中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 8 期: 1321 ~ 1336
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

# 混合整数半无限规划问题

李高西[1,2*], 袁柳洋[3], 万仲平[4]

1. 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400067;
2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室, 重庆 400067;
3. 武汉科技大学理学院, 武汉 430081;
4. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072
E-mail: ligaoxicn@126.com, yangly0601@126.com, mathwanzhp@whu.edu.cn

收稿日期: 2019-06-19; 接受日期: 2019-12-25; 网络出版日期: 2020-12-21; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11901068 和 11871383)、重庆市基础与前沿研究计划 (批准号: cstc2019jcyj-msxmX0456) 和重庆工商大学校内项目 (批准号: ZDPTTD201908) 资助项目

**摘要** 本文主要讨论混合整数半无限规划 (mixed integer semi-infinite programming, MISIP) 问题的求解方法. 首先分离内层约束中的连续变量和整数变量并将原问题转化为混合整数互补约束规划 (mixed integer mathematical programming with complementarity constraints, MIMPCC) 问题. 其次在假设内层问题满足 Slater 约束规范的条件下得到了转化前后问题的等价性. 继而分别将 MIMPCC 问题转化为可用常规优化软件求解的混合整数规划问题和非线性规划问题. 由于在转化过程中会生成大量的变量和约束, 为求解内层问题中变量较多的 MISIP 问题, 本文提出一种行约束生成法, 并证明该算法可在最多 $O(|Z|)$ 次迭代之后得到最优解. 最后通过一些数值实例验证算法的有效性.

**关键词** 半无限规划 整数规划 互补约束 行约束生成

**MSC (2020) 主题分类** 90C26, 90C11, 90C22, 90B50

## 1 引言

近年来, 半无限规划 (semi-infinite programming, SIP) 问题被广泛研究 (参见文献 [1–8]). 绝大多数文献讨论的是只有连续变量的情形, 求解这种 SIP 的常用方法是将其转化为标准的线性/非线性规划问题. 但事实上根据实际问题所建立的半无限规划模型也有可能包含整数变量, 下面列举两个这方面的实例.

第一个例子是 Wang 和 Fang[9] 提出的解决生产计划问题的 SIP 模型, 首先回顾该模型. 假设某制造商在 $T$ 小时内接收了 $n$ 份订单. 用 $[0,T]$ 表示计划时间段, 订单 $i$ 的生产周期为 $l_i$. 用 $x_i \in \mathbb{R}$ 表示订单 $i$ 计划完成的时间, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. 生产所需资源是关于生产完成时间的函数 $R(t, \boldsymbol{x})$, $t \in [0,T]$. 用 $G(t)$ 表示在 $t$ 时刻可用资源的数量. 令 $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, 我们用 $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top H\boldsymbol{x} + b^\top \boldsymbol{x}$ 表示计划完成时

**英文引用格式:** Li G X, Yuan L Y, Wan Z P. Mixed integer semi-infinite programming problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1321–1336, doi: 10.1360/N012019-00160

© 2020《中国科学》杂志社 

间与约定交货日期的差的平方, 生产者需要制定合理的生产计划使得计划生产完成时间与约定交货期越近越好. 该问题可用下面的 SIP 模型来描述:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \ \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top H\boldsymbol{x} + b^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{s.t.} \ \ R(t,\boldsymbol{x}) \leqslant G(t), \quad \forall\, t \in [0,T], \\ &\qquad 0 \leqslant l_i \leqslant x_i \leqslant T, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

然而, 一些资源可能只能以整数 a 为单位 (小时、天、周) 提供, 因此, 模型 (1.1) 的内层变量还可能包含整数变量 $t_2$, 即生产计划问题还可描述为下述内层变量包含整数的混合整数半无限规划 (MISIP) 模型:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \ \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top H\boldsymbol{x} + b^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{s.t.} \ \ R(t_1,t_2,\boldsymbol{x}) \leqslant G(t_1,t_2), \quad \forall\, t_1 \in [0,T], \quad \forall\, t_2 \in \left[0, \frac{T}{a}+1\right] \cap \mathbb{Z}, \\ &\qquad 0 \leqslant l_i \leqslant x_i \leqslant T, \quad i = 1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $R(t_1,t_2,\boldsymbol{x})$ 表示资源需求函数, $G(t_1,t_2)$ 表示可用资源数量.

第二个例子是 He 等 [10] 提出的解决城市固体垃圾管理问题的优化模型, 该文献表示在解决城市固体垃圾管理问题中会出现如下的上层变量包含整数的 MISIP 模型:

$$\begin{aligned} &\min_{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\in X} \ \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^\top \boldsymbol{x}_2 \\ &\text{s.t.} \ \ r(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,s) \leqslant 0, \quad \forall\, s \in S, \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{c}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{c}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}$, $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$, $S$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非空凸紧集, $r: \mathbb{R}^{n_1+n_2+1} \to \mathbb{R}$ 为连续函数. $\boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^\top \boldsymbol{x}_2$ 表示垃圾处理成本函数, $r(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,s)$ 表示容量、环境和时间等约束.

关于 MISIP 模型的其他应用可参见文献 [11–13]. 然而据我们所知, 很少有文献讨论该模型的解的存在性和求解算法. 本文主要讨论的 MISIP 模型如下:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}\in X} \ f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \ \ g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant 0, \quad \forall\, (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in W := \{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z\}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中

$$Y := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n_3} : v_l(\boldsymbol{y}) \leqslant 0, l \in L\},$$

这里 $f: \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{n_1+n_2} \times \mathbb{R}^{n_3} \times \mathbb{R}^{n_4} \to \mathbb{R}$ 是关于变量 $\boldsymbol{y}$ 的连续可微凹函数. $v_l: \mathbb{R}^{n_3} \to \mathbb{R}$, $l \in L := \{1,\ldots,s\}$ 是凸函数. $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$, $Z \subseteq \mathbb{Z}^{n_4}$ 是非空集, $Y \subseteq \mathbb{R}^{n_3}$ 是非空凸紧集. 当 $Z = \emptyset$、$Y \subset \mathbb{R}$、$f(\boldsymbol{x})$ 是线性函数时, MISIP (1.4) 退化为 MISIP (1.3). 当 $n_2 = 0$、$f(\boldsymbol{x})$ 是二次函数时, MISIP (1.4) 退化为 MISIP (1.2). 本文假设 $Z$ 是有限集合且问题 MISIP (1.4) 存在最优解, 我们的主要目标是寻找该问题的等价转化方法和构造求解算法.

