)} e^{-i\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right] \\ &\quad \times \exp[-i(\omega t - \kappa z)]. \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式是光子态矢函数的一般表达式: 任何以能量 $E = \hbar\omega$ 为标志的普通光子, 如果选取它的动量方向作为坐标 Z 轴的正方向, 那么该方向的动量分量就是 $p_z = \hbar\kappa$, 光子在该方向的角动量取值只有两种可能, 分别是 $L_{z+} = \hbar$ 和 $L_{z-} = -\hbar$, 相应的相位分别是 α 和 β , 相应的概率幅分别是 $\sigma_+^{(1)}$ 和 $\sigma_-^{(1)}$. 通过直接演

算, 容易验证由态矢函数(16)式描述的光子具有角动量期望值 $\overline{L_z} = \langle \mathcal{A}(t, z) | -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} | \mathcal{A}(t, z) \rangle =$

$\hbar \left[\left(\sigma_+^{(1)} \right)^2 - \left(\sigma_-^{(1)} \right)^2 \right]$. (16)式的归一化表示是

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t, z) | \mathcal{A}(t, z) \rangle &= \left[\sigma_+^{(1)} e^{i\alpha} \langle \mathcal{A}_+ | + \sigma_-^{(1)} e^{i\beta} \langle \mathcal{A}_- | \right] \\ &\quad \times \left[\sigma_+^{(1)} e^{-i\alpha} | \mathcal{A}_+ \rangle + \sigma_-^{(1)} e^{-i\beta} | \mathcal{A}_- \rangle \right] \\ &= \left[\sigma_+^{(1)} \right]^2 \langle \mathcal{A}_+(t, z) | \mathcal{A}_+(t, z) \rangle \\ &\quad + e^{i(\alpha-\beta)} \sigma_+^{(1)} \sigma_-^{(1)} \langle \mathcal{A}_+ | \mathcal{A}_- \rangle \\ &\quad + \sigma_-^{(1)} \sigma_+^{(1)} e^{i(\beta-\alpha)} \langle \mathcal{A}_- | \mathcal{A}_+ \rangle + \left[\sigma_-^{(1)} \right]^2 \langle \mathcal{A}_-(t, z) | \mathcal{A}_-(t, z) \rangle \\ &= \left[\sigma_+^{(1)} \right]^2 + \left[\sigma_-^{(1)} \right]^2 = 1. \end{aligned}$$

不仅表示总的光子概率等于单位 1, 而且其中实系数 $\sigma_+^{(1)}$ 和 $\sigma_-^{(1)}$ 分别是角动量为 $L_{z+} = \hbar$ 和 $L_{z-} = -\hbar$ 光子的概率幅, 符号中的右上标(1)表示普通光子的角动量量子指标数 $l=1$.

3 光子的相位因子和概率幅决定了光波的干涉行为

光波的电磁矢势可以由光子态矢函数的实部表示^[10~12,15,17,18], 其公式表述是

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \text{Re} |\mathcal{A}(t, \mathbf{r})\rangle. \quad (17)$$

将光子态矢函数(16)式直接代入(17)式的右边, 经过简单的代数运算, 我们得到利用光子的微观参量描述单色平面光波全部性质的电磁矢势的解析表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, z) &= \frac{\sigma_+^{(1)}}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \alpha) + \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \alpha) \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_-^{(1)}}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{i} \cos(\omega t - \kappa z + \beta) - \mathbf{j} \sin(\omega t - \kappa z + \beta) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

这些光子的基本特征是: 每个光子的能量都是 $E = \hbar\omega$, 所有光子都沿着 Z 轴的正方向运动, 每个光子动量的 Z 分量都是 $p_z = \hbar\kappa$. 其中左旋光子、也就是在 Z 轴方向的角动量本征值 $L_{z+} = \hbar$ 光子的概率幅 $\sigma_+^{(1)}$ 、固有相位 α ; 右旋光子、也就是在 Z 轴方向的角动量本征值 $L_{z-} = -\hbar$ 光子的概率幅 $\sigma_-^{(1)}$ 、固有相