研究半无限规划问题的理论与算法问题的关键在于如何处理其中包含的简单双层规划问题. 我们将 MISIP (1.4) 转化为下述双层规划问题:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}\in X} \ f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \ \ \varphi(\boldsymbol{x}) := \sup_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

约定 "$\sup_{\emptyset} = -\infty$" 且 $W$ 非空. 可通过求解下述问题判断 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是否为可行点:

$$\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sup_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}). \tag{1.6}$$

显然, 若 $\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0$, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 MISIP (1.4) 的可行点. 易证双层规划问题 (1.5) 与 MISIP (1.4) 等价. 由于外层问题 (1.5) 的目标函数不包含内层问题的变量 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$, 因此, 该问题实为一特殊的混合整数双层规划问题. 对于一般的混合整数双层规划问题目前已有一些求解算法, 例如, Moore 和 Bard [14] 考虑了一类混合整数线性双层规划问题, Xu 和 Wang [15] 提出了求解该问题的精确算法. Edmunds 和 Bard [16] 提出了求解 0-1 混合整数非线性双层规划 (mixed integer nonlinear bi-level programming, MINBLP) 问题的分支定界算法. Mitsos [17] 基于收敛的下边界和最优上边界提出了求解 MINBLP 问题的全局最优解的方法.

若内层变量不包含整数 ($n_4 = 0$), 则可以将 MISIP (1.4) 的内层问题替换为其 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件, 从而将原问题转化为混合整数互补约束优化 (MIMPCC) 问题. 在假设内层问题的目标函数为凹且满足 Slater 约束规范的条件下, 容易证得转化前后问题的等价性. 但若内层变量包含整数 ($n_4 > 0$), 则内层问题实为非凸问题, 不能用其 KKT 条件替换. 本文的处理方法是将内层问题中的整数变量和连续变量分离开从而将 MISIP (1.4) 转化为 MIMPCC 问题.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节通过分开考虑内层问题中的连续变量和整数变量将 MISIP (1.4) 转化为 MIMPCC, 并在适当的条件下得到了转化前后问题的局部解和全局解的等价性. 第 3 节当 $X$ 中同时包含连续变量和整数变量时将 MISIP (1.4) 转化为混合整数规划 (mixed integer programming, MIP) 问题; 当 $X$ 只包含连续变量时, 将 MISIP (1.4) 转化为非线性规划 (nonlinear programming, NLP) 问题. 进一步, 由于转化过程会产生大量的变量和约束, 我们针对规模较大的 MISIP 问题提出一种行约束生成法可有效缩短运行时间. 第 4 节给出一些数值实例. 第 5 节给出本文的结论.

## 2 将 MISIP 转化为单层问题

由于整数变量的存在, 一阶方法不适用于 MISIP (1.4). 对于具有相似结构的混合整数双层规划 (mixed integer bi-level programming, MIBLP) 问题, Li 和 Guo [18] 通过分开考虑下层的连续变量和离散变量从而将其转化为 MIMPCC. 本文用类似的方法将 MISIP (1.4) 转化为 MIMPCC. 需要注意的是, 虽然 MISIP (1.4) 也是特殊的 MIBLP, 但由于 MISIP (1.4) 的外层目标函数不包含内层问题的决策变量, 其转化难度较一般的 MIBLP 要小. 下面的关于 MISIP (1.4) 与 MIMPCC 之间的关系的结论虽然和文献 [18] 中 MIBLP 与 MIMPCC 之间的关系的结论相似, 但借助于 MISIP (1.4) 在结构上相对简单的特点, 本文的证明过程较文献 [18] 有很大不同.

虽然 (1.5) 为非凸问题, 易知对任意的 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in X \times Z$ 在问题 MISIP (1.4) 的假设条件下, 下述参数优化问题 (2.1) 为凸问题:

$$\max_{\boldsymbol{y}} \{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{y} \in Y\}, \tag{2.1}$$

其中 $Y = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n_3} : v_l(\boldsymbol{y}) \leqslant 0, l \in L\}$. 接下来回顾该问题的 Slater 约束规范.

**定义 2.1** [19] 称 Slater 约束规范在 $Y$ 上满足, 若存在 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_3}$ 使得

$$v_l(\boldsymbol{y}_0) < 0, \quad \forall\, l \in L.$$

问题 (2.1) 的 KKT 点对集合为

$$\Lambda_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) := \left\{ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} : \begin{array}{l} -\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^{\top} \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) \leqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^{\top} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) = 0 \end{array} \right\},$$

其中 $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{R}^{n_3}$, $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{R}^{|L|}$, $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} := (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}})$, $\boldsymbol{v}(\cdot) = (v_1(\cdot), \ldots, v_{|L|}(\cdot))^{\top}$. 由于 (2.1) 为凸规划问题, 所以其 KKT 点也为全局最优解. 在某些约束规范 (如 Slater 约束规范) 成立的条件下, 上述命题反之也成立. 对任意的 $\boldsymbol{x} \in X$, 考虑下述约束集合:

$$\Omega_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} : g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant \boldsymbol{0}, (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}) \in \Lambda_{\boldsymbol{z}}(x)\}. \tag{2.2}$$

为简单起见, 定义 $\boldsymbol{\omega} := \{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} : \boldsymbol{z} \in Z\}$. 由此, (1.5) 可被转化为下述 MIMPCC 问题:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}} \ f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{x} \in X, \quad \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{z} \in Z. \end{aligned} \tag{2.3}$$

**注 2.1** 当 $Z$ 是无限集合时, 问题 (2.3) 依然为半无限规划问题, 本文假设 $Z$ 是有限集合.

接下来讨论 MIMPCC (2.3) 与 MISIP (1.4) 之间的关系. 首先给出下述引理 2.1.

**引理 2.1** 令 $\theta : \mathbb{R}^{n_3} \times \mathbb{R}^{n_4} \to \mathbb{R}$ 为实值函数且

$$\mathfrak{F} := \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z\},$$

其中 $Z \subseteq \mathbb{Z}^{n_4}$ 是整数集, $|Z|$ 为有限数, $Y \subseteq \mathbb{R}^{n_3}$ 是闭集, 则

$$\sup_{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathfrak{F}} \theta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup_{\boldsymbol{z} \in Z} \sup_{\boldsymbol{y} \in Y} \theta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup \Big\{ \sup_{\boldsymbol{y} \in Y} \theta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z \Big\}.$$

**证明** 第二个等式显然, 第一个等式的证明与文献 [18, 引理 1] 的证明过程相似, 此处省略. □

根据上述引理 2.1, 容易验证对任意的 $\boldsymbol{x} \in X$, 问题 (1.5) 的约束函数可表示为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sup_{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in W} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup \Big\{ \sup_{\boldsymbol{y} \in Y} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z \Big\} \leqslant 0,$$

进一步有

$$\Big\{ \boldsymbol{x} \in X : \sup_{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in W} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0 \Big\} = \Big\{ \boldsymbol{x} \in X : \sup_{\boldsymbol{y} \in Y} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0, \forall \boldsymbol{z} \in Z \Big\}.$$

下面给出本节的第一个主要结论. 该结论主要讨论问题 (1.4) 与 (2.3) 的全局最优解之间的关系.

**定理 2.1** (i) 令 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 MISIP (1.4) 的全局最优解. 若 $Y$ 满足 Slater 约束规范, 则对任意的 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ 满足 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\forall \boldsymbol{z} \in Z$, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 是 MIMPCC (2.3) 的全局最优解.

(ii) 反之, 令 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 为 MIMPCC (2.3) 的全局最优解. 假设 $Y$ 满足 Slater 约束规范, 则 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 是 MISIP (1.4) 的全局最优解.

**证明** (i) 首先证明对任意的 $\boldsymbol{z} \in Z$, 有 $\Omega_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq \emptyset$. 我们用反证法证明该问题, 假设存在 $\boldsymbol{z}' \in Z$ 使得 $\Omega_{\boldsymbol{z}'}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \emptyset$. 由 $g$ 是关于 $\boldsymbol{y}$ 的连续可微函数且 $Y$ 是非空凸紧集易知, 对任意的 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in X \times Z$, 参数优化问题 (2.1) 的解集非空. 因为 $Y$ 满足 Slater 约束规范, 由一阶最优性条件可知 $\Lambda_{\boldsymbol{z}'}(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq \emptyset$. 再结合 (2.2) 容易得到, 对任意的

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}'} \in \{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}'} : (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}'}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}'}) \in \Lambda_{\boldsymbol{z}'}(\bar{\boldsymbol{x}})\},$$

$g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}'}, \boldsymbol{z}') > 0$ 成立. 根据引理 2.1 可知,

$$\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sup\Big\{\sup_{\boldsymbol{y}\in Y} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z\Big\} > 0,$$

即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 并非 MISIP (1.4) 的可行点, 这与定理假设矛盾.

容易看出对满足 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}})$ $(\forall\, \boldsymbol{z} \in Z)$ 的 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 是 MIMPCC (2.3) 的可行点. 假设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ 是 MIMPCC (2.3) 的任意可行点, 则对任意的 $\boldsymbol{z} \in Z$, 有

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0, \quad \forall\, (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}) \in \Lambda_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}). \tag{2.4}$$

因为对任意的 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in X \times Z$, 内层问题 (2.1) 均是凸的, 所以根据 (2.4) 和引理 2.1 易知,

$$\sup_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup\Big\{\sup_{\boldsymbol{y}'\in Y} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z\Big\} = \sup\{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z\} \leqslant 0,$$

即 $\boldsymbol{x}$ 是问题 MISIP (1.4) 的可行点. 又因 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题 MISIP (1.4) 的最优解, 故待证结论显然成立.

(ii) 对于相反的情形, 容易看出 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\forall\, \boldsymbol{z} \in Z$, 即对任意的 $\boldsymbol{z} \in Z$, 有 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} = (\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}) \in \Lambda_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 且 $g(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0$. 因为对任意的 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in X \times Z$, (2.1) 是凸规划问题, 所以根据引理 2.1 可知,

$$\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sup\Big\{\sup_{\boldsymbol{y}\in Y} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z\Big\} = \sup\{g(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z\} \leqslant 0.$$

因此, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MISIP (1.4) 的可行点. 进一步, 对任意可行点 $\boldsymbol{x}$, 可类似 (i) 部分的证明过程证明存在 $\boldsymbol{\omega}$ 使得 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ 是 MIMPCC (2.3) 的可行点. 综上可知, 由于 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 是问题 MIMPCC (2.3) 的最优解, 待证结论显然成立. □

因半无限规划问题一般为非凸问题, 所以很难找到其全局最优解, 但很多时候能找到其局部最优解也是很有意义的, 故很有必要讨论 MISIP (1.4) 与 MIMPCC (2.3) 的局部最优解之间的关系.

**定理 2.2** 令 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 MISIP (1.4) 的局部最优解. 若 $Y$ 满足 Slater 约束规范, 则对任意的 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ 满足 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\forall\, \boldsymbol{z} \in Z$, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 是 MIMPCC (2.3) 的局部最优解.

**证明** 因该定理的证明过程与定理 2.1(i) 的证明过程类似, 此处省略. □

**定理 2.3** 对于满足 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\forall\, \boldsymbol{z} \in Z$ 的 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, 若 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 为 MIMPCC (2.3) 的局部最优解, 并假设 $Y$ 满足 Slater 约束规范且 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ 是连续函数, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MISIP (1.4) 的局部最优解.

**证明** 用与定理 2.1(ii) 相同的证明方法, 易得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MISIP (1.4) 的可行点. 我们用反证法证明该定理. 假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是 MISIP (1.4) 的局部最优解, 则存在序列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 满足 $\boldsymbol{x}^k \to \bar{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x}^k \in X$ 且

$$\sup_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W} g(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0, \quad \forall\, k,$$

使得

$$f(\boldsymbol{x}^k) < f(\bar{\boldsymbol{x}}), \quad \forall\, k. \tag{2.5}$$

根据引理 2.1 易证对任意的 $k$ 有

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in Y} g(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0, \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in Z. \tag{2.6}$$

对于 $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k \in \arg\sup_{\boldsymbol{y}\in Y} g(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, 因 $Y$ 是有界的, 故 $\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k\}$ 也是关于 $k$ 的有界序列. 不失一般性, 假设对任意的 $\boldsymbol{z} \in Z$ 有 $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k \to \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}$, $k \to +\infty$. 又因 $Y$ 满足 Slater 约束规范, 所以, 根据 (2.6) 易知对任意的 $k$ 存在 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^k$ 使得

$$\begin{aligned} &-\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^k)^\top \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k) = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k) \leqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^k \geqslant \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^k)^\top \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k) = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

结合 (2.6) 和 (2.7) 易得 $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}}^k \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}^k)$, 即 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{\omega}^k)$ 是 MIMPCC (1.4) 的可行点, 其中 $\boldsymbol{\omega}^k = \{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}}^k : \boldsymbol{z} \in Z\}$. 文献 [20, 定理 2.3] 表明关于 $k$ 的序列 $\{\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^k\}$ 是有界的, 不失一般性, 假设 $\{\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^k\} \to \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}$, $k \to +\infty$. 对 (2.7) 取极限有

$$\begin{aligned} &-\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^\top \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) \leqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_z \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^\top \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