位 β . 将(18)式比照(5)式, 参照上述(4a)~(4c)式的说明, 不仅再次表明了众所周知的事实: 单色平面光波是由单一能量、沿着同一方向传播光子组成的, 光波的频率是光子能量的体现, 由于光子能量的单一, 所以光波的频率(颜色)才是单一的, 光波的波矢是光子动量的体现, 由于光子动量方向的一致, 所以光波的波阵面才是平面; 而且进一步表明左旋圆偏振光波是左旋光子的体现, 左旋圆偏振光波的固有相位 φ_L 就是左旋光子的固有相位 α , 右旋圆偏振光波是右旋光子的体现, 右旋圆偏振光波的固有相位 φ_R 就是右旋光子的固有相位 β , 左旋光子和右旋光子的组合构成光波的一切偏振形态. 正是因为描述角动量本征值 $L_{z+} = \hbar$ 光子的本征态矢函数(15a)式的实部相当于描述左旋圆偏振光波的(4a)式, 所以我们才将具有角动量本征值 $L_{z+} = \hbar$ 的光子称做左旋光子, 并类似的将具有角动量本征值 $L_{z-} = -\hbar$ 的光子称做右旋光子. 在此需要再次强调的是左旋光子并不意味着光子真的在做逆时针旋转, 因为描述光矢量逆时针旋转并命名为左旋圆偏振光波的(4a)式仅仅是大量左旋光子的宏观表现, 决不代表个别左旋光子的真实行为; 描述左旋光子全部量子行为的是本征态矢函数(15a)式, 但它是复矢量函数形式, 定义在抽象的Hilbert空间, 在真实的物理空间是无法显示的; 类似的, 右旋光子也做相应的理解. 需要指出的是, (5)式中左旋和右旋圆偏振光的相对振幅 a 和 b 虽然分别相应于左旋和右旋光子的概率幅 $\sigma_{+1}^{(1)}$ 和 $\sigma_{-1}^{(1)}$, 但是这两者并不能完全等同. 这是由于一方面, 概率幅 (probability amplitude^[19])是量子力学中的特有概念; 而另一方面, 经典物理一般并没有相对振幅的概念, 或者说振幅往往没有实际意义, 例如理想的单摆运动就与振幅无关, 或许正是这个缘故, 经典的简谐运动往往取振幅等于单位 1, 如同上面的(2)和(3)式那样.

正如上面论证已经表明了的, 当考虑光子角动量的情况时, 与其说相位因子附属于光子的态矢函数, 还不如说附属于其中的角动量本征矢量, 也就是角动量本征状态. 除此之外, 我们先前的研究还表明, 当涉及光子角动量的情况时, 物理测量的结果将明显受到相位因子的影响. 以双孔干涉实验中的两束光波为例, 干涉条纹取决于每束光波中光子的特征,

这些光子除了必须具有相同的能量和动量等一般性的要求之外, 关键在于由相同的或不同的角动量所表示的特征(相位和概率幅), 其干涉分布函数对整个空间的积分平均值可以用公式表述为^[18]

$$\begin{aligned} \overline{P_{\text{int}f}}(a, b, \sigma_{+1}^{(1)}, \sigma_{-1}^{(1)}, \sigma_{+2}^{(1)}, \sigma_{-2}^{(1)}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \\ = 2ab \left[\sigma_{+1}^{(1)} \sigma_{+2}^{(1)} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \sigma_{-1}^{(1)} \sigma_{-2}^{(1)} \cos(\beta_1 - \beta_2) \right] \\ \times \frac{\sin \kappa d}{\kappa d}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\kappa \equiv \omega/c$ 看作常数, 原因是参与干涉的光子必须具有相同的能量 $E = \hbar\omega$ 和动量 $\mathbf{p} = \hbar\boldsymbol{\kappa}$; d 是双孔间距; $\frac{\sin \kappa d}{\kappa d}$ 即是以光子的能量和实验的几何布置确

定的干涉函数^[17,18]. 如果公式(19)恒等于零 $\overline{P_{\text{int}f}} = 0$, 那就没有干涉, 否则就有可能发生干涉, 包括发生了干涉而在宏观上观察不到的情况. $\overline{P_{\text{int}f}}$ 是否恒等于零, 完全取决于由相位因子和概率幅构成的组合系数