因 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ 是连续函数, 所以, 根据 $g(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}^k, \boldsymbol{z}) \leqslant 0$ 易知, 对任意的 $\boldsymbol{z} \in Z$, 当 $k \to +\infty$ 时, $g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0$. 结合该结论和 (2.8) 可得

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} = (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}) \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

显然满足 $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \{\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} : \boldsymbol{z} \in Z\}$ 的 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 是 MIMPCC (2.3) 的全局最优解, 再结合 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{\omega}^k) \to (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ 可知这与 (2.5) 矛盾. □

**注 2.2** 由于 Slater 约束规范是为了保证 KKT 条件的存在性, 所以我们可以用更弱的约束规范 [19] (Cottle 约束规范、Abadie 约束规范等) 来替代定理 2.1–2.3 中的 Slater 约束规范.

**注 2.3** 有时转化后的等价问题 (2.3) 中并非所有的 $\boldsymbol{z} \in Z$ 都需要, 下述例 2.1 说明了该问题.

**例 2.1** 令 $Y = [-2, 8]$, $Z = \{-1, 1, 2, 3\}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. 考虑下述 MISIP 问题:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1, x_2} \ (x_1 - x_2)^2 \\ &\text{s.t.} \ (x_1 - 1)x_2^2 yz \leqslant 0, \quad \forall\, y \in Y, \quad z \in Z. \end{aligned} \tag{2.9}$$

根据定理 2.1(ii) 和 2.3 易知, 可通过求解下述 MIMPCC (2.10) 得到 MISIP (2.9) 的最优解:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}} \ & (x_1 - x_2)^2 \\ \text{s.t.} \ & -(x_1 - 1)x_2^2 z - (\boldsymbol{\lambda}_z)_1 + (\boldsymbol{\lambda}_z)_2 = 0, \\ & (\boldsymbol{\lambda}_z)_1 \geqslant 0, \quad -2 - t_z \leqslant 0, \\ & (\boldsymbol{\lambda}_z)_2 \geqslant 0, \quad t_z - 8 \leqslant 0, \quad \forall\, z \in Z = \{-1, 1, 2, 3\}, \\ & (\boldsymbol{\lambda}_z)_1(-2 - t_z) = 0, \quad (\boldsymbol{\lambda}_z)_2(t_z - 8) = 0, \\ & (x_1 - 1)x_2^2 t_z z \leqslant 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中

$$\boldsymbol{t} = (t_{-1}, t_1, t_2, t_3), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_{-1}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3), \quad \boldsymbol{\lambda}_z = ((\boldsymbol{\lambda}_z)_1, (\boldsymbol{\lambda}_z)_2), \quad z \in Z.$$

简单计算后可得最优解

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = (1, 1, 8, 8, 8, 8, 0, (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{-1})_2, 0, (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1)_2, 0, (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_2)_2, 0, (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_2)_2),$$

其中 $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_z)_2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $z \in Z$, 即问题 MISIP (2.9) 的最优解为 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (1, 1)$.

然而, MISIP (2.9) 的最优解也可以通过求解下述 MIMPCC (2.11) 得到:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2, \bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}} (x_1 - x_2)^2 \\
&\text{s.t.} \ -(x_1 - 1)x_2^2 z - (\boldsymbol{\lambda}_z)_1 + (\boldsymbol{\lambda}_z)_2 = 0, \\
&\qquad (\boldsymbol{\lambda}_z)_1 \geqslant 0, \quad -2 - t_z \leqslant 0, \\
&\qquad (\boldsymbol{\lambda}_z)_2 \geqslant 0, \quad t_z - 8 \leqslant 0, \quad \forall\, z \in \bar{Z} = \{-1, 1\}, \\
&\qquad (\boldsymbol{\lambda}_z)_1(-2 - t_z) = 0, \quad (\boldsymbol{\lambda}_z)_2(t_z - 8) = 0, \\
&\qquad (x_1 - 1)x_2^2 t_z z \leqslant 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{t}} = (t_{-1}, t_1)$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{\lambda}_{-1}, \boldsymbol{\lambda}_1)$, $\boldsymbol{\lambda}_z = ((\boldsymbol{\lambda}_z)_1, (\boldsymbol{\lambda}_z)_2)$, $z \in \bar{Z}$. 简单计算后可得最优解

$$(x_1^*, x_2^*, \bar{\boldsymbol{t}}^*, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*) = (1, 1, 8, 8, 0, (\boldsymbol{\lambda}_{-1}^*)_2, 0, (\boldsymbol{\lambda}_1^*)_2),$$

其中 $(\boldsymbol{\lambda}_z^*)_2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $z \in \bar{Z}$.

## 3 求解算法

### 3.1 将 MIMPCC 转化为 MIP

因 $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$, 若 $n_2 > 0$ 且 $n_1 > 0$, 则 $X$ 中同时包含整数变量和连续变量. 此时 (2.3) 为 MIMPCC 问题. Audet 等 [21] 将线性互补问题转化为 MIP 问题并考虑了转化前后问题的等价性. 为提高求解精度, 对于非线性 MIMPCC (2.3) 也施以类似的转化. 令 $\boldsymbol{u_z} \in \{0, 1\}^s$, $\boldsymbol{z} \in Z$, $M$ 是充分大的数. 定义 $\boldsymbol{\varpi_z} = (\boldsymbol{u_z}, \boldsymbol{t_z}, \boldsymbol{\lambda_z}) = (\boldsymbol{u_z}, \boldsymbol{\omega_z})$, $\boldsymbol{\varpi} = \{\boldsymbol{\varpi_z} : \boldsymbol{z} \in Z\}$, 考虑下面的约束:

$$\Xi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) := \left\{ \boldsymbol{\varpi_z} : \begin{array}{c} -\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t_z}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda_z}^\top \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t_z}) = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{\lambda_z} \leqslant M\boldsymbol{u_z}, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t_z}) \geqslant M(\boldsymbol{u_z} - \boldsymbol{1}), \\ g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t_z}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t_z}) \leqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda_z} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array} \right\},$$

则 MIMPCC (2.3) 可转化为下述 MIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varpi}} f(\boldsymbol{x}) \\
&\text{s.t.} \ \boldsymbol{x} \in X, \quad \boldsymbol{\varpi_z} \in \Xi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in Z.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

接下来讨论 MIMPCC (2.3) 与 MIP (3.1) 之间的关系.