$C_{\text{comb}} = 2ab \left[\sigma_{+1}^{(1)} \sigma_{+2}^{(1)} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \sigma_{-1}^{(1)} \sigma_{-2}^{(1)} \cos(\beta_1 - \beta_2) \right]$, 这里的 a 和 b 是光子分处两束光波的概率幅、亦即光子分别通过双孔的概率幅, 满足 $a^2 + b^2 = 1$; $\sigma_{+1}^{(1)}$ 和 α_1 分别是通过第一个小孔光束中左旋光子的概率幅和相位, $\sigma_{-1}^{(1)}$ 和 β_1 分别是通过第一个小孔光束中右旋光子的概率幅和相位, 满足 $\left[\sigma_{+1}^{(1)} \right]^2 + \left[\sigma_{-1}^{(1)} \right]^2 = 1$; $\sigma_{+2}^{(1)}$ 和 α_2 则是通过第二个小孔光束中左旋光子的概率幅和相位, $\sigma_{-2}^{(1)}$ 和 β_2 是通过第二个小孔光束中右旋光子的概率幅和相位, 满足 $\left[\sigma_{+2}^{(1)} \right]^2 + \left[\sigma_{-2}^{(1)} \right]^2 = 1$. $C_{\text{comb}} = 1$

对应完全的双孔干涉效应, 而 $C_{\text{comb}} \equiv 0$ 则表明不存在双孔干涉效应. 公式(19)的功效, 大致可以归纳为以下几点: (i) 如果 $a=1$ 而 $b=0$, 或者 $a=0$ 而 $b=1$, 那么都有 $C_{\text{comb}} \equiv 0$, 也就是说如果在双孔干涉实验中, 人为地遮住其中任何一个孔, “单孔”不可能发生干涉. 尽管这是毫无疑问的常识, 但是据我们所知, 这是第一次的公式表述. (ii) 如果 $\sigma_{+1}^{(1)}=1$ 而 $\sigma_{-1}^{(1)}=0$, 同时有 $\sigma_{+2}^{(1)}=0$ 而 $\sigma_{-2}^{(1)}=1$; 或者 $\sigma_{+1}^{(1)}=0$ 而

$\sigma_{-1}^{(1)}=1$, 同时有 $\sigma_{+2}^{(1)}=1$ 而 $\sigma_{-2}^{(1)}=0$; 那么都有 $C_{\text{comb}}=0$, 也就是说在左旋光子与右旋光子之间绝对不可能发生干涉. (iii) 如果 $\Delta\alpha \equiv \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ 而且 $\Delta\beta \equiv \beta_1 - \beta_2 = 0$, 即分别通过双孔的两个光束中的光子具有相同的相位, 无论它们是左旋光子还是右旋光子, 那么干涉效应与光子相位的具体取值无关; 如果 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\beta$ 全都是均匀分布的, 由于余弦函数在其周期 T 内的平均值恒等于零, 即 $\overline{\cos\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos\varphi \cdot d\varphi = 0$, 必将导致 $\overline{C_{\text{comb}}} = 0$ ^[17,18], 尽管有可能发生干涉, 但宏观上却观察不到干涉条纹. 传统的双孔干涉实验, 分别通过双孔形成的两束光波, 无论来自于古老的点光源或者近代的激光源, 都有 $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0$, 而且 $a = b = \sqrt{2}/2$, $\sigma_{+1}^{(1)} = \sigma_{-1}^{(1)} = \sigma_{+2}^{(1)} = \sigma_{-2}^{(1)} = \sqrt{2}/2$, 从而确保 $C_{\text{comb}} = 1$ 观察到最大的双孔干涉效应.

公式(19)不仅证实了上述 Dirac 的著名论断: “相位是极其重要的, 因为它是所有干涉现象的根源, ...”, 而且清楚地表明, 这里的相位并非对应于光波的经典相位, 而是对应于光子角动量特征的光子相位, 充分显示出它们的物理意义. 除此之外, 公式(19)还进一步表明光子概率幅在双孔干涉效应中的作用, 这里光子概率幅的概念不仅由于角动量本征值的差异造成光子类别的不同, 而且还在于发生干涉的两束光波, 所以既有光子分别通过双孔的概率幅 a 和 b , 又有通过第一个小孔光束中左旋光子的概率幅 $\sigma_{+1}^{(1)}$ 和右旋光子的概率幅 $\sigma_{-1}^{(1)}$, 还有通过第二个小孔光束中左旋光子的概率幅 $\sigma_{+2}^{(1)}$ 和右旋光子的概率幅 $\sigma_{-2}^{(1)}$.

4 Hilbert 空间的奇异特性

周光召先生在纪念量子论诞生 100 周年的报告中强调指出: 量子力学的发现者们除了在物理方面具有深厚的理论和实验知识外, 关键是他们还掌握了数学的最新发展, 如 Hilbert 空间^[20]. 虽然现在距离那些发现者们的时代已经过去了 80 多年, 但是数学上抽象的 Hilbert 空间与物理上真实空间的本质区别以及 Hilbert 空间在量子物理学中所起的关键性作用

至今并没有被充分认识到. 对于物理工作者来说, 最简单的理解或许就是 Hilbert 空间因为有复数表示而显示出来的虚拟特征, 物理上我们无法知道一个纯虚数 $i = \sqrt{-1}$ 究竟能够用什么具体形态来表现? 或者说它表现的是什么样的物理图像? 所以正如上面论述的那样, 由于光子的量子化条件(光子的能量、动量和角动量本征值方程)的要求, 光子态矢函数必须表现为复矢量形式, 所以我们根本无法知道光子态矢函数究竟是怎样的形态. 尽管我们知道根据公式(17), 即取复矢量形式的光子态矢函数公式(16)的实部, 导出的公式(18)可以完整地表现一个单色平面光波, 但是严格地说, 我们并不能据此将此态矢函数、即公式(16)本身称做单色平面波. 然而在极其大量的科普文章甚至教科书中, 还是不乏将光子态函数称做平面波的. 纵观整个量子力学的发展历史, 看来人们已经习惯于这样的称呼, 包括上面我们对左旋光子和右旋光子的称呼. 尽管如此, 还是有必要在这里指出: 量子力学中的平面波并不是真正的平面波, 真正的平面波只是光子态矢函数在宏观世界的物理表现而已; 左旋光子和右旋光子的称呼并不表示光子真的在做旋转运动; 至于本文阐述的量子力学中的相位因子, 正如文章开始指出的那样, 量子相位定义在抽象的 Hilbert 空间, 绝不能等同于定义在真实物理空间的经典相位. 我们的任务只不过是勾画出两者的关系, 或者说是努力表明与经典相位有关的物理概念是如何通过量子相位体现出来的.

除此之外, 抽象的 Hilbert 空间除了上面所讲的复数表示之外, 还有一个极其重要的特征可由上述(14a)和(14b)式中包含的一对标准化 Jones 矢量表现出来, 它们表示为

$$|\mathcal{L}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + i \cdot j), \quad (20a)$$

$$|\mathcal{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - i \cdot j), \quad (20b)$$

在经典光学中, 它们只是作为一种描述偏振光波的数学工具, 不具备物理含义^[21]. 但是在量子光学中, 这对 Jones 矢量却可以成为光子角动量算符

$\hat{L}_z = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ^[22]的本征矢量, 相应的本征值分别

是 $L_{z+} = \hbar$ 和 $L_{z-} = -\hbar$. 在数学形式上, 它们的表现是互为复共轭: $|\mathcal{L}\rangle^* = \langle\mathcal{L}| = |\mathcal{R}\rangle$ 和 $|\mathcal{R}\rangle^* = \langle\mathcal{R}| = |\mathcal{L}\rangle$, 除了各自归一、相互正交等标准化特征之外, 正如在上述光子态矢函数的正交性推导过程中显示出来的那样, 这对本征复矢量在普通的乘法法则下, 它们各自的平方、或者说自积恒等于零:

$$\begin{aligned} (|\mathcal{L}\rangle)^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i+i\cdot j) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(i+i\cdot j) \\ &= \frac{1}{2} \left[i\cdot i + i\cdot j + j\cdot i + (i)^2 j\cdot j \right] \\ &= \frac{1}{2} [1+0+0+(-1)] = 0, \\ (|\mathcal{R}\rangle)^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i-i\cdot j) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(i-i\cdot j) \\ &= \frac{1}{2} \left[i\cdot i - i\cdot j - j\cdot i + (-i)^2 j\cdot j \right] \\ &= \frac{1}{2} [1-0-0+(-1)] = 0. \end{aligned}$$