**定理 3.1** 令 $(\tilde{\boldsymbol{x}}^*, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^*)$ 为 MIMPCC (2.3) 的全局最优解. 假设 $X$ 是有界的且 $Y$ 满足 Slater 约束规范, 则存在充分大的常数 $M > 0$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^* = (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^*, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{|Z|}^*)$ 使得 $(\tilde{\boldsymbol{x}}^*, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^*, \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*)$ 是 MIP (3.1) 的全局最优解. 进一步, 对于该 $M$, 若 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\omega}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ 是 MIP (3.1) 的全局最优解, 则 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\omega}^*)$ 也是 MIMPCC (2.3) 的全局最优解.

**证明** 由 $X$ 为有界集可知 $\tilde{\boldsymbol{x}}^*$ 是有限的数. 又因为 $Y$ 是有界的且满足 Slater 约束规范, 容易证明对任意的 $\boldsymbol{z} \in Z$, $\Lambda_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^*)$ 是有界的, 即 $(\tilde{\boldsymbol{x}}^*, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^*)$ 是有限的最优解. 通过与文献 [21, 命题 3.4] 相似的证明过程可得到该定理的结论. □

**注 3.1** 对于局部解的情形可在定理 3.1 相同的条件下得到相同的结论.

**注 3.2** $M$ 可按如下规则取值:

$$M := \max\{\max\{\|\tilde{\boldsymbol{x}}^*\|_\infty\}, \max\{\boldsymbol{v}(\tilde{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}^*), \boldsymbol{z} \in Z\}\},$$

$\|\cdot\|_\infty$ 表示无穷范数.

众所周知, $M$ 的取值是否合理会影响计算的效率. 过大的 $M$ 可能会导致子问题超过计算机存储极限, 从而无法计算. 对于下述特殊的 MISIP, 我们可得到充分小的 $M$.

若 $Y = [\boldsymbol{Y}^L, \boldsymbol{Y}^U]$, 令 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L \in \mathbb{R}^{n_3}$, $\boldsymbol{\alpha} := \{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L) : \boldsymbol{z} \in Z\}$, 则 MIMPCC (2.3) 退化为下述 MIMPCC 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \ f(\boldsymbol{x}) \\
&\text{s.t.} \ \ -\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U - \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L = \boldsymbol{0}, \\
&\qquad (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U)_j((\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}})_j - \boldsymbol{Y}_j^U) = 0, \\
&\qquad (\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L)_j(\boldsymbol{Y}_j^L - (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}})_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n_3, \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in Z, \\
&\qquad (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{Y}^U) \leqslant \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{Y}^L - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) \leqslant \boldsymbol{0}, \\
&\qquad \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U \leqslant \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U, \quad \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L \leqslant \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L, \\
&\qquad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0, \quad \boldsymbol{x} \in X,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U, \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L \in \mathbb{R}^{n_3}$ 分别表示 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L$ 的上界且可取值为

$$(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U)_j = \max_{\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y, y_j = \boldsymbol{Y}_j^U} \nabla_{y_j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \quad j = 1, \ldots, n_3, \tag{3.3}$$

$$(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L)_j = \max_{\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y, y_j = \boldsymbol{Y}_j^L} \nabla_{y_j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \quad j = 1, \ldots, n_3. \tag{3.4}$$

这里的 (3.3) 和 (3.4) 首先在文献 [22] 中被定义. 根据文献 [22, 命题 4.1] 容易证明下述命题.

**命题 3.1** 对固定的 $\boldsymbol{z} \in Z$, 由 (3.3) 和 (3.4) 分别生成的 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L$ 也是 (3.2) 中 KKT 乘子 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L$ 的上界.

$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L$ 的功能类似于 $M$. 令 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^U, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^L \in \{0,1\}^{n_3}$,

$$\boldsymbol{\beta} = \{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^U, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^L) : \boldsymbol{z} \in Z\},$$

则 MIMPCC (3.2) 可被转化为下述 MIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}} \ f(\boldsymbol{x}) \\
&\text{s.t.} \ \nabla_{y_j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant (\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^U)_j (\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U)_j, \\
&\qquad \boldsymbol{Y}_j^U - (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}})_j \leqslant (\boldsymbol{Y}_j^U - \boldsymbol{Y}_j^L)(\boldsymbol{1} - (\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^U)_j), \\
&\qquad -\nabla_{y_j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant (\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^L)_j (\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L)_j, \quad j = 1, \ldots, n_3, \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in Z, \\
&\qquad (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}})_j - \boldsymbol{Y}_j^L \leqslant (\boldsymbol{Y}_j^U - \boldsymbol{Y}_j^L)(\boldsymbol{1} - (\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^L)_j), \\
&\qquad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0, \quad (\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^L)_j + (\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^U)_j \leqslant 1, \\
&\qquad (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{Y}^U) \leqslant \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{Y}^L - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) \leqslant \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

接下来考虑 MIMPCC (3.2) 与 MIP (3.5) 之间的关系. 下述定理的结论可通过与文献 [22, 命题 4.2] 类似的证明得到.

**定理 3.2** 对于分别由 (3.3) 和 (3.4) 生成的上界 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L$, MIMPCC (3.2) 与 MIP (3.5) 等价.

**证明** 由于 MIMPCC (3.2) 和 MIP (3.5) 有相同的只与变量 $\boldsymbol{x}$ 有关的目标函数, 故只需要证明可行集也相同即可. 首先证明, 若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MIMPCC (3.2) 的可行点, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 也是 MIP (3.5) 的可行点. 事实上, 由 $\bar{x}$ 为 MIMPCC (3.2) 的可行点可知, 存在 $\bar{\boldsymbol{\alpha}} := \{(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^U, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^L) : \boldsymbol{z} \in Z\}$ 使得 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ 满足约束 (3.2). 接下来将证明存在 $\{(\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^L, \bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^U) : \boldsymbol{z} \in Z\}$ 使得 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ 是 MIP (3.5) 的可行点, 其中

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \{(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^L, \bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^U) : \boldsymbol{z} \in Z\}.$$

对任意固定的 $\boldsymbol{z} \in Z$ 和 $j \in \{1, 2, \ldots, n_3\}$, 考虑下述 3 种情形:

(a) $(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}})_j \in (\boldsymbol{Y}_j^L, \boldsymbol{Y}_j^U)$. 由

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U)_j((\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}})_j - \boldsymbol{Y}_j^U) = 0,\\
&(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L)_j(\boldsymbol{Y}_j^L - (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}})_j) = 0,\\
&(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{Y}^U) \leqslant \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{Y}^L - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) \leqslant \boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U \leqslant \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^U, \quad \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L \leqslant \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{z}}^L,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

可得 $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^L)_j = (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^U)_j = 0$. 进一步, 根据

$$-\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^U - \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^L = \boldsymbol{0}, \tag{3.7}$$

易证 $\nabla_{y_j} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) = 0$. 令 $(\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^U)_j = (\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^L)_j = 0$, 容易验证 MIP (3.5) 的所有约束都满足.