尽管在推导过程中利用了纯虚数的平方等于负 1 ($i\cdot i \equiv i^2 \equiv -1$) 的定义, 但其中的内涵显然超出了复数的一般概念, 它有助于我们正确理解量子理论中的所谓“真空态”(vacuum state^[23]): 在真实的物理空间, 真空用数学中的“0”表示, 意味着什么都没有; 但是对 Hilbert 空间中的“0”, 或者说在量子真空中, 却是怎样的量子态都有可能存在! 这是因为任何一对彼此正交的复共轭矢量, 犹如上面 $|\mathcal{L}\rangle^* = \langle\mathcal{L}| = |\mathcal{R}\rangle$ 和 $|\mathcal{R}\rangle^* = \langle\mathcal{R}| = |\mathcal{L}\rangle$ 所显示出来的那样, 它们的自积 $(|\mathcal{L}\rangle)^2 = \langle\mathcal{R}||\mathcal{L}\rangle = 0$ 和 $(|\mathcal{L}\rangle)^2 = \langle\mathcal{L}||\mathcal{R}\rangle = 0$ 都等于零. 这也是量子概念区分于经典概念的一个特征表现——“无中生有 (something for nothing^[24])”, 正是由于量子真空中什么样的量子态都有, 所以我们才得以理解为什么当微观粒子的产生算符作用于真空态时, 可以得到相应于该微观粒子的量子态, 不仅由于量子态的虚拟表示, 而且在于虚拟真空中充盈着极其丰富的量子态. Hilbert 空间的量子真空中什么样的量子态都有的量子概念, 值得深思和进一步探讨.

5 量子图像

量子力学理论体系建立在抽象的 Hilbert 数学空

间, 其中的事物具有特殊的规律, 这种规律用我们日常生活中的经验是无法理解的. 在 Hilbert 空间里描述的一切, 无论是上述光子态矢函数本身, 还是它所描述光子的“运动”都是虚拟的: 比如“左旋”光子并不意味着迎面而来的光子真的如同一个逆时针方向旋转的陀螺, 而只是意味这时所有光子的角动量都取 $L_{z+} = \hbar$ 本征值, 描述这类光子量子行为的光子态矢函数的实部表示左旋圆偏振光波; 在 Hilbert 空间, 即使描述中使用了原先在真实空间用同样符号标示的参量, 无论它们表示的是时间 t 、距离 z 、还是角度也就是相位 φ , 都是虚拟的, 不能直接等同于原有的物理概念. 在 Hilbert 空间没有图像可言, 所以原则上量子图像是不存在的.

物理学先辈大师 Dirac^[25]在 1930 年发表了后来脍炙人口的传世名著——量子力学原理, 他在书中指出: “物理科学的主要目的并不是提供图像, 而是以公式表达那些支配现象的规律, 并利用这些规律去发现新的现象. 如果存在图像, 那当然更好; 但是, 是否存在图像只是次要的问题. 在一般意义上, 图像这个词就是一个基本上按经典思路起作用的模型. 以原子现象而言, 不能期望有任何这样的图像存在. 然而, 我们可以把“图像”这个词的意义加以扩大, 让它包括任何看待基本规律的方式, 这种方式使基本规律的自洽性明显化. 用这样的扩充, 我们可能逐渐地得到原子现象的图像, 办法是熟悉量子理论中的各种规律”. 目前所有在深入认识理解量子力学概念方面进行的工作, 无一例外都是在寻找使基本规律自洽性明显化的某种方式. 我们感到庆幸的是, 由于时代的进步, 已经有越来越多的规律被不断发现, 而在那本名著 1930 年初版时, 包括 Dirac 在内的任何人都还没有光子角动量的概念, 光子角动量的概念是 1936 年 Beth^[26]完成了后来被称做光子角动量测量的经典实验后才逐渐建立起来的, 所以更不要说相应于光子角动量的正则共轭参量——光子相位的概念了.

我们由衷地钦佩 Dirac 在量子力学基本观点方面的深邃洞察、高瞻远瞩, 所谓量子图像, 遵循 Dirac 的观点, 完全可以理解为就是那些使量子力学基本规律自洽性明显化的某种方式, 尤其是包含虚数符号在内的数学公式!