(b) $(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}})_j = \boldsymbol{Y}_j^U$. 由条件 (3.6) 可得 $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^L)_j = 0$. 进一步由 (3.7) 可得 $\nabla_{y_j} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \geqslant 0$. 令 $(\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^U)_j = 1$ 且 $(\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^L)_j = 0$, 容易验证 MIP (3.5) 的约束均满足.

(c) $(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}})_j = \boldsymbol{Y}_j^L$. 该种情形与情形 (b) 类似, 我们省略证明过程.

接下来证明, 若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MIP (3.5) 的可行点, 则其也是 MIMPCC (3.2) 的可行点. 事实上容易看出存在 $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \{(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^U, \bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^L) : \boldsymbol{z} \in Z\}$ 使得 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ 满足 MIP (3.5) 的约束条件. 我们将证明存在 $\{(\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^L, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^U) : \boldsymbol{z} \in Z\}$ 使得 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ 是 MIMPCC (3.2) 的可行点, 其中

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \{(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^L, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^U) : \boldsymbol{z} \in Z\}.$$

对任意固定的 $\boldsymbol{z} \in Z$, $j \in \{1, 2, \ldots, n_3\}$, 考虑下面 3 种情形:

(a) $(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}})_j \in (\boldsymbol{Y}_j^L, \boldsymbol{Y}_j^U)$. 由约束

$$(\boldsymbol{Y}_j^U - (\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}})_j) \leqslant (\boldsymbol{Y}_j^U - \boldsymbol{Y}_j^L)(1 - (\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^U)_j),$$

可知 $(\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^U)_j = 0$, 进一步有 $\nabla_{y_j} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0$. 同理可得 $(\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}^L)_j = 0$ 和 $-\nabla_{y_j} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0$. 综合上面两式可得 $\nabla_{y_j} g(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{z}) = 0$. 令 $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^L)_j = (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{z}}^U)_j = 0$, 则不难看出 MIMPCC (3.2) 的约束条件均成立. 情形 (b) $(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}})_j = \boldsymbol{Y}_j^U$ 和情形 (c) $(\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{z}})_j = \boldsymbol{Y}_i^L$ 可用类似的方法得到结论, 此处省略证明过程. □

### 3.2 将 MPCC 问题转化为 NLP 问题

若 $n_2 = 0$, $n_1 > 0$, 则 $X$ 只包含连续变量, 此时问题 (2.3) 为互补约束规划 (mathematical programming with complementarity constraints, MPCC). 根据文献 [23] 可知, MPCC (2.3) 的近似最优解

可通过求解下面 NLP (3.8) 得到:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}} \ f(\boldsymbol{x}) \\
&\text{s.t.} \ -\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^{\top}\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{0}, \\
&\qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) \leqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in Z, \\
&\qquad g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}) \leqslant 0, \quad \boldsymbol{x} \in X, \\
&\qquad \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}}^{\top}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}) \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} : \boldsymbol{z} \in Z\}$, $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} := (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{z}})$, $\varepsilon > 0$ 是充分小的数. 文献 [23] 表明, 在一定的条件下, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, NLP (3.8) 的最优解收敛到 MPCC (2.3) 的稳定点.

### 3.3 行约束生成法

本小节借用割平面法的思想提出一种求解 MISIP (1.4) 的方法. 上述定理 2.1–2.3 和第 3.1 小节表明, 可通过求解 MIMPCC (2.3) 得到 MISIP (1.4) 的解, 而 MIMPCC 问题又可转化为 MIP 问题. 但当集合 $Z$ 中元素较多时, 该转化过程会增加大量的连续变量、整数变量和约束函数, 因此, 通过枚举 $Z$ 中元素的方法得到的等价转化问题其求解难度可能会很大, 甚至无法求解. 由例 2.1 可知, 某些问题并非需要枚举 $Z$ 中所有的元素才能得到 MISIP (1.4) 的最优解. 基于此, 我们设计了如下每次迭代只需要 $Z$ 的某个子集合的行约束生成法 (见算法 1).

**算法 1** 行约束生成法

**第 0 步** 求解下述初始问题:

$$
\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x}) \tag{3.9}
$$

得到最优解 $\boldsymbol{x}^*$, 令 $B = \emptyset$. 转第 2 步.

**第 1 步** 求解主要子问题

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}_B} f(x) \\
&\text{s.t.} \ \boldsymbol{x} \in X, \quad \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} \in \Omega_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in B,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_B := \{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} : \boldsymbol{z} \in B\}$, 得其最优解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\omega}_B^*)$. 转第 2 步.

**第 2 步** 对于 $x^*$ 求解下述内层问题:

$$
\begin{aligned}
&\Theta(\boldsymbol{x}^*) := \max g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\
&\text{s.t.} \ \boldsymbol{y} \in Y, \quad \boldsymbol{z} \in Z
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

得到全局最优解 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$. 转第 3 步.

**第 3 步** 若 $\Theta(\boldsymbol{x}^*) \leqslant 0$, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 MISIP (1.4) 的解, 停止. 若 $\Theta(\boldsymbol{x}^*) > 0$, 将 $\bar{\boldsymbol{z}}$ 加入 $B$, 即创建变量 $(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}})$ 并将下述约束:

$$
\begin{cases}
-\nabla_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \bar{\boldsymbol{z}}) + \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}}\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}) = \boldsymbol{0}, \\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}) \leqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}}^{\top}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}) = 0, \\
g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \bar{\boldsymbol{z}}) \leqslant 0
\end{cases}
$$

添加到主要子问题 (3.10). 转第 1 步.

**注 3.3** 对于算法 1, 因 $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$, 若 $n_2 > 0$ 且 $n_1 > 0$, 则 $X$ 同时包含整数变量和连续变量. 此时初始问题 (3.9) 为可用传统求解软件求解的 MIP 问题, 且主要子问题 (3.10) 为 MIMPCC 问题可被转化为 MIP 问题求解.

**注 3.4** 若 $n_2 = 0$ 且 $n_1 > 0$, 则 $X$ 只包含连续变量. 此时初始问题 (3.9) 为可被标准求解软件求解的 NLP 问题, 且主子问题 (3.10) 为 MPCC 问题可被转化为 NLP 问题求解.

**注 3.5** 当 $n_2 = 0$ 且 $Z$ 为紧集合而不是离散点集时, 算法 1 与 Blankenship 和 Falk 算法 [24] 类似.

**命题 3.2** 在算法 1 的第 3 步中, 若 $\Theta(\boldsymbol{x}^*) > 0$, 则 $\bar{\boldsymbol{z}} \notin B$.

**证明** 我们用反证法证明该命题. 假设 $\bar{\boldsymbol{z}} \in B$, 由主子问题 (3.10) 易知, 存在 $(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}})$ 使得 $(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}}) \in \boldsymbol{\omega}_B^*$, 即 $(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}}) \in \Lambda_{\bar{\boldsymbol{z}}}(\boldsymbol{x}^*)$ 且

$$g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \bar{\boldsymbol{z}}) \leqslant 0. \tag{3.12}$$

由于 $Y$ 满足 Slater 约束规范且内层问题 (1.6) 为凸问题, 容易验证 $(\boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \boldsymbol{\lambda}_{\bar{\boldsymbol{z}}})$ 是内层问题 (1.6) 在点 $\boldsymbol{x}^*$ 处的全局最优解. 再结合引理 2.1 可知,

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z} g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= \max \left\{ \max_{\boldsymbol{y} \in Y} g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z \right\} \\
&= \max_{\boldsymbol{y} \in Y} g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{z}}) \\
&= g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{t}_{\bar{\boldsymbol{z}}}, \bar{\boldsymbol{z}}) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

这与 (3.12) 矛盾. □

接下来证明该算法在有限步之内得到原问题的最优解.

**定理 3.3** 假设 $Z$ 为有限集合, 则算法 1 最多在 $O(|Z|)$ 次迭代之后收敛到 MISIP (1.4) 的最优解.

**证明** 令 $B = Z$ 且 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\omega}_B^*)$ 为问题 (3.10) 的一个最优解. 由命题 3.2 易知, 我们只需要证明算法的终止条件 $\Theta(\boldsymbol{x}^*) \leqslant 0$ 成立即可. 因为 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\omega}_B^*)$ 是问题 (3.10) 的一个最优解, 由定理 2.1(ii) 容易验证 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题 MISIP (1.4) 的可行点, 进一步有

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z} g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leqslant 0.$$

令 $(\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ 为问题 (3.11) 在点 $\boldsymbol{x}^*$ 处的全局最优解 (第 2 步), 即

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z} g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= \max \left\{ \max_{\boldsymbol{y} \in Y} g(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in Z \right\} \\
&= g(\boldsymbol{x}^*, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}}) = \Theta(\boldsymbol{x}^*) \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

故算法终止条件成立. □

## 4 数值实验

为更好地理解算法 1, 我们详细叙述用该算法求解例 4.1 的步骤. 本节所有例子中的 MIP 问题

均调用 MATLAB 环境下的求解器 minlp[1)] 求解, 所有的 NLP 问题均调用求解器 Global Search 或者 fmincon 求解, 其中 minlp 求解器的基本方法为分支定界算法, 可得到 MINLP 问题的全局最优解. 该程序适用于求解小于 30 个整数变量的问题. 上述程序均在 2,000 MHz 的联想电脑上运行.

**例 4.1** 令 $Y=[1,20]\times[1,20]$, $Z=[1,1000]\cap\mathbb{Z}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $(x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{Z}^3$. 考虑下述 MISIP 问题:

$$\begin{aligned}&\min_{x_1,\ldots,x_5}\ 2x_1^2-2x_1(8+x_2)+x_2^2+x_3(x_3-9.2)+(x_4-3.8)^2+(x_5-3.7)^2+85.16\\&\text{s.t. }(x_1-7)(x_2-6)(x_3-4)(x_4-3)(x_5-3)^2(y_1+2y_2)z\leqslant 0,\quad \forall\,(y_1,y_2)\in Y,\quad z\in Z.\end{aligned}\tag{4.1}$$

因 $Z$ 中的元素比较多, 故直接将其转化为 MIP 问题求解不是明智的做法. 接下来用算法 1 求解该问题.

**第 0 步** 求解下述初始问题:

$$\min_{x_1,\ldots,x_5}\ 2x_1^2-2x_1(8+x_2)+x_2^2+x_3(x_3-9.2)+(x_4-3.8)^2+(x_5-3.7)^2+85.16.\tag{4.2}$$

调用 minlp 求解器求解问题 (4.2), 得到全局最优解

$$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*)^\top=(8,8,5,4,4)^\top.$$

转第 2 步.

**第 2 步** 对于固定的点 $x^*$, 求解下述内层问题:

$$\max_{(y_1,y_2)\in Y,z\in Z}(x_1^*-7)(x_2^*-6)(x_3^*-4)(x_4^*-3)(x_5^*-3)^2(y_1+2y_2)z,$$

得到全局最优解

$$(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{z})=(20,20,1000),$$

且最优值为 $\Theta(\boldsymbol{x}^*)=60{,}000$. 转第 3 步.

**第 3 步** 因为 $\Theta(\boldsymbol{x}^*)>0$, 所以, $\boldsymbol{x}^*=(8,8,5,4,4)^\top$ 不是问题 MISIP (4.1) 的最优解. 将 $\bar{z}$ 添加到 $B$, 即创建变量

$$(\boldsymbol{t}_{\bar{z}},\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})=((\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_1,(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_2,(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_1,(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_2,(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_3,(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_4),$$

且考虑下述 MIMPCC 问题:

$$\begin{aligned}&\min_{x_1,\ldots,x_5,\boldsymbol{t}_{\bar{z}},\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}}}\ 2x_1^2-2x_1(8+x_2)+x_2^2+x_3(x_3-9.2)+(x_4-3.8)^2+(x_5-3.7)^2+85.16\\&\text{s.t. }-1000(x_1-7)(x_2-6)(x_3-4)(x_4-3)(x_5-3)^2-(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_1+(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_2=0,\\&\quad-2000(x_1-7)(x_2-6)(x_3-4)(x_4-3)(x_5-3)^2-(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_3+(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_4=0,\\&\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_1\geqslant 0,\quad 1-(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_1\leqslant 0,\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_1(1-(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_1)=0,\\&\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_2\geqslant 0,\quad(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_1-20\leqslant 0,\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_2((\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_1-20)=0,\\&\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_3\geqslant 0,\quad 1-(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_2\leqslant 0,\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_3(1-(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_2)=0,\\&\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_4\geqslant 0,\quad(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_2-20\leqslant 0,\quad(\boldsymbol{\lambda}_{\bar{z}})_4((\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_2-20)=0,\\&\quad 1000(x_1-7)(x_2-6)(x_3-4)(x_4-3)(x_5-3)^2((\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_1+2(\boldsymbol{t}_{\bar{z}})_2)\leqslant 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

1) http://cn.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35720-minlp-mixed-integer-nonlinear-programming.