6 讨论和结论

杨振宁先生^[1]对于量子力学理论体系及其表现形式有极为精辟的论断,他说:“量子化是其中的一块基石 (essential strand), 它通过作用量子 $\hbar$ 得到体现; 相位因子是另一块基石, 它通过虚数 $i = \sqrt{-1}$ 得到体现...”。对于该论断的第一部分, 相信对量子力学有所了解的人都会表示赞同; 但是对于该论断的第二部分, 尽管人们并不怀疑相位因子的基石作用, 但是相信大部分读者如同我们开始阅读时的感觉一样, 对于相位因子的作用究竟是如何通过虚数 i 得到体现仍然存有疑惑。然而, 我们认为, 按照经典相位等同于角坐标 φ 的物理概念, 而量子相位则是角坐标 φ 在 Hilbert 空间形式为 $e^{i\varphi}$ 表示的判断, 如果选取 $\varphi = \pi/2$, 那么该角坐标在 Hilbert 空间的表示就是单位纯虚数: $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2) = i$ 。换句话说, 单位纯虚数 $i = e^{i\pi/2}$ 就是经典相位 $\pi/2$ 对应的量子相位! 我们将这种理解作概念上的进一步延伸, 即对量子相位的一般表达形式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ 而言, 考虑到它恰恰就是数学上复分析(complex analysis)领域极为重要的 Euler 公式^[27], 代表模数等于单位 1 全体复数的集合, 所以可以直接将其看作是复数形式的整个量子相空间, $i = e^{i\pi/2}$ 不过是这个量子相空间里 $\varphi = \pi/2$ 的代表点。我们很高兴能用这样的数学表达式解读杨振宁先生关于相位因子作为量子力学基石的论述, 它通过虚数 $i = e^{i\pi/2}$ 得到体现。

另外, 我们注意到量子力学教科书中已有的关于量子算符和相应正则共轭变量的论述, 在讨论 Heisenberg 的不确定性原理(uncertainty principle) 时, 通常给出三组在 Hamilton 意义下的量子算符和相应的正则共轭变量, 它们分别是微观粒子的能量算符 $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 和时间 t , 动量算符的 z 分量 $\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ 和坐标分量 z , 以及 Z 轴方向角动量算符 $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ 和围绕 Z 轴的角坐标 φ ^[16]。也有教科书特别指明由此导出

的角动量 L_z 和角坐标 φ 之间的不确定性, 形式上完全类似于动量分量 p_z 和坐标分量 z 之间的不确定性: 如同当动量分量 p_z 被精确测定时, 坐标分量 z 是完全不确定的那样, 当角动量 L_z 被精确测定为 $L_{z+} = \hbar$ 或 $L_{z-} = -\hbar$ 时, 其角坐标 φ , 从而量子相位 $e^{i\varphi}$ 是完全不确定的; 与这两对量子算符相应的正则共轭变量之间的差异仅在于角坐标 φ 有物理意义的取值范围是有限的 $(0, 2\pi)$, 而坐标分量 z 的取值范围则是无限的^[8]。

由量子力学理论给出的这三组对应关系与从经典物理学总结出来的自然哲学原理相一致, 它们原则上也就是三个^[28]: (i) 自然规律不会因为时间的推移而改变, 导致的必然结果是能量守恒定律, 反映了时间的均匀性; (ii) 自然规律不会因为空间位置的不同(平移)而改变, 导致的必然结果是动量守恒定律, 反映了空间的均匀性; (iii) 自然规律也不会因为空间取向的不同(旋转)而改变, 导致的必然结果是角动量守恒定律, 反映了空间的各向同性。由此给出的对应关系是: 能量对应时间, 动量对应坐标, 角动量对应角坐标、也就是相位角。尤其是在经典的理论物理学里还引入了广义坐标和广义动量的概念^[29], 当取相位角作为广义坐标时, 它所对应的广义动量就是角动量。所以就物理概念而言, 空间平动和空间转动是相当的, 即动量和角动量是相当的。但是在量子物理学领域, 一方面固然由于时空的虚拟表示, 广义坐标也是虚拟的, 另一方面由于相对于动量分量 p_z 与坐标分量 z 而言, 角动量分量 L_z 与相应的角坐标 φ 的分析和讨论要少很多, 或许这正是由于没有普遍地将角坐标等同于相位角的缘故, 我们期盼通过量子相位的重新认识, 能够更好地建立微观粒子的量子图像。

我们的结论是: 量子相位 φ 是角动量算符相应的正则共轭变量, 它在 Hilbert 空间表现为复数形式的 Euler 公式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$, 纯虚数 i 恰好就是在整个量子相空间 $e^{i\varphi}$ 中, 当 $\varphi = \pi/2$ 时具有典型代表意义的量子相位表示, 从而构成量子力学理论体系的基石之一。

参考文献

- 1 Yang C N. Thematic melodies of twentieth century theoretical physics: quantization, symmetry and phase factor. Int J Mod Phys A,

- 2003, 18: 3263—3272^[DOI]
- 2 Walls D F, Milburn G J. Quantum Optics. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 23—26
- 3 谭维翰. 非线性与量子光学. 北京: 科学出版社, 2000. 220—223
- 4 He P B, Sun Q, Li P, et al. Magnetic quantum phase transition of cold atoms in an optical lattice. Phys Rev A, 2007, 76: 043618^[DOI]
- 5 Zheng G P, Liang J Q, Liu W M. Phase diagram of two-species Bose-Einstein condensates in an optical lattice. Phys Rev A, 2005, 71, 053608
- 6 马瑞琮, 李永放, 任立庆, 等. 量子态的相位测量. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 38(9): 1185—1194
- 7 Landau L D, Lifshitz E M. Quantum Mechanics (Non-relativistic theory). 3rd ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 1999. 6—8
- 8 Sara M. Quantum Mechanics. Oxford: Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1993. 36: 83—84
- 9 谭维翰, 刘娟. 能量有限系统的相位算符与相位本征态. 物理学报, 1997, 46(12): 2348—2358
- 10 Yao Z X, Zhong J W, Pan B L. A complete description and applications for a photon, The nature of light: what are photons? In: Proceedings of SPIE. Bellingham, WA: SPIE, 2007. 6664: 1—9
- 11 姚志欣, 潘佰良, 陈钢, 等. 光子的态矢量函数. 物理学报, 2006, 55(5): 2158—2164
- 12 Yao Z X, Zhong J W, Pan B L, et al. Photon state-vector function. Chin Opt Lett, 2005, 3: S134—S135
- 13 Jenkins F A, White H E. Fundamentals of Optics. 4th ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc, 1976. 225—228
- 14 赵凯华, 钟锡华. 光学上册. 北京: 北京大学出版社, 1984. 242
- 15 姚志欣, 钟建伟, 毛邦宁, 等. 具有不寻常角动量的非常光子. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2009, 39(15): 669—680
- 16 Schiff L I. Quantum Mechanics. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968. 200, 48 & 8
- 17 姚志欣, 钟建伟, 毛邦宁, 等. 双孔干涉效应的量子描述. 物理学报, 2007, 56(6): 3185—3191
- 18 Yao Z X, Zhong J W, Mao B N, et al. Interference nature of light. Chin Phys B, 2008, 17(2): 578—584
- 19 Mandel L, Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. England: Cambridge University Press, 1995. 574
- 20 周光召. 回顾与展望—纪念量子论诞生 100 周年. 物理, 2001, 30(5): 259—264
- 21 Hecht E. Optics. 4th ed. Addison-Wesley: San Francisco, 2002. 376; 秦克诚, 詹达三, 林福成, 译. 光学. 北京: 高等教育出版社, 1979. 510
- 22 Van Enk S J, Nienhuis G. Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light. Opt Commun, 1992, 94 (1,2,3): 147—158^[DOI]
- 23 Scully M O, Zubairy M S. Quantum Optics. New York: Cambridge University Press, 1997. 9
- 24 Gribbin J. In Search of Schrödinger's Cat. Toronto: Bantam books, 1984. 194—202; 张广才, 许爱国, 译. 寻找薛定谔的猫. 海口: 海南出版社, 1998. 187—194
- 25 Dirac P A M. The Principles of Quantum Mechanics. 4th ed. London: Oxford University Press, 1958. 10; 陈咸亨, 译. 量子力学原理. 北京: 科学出版社, 1979. 9—10
- 26 Beth R A. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. Phys Rev, 1936, 50: 115—125^[DOI]
- 27 龚昇. 简明复分析. 北京: 北京大学出版社, 1996. 19
- 28 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程——力学. 北京: 高等教育出版社, 1995. 150—151
- 29 张启人. 理论物理学之一——经典力学. 北京: 科学出版社, 2002. 24