转第 1 步.

**第 1 步** 首先用第 3.1 小节的方法将 (4.3) 转化为 MIP 问题. 然后调用 minlp 求解器求解该 MIP 问题, 得到其最优解 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_5)^\top = (8, 8, 4, 4, 4)^\top$. 转第 2 步.

**第 2 步** 对于固定的 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 调用 minlp 求解器求解下述内层问题:

$$\max_{(y_1,y_2)\in Y, z\in Z} (\bar{x}_1 - 7)(\bar{x}_2 - 6)(\bar{x}_3 - 4)(\bar{x}_4 - 3)(\bar{x}_5 - 3)^2(y_1 + 2y_2)z$$

得其最优值函数 $\Theta(\bar{x}) = 0$ 和最优解 $\bar{\boldsymbol{x}} = (8, 8, 4, 4, 4)^\top$. 转第 3 步.

**第 3 步** 因 $\Theta(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0$, 所以, $\bar{\boldsymbol{x}} = (8, 8, 4, 4, 4)^\top$ 是 MISIP (4.1) 的全局最优解.

**例 4.2** 令 $Z = [-5, 5] \cap \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_3, x_4 \in [-10, 10] \cap \mathbb{Z}$. 考虑下述 MISIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,\ldots,x_5} \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 40x_1 + 11.2x_3 - 2x_2 + (x_4 - 6.4)^2 + (x_5 + 0.8)^2 + 432.36 \\
&\text{s.t. } 2x_1y_1z^2 + x_2y_2z^3 \leqslant 0, \quad \forall\, (y_1, y_2) \in Y, \quad z \in Z,
\end{aligned}$$

其中

$$Y = \left\{ (y_1, y_2) \in R^2 : \begin{array}{l} y_1 - y_2 \leqslant 2, y_1 + y_2 \leqslant 2, \\ y_2 - 2 \leqslant 0, 1 - y_1 \leqslant 0 \end{array} \right\}.$$

显然, 若直接将其转化为包含 47 个整数变量、68 个连续变量和 399 个约束函数的 MIP 问题, 则该 MIP 的规模超过了 minlp 求解器的求解范围. 故我们调用算法 1 求解该问题, 得到其全局最优解为

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)^\top = (-20, 1, 6, 6, -1)^\top.$$

**例 4.3** 令 $Z = [-3, 3] \cap \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_3, x_4 \in [-3, 3] \cap \mathbb{Z}$ 且 $Y = [1, 10]$. 考虑下述 MISIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,\ldots,x_4} \ 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1 + x_3x_4 + x_4^3 + 4 \\
&\text{s.t. } (x_1 - 1)x_2^2(x_3 + x_4)^2 y \sin z + x_1x_2^2x_3^2yz^3 + 2x_1x_2^2x_3x_4yz^3 \\
&\qquad + x_1x_2^2x_4^2yz^3 - x_2^2(x_3 + x_4)^2yz^3 \leqslant 0, \quad \forall\, y \in Y, \quad z \in Z.
\end{aligned}$$

显然, 若将该 MISIP 问题直接转化为包含 16 个整数变量、23 个连续变量和 70 个约束函数的 MIP 问题, 则可直接用 minlp 求解器求解. 当然也可用算法 1 求解该问题, 得到其最优解为

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^\top = (1, 0.5, 3, -3)^\top.$$

**例 4.4** 令 $Z = [-20, 20] \cap \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_3, x_4 \in [-3, 3] \cap \mathbb{Z}$ 且 $Y = [1, 10]$. 考虑下述 MISIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,\ldots,x_4} \ 2x_1(2x_1 - 4x_2) + x_4(x_3 + x_4) + 4(x_2^2 - x_1 + 1) \\
&\text{s.t. } (x_1 - 2)x_2^2(x_3 + x_4)^2 y \sin z + x_1x_2^2x_3^2yz^3 + 2x_1x_2^2x_3x_4yz^3 \\
&\qquad + x_1x_2^2x_4^2yz^3 - 2x_2^2(x_3 + x_4)^2yz^3 \leqslant 0, \quad \forall\, y \in Y, \quad z \in Z.
\end{aligned}$$

显然, 若直接将该 MISIP 问题转化为包含 125 个整数变量、43 个连续变量和 328 个约束的 MIP 问题, 则该 MIP 问题严重超出 minlp 求解器的求解范围. 故调用算法 1 求解该 MISIP 问题, 得到其最优解为

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^\top = (2, 1, 3, -3)^\top.$$

接下来考虑 $X$ 中只包含连续变量的如下 3 个例子, 即 $n_1 > 0$, $n_2 = 0$ 且 $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$. 我们用算法 1 或者直接将其转化为 NLP 问题两种方法求解这 3 个例子.

**例 4.5** 令 $Y = [-5, 5]$, $Z = [2, 5] \times [2, 5] \cap \mathbb{Z}^2$ 且 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. 考虑下面的 MISIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,\ldots,x_4} (x_1 - 3.5)^2 + (x_2 - 4.5)^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 2x_3x_4 - 4x_3 + 4 \\
&\text{s.t.} \ -(z_1^2 + z_2^2)(x_1 - 5)^2 x_2^2 y^2 + 2z_1 x_1^2 x_2^2 z_2 y^2 \\
&\qquad - 20 z_2 x_1 x_2^2 y^2 z_1 + 50 z_1 z_2 x_2^2 y^2 \leqslant 0, \quad \forall\, y \in Y, \quad (z_1, z_2) \in Z.
\end{aligned}$$

显然, 该 MISIP 问题可被直接转化为包含 52 个连续变量和 128 个约束函数的 NLP 问题, 该 NLP 问题可调用 fmincon 求解器求解. 我们也可用算法 1 求解该问题, 得到其最优解为

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^\top = (3.5, 4.5, 2, 2)^\top.$$

**例 4.6** 令 $Y = [-3, 3] \times [-3, 3]$, $Z = [-20, 20] \times [-20, 20] \cap \mathbb{Z}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. 考虑下述 MISIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} \ x_1 + x_2^3 + x_3^2 - 8x_1 + x_2 - 5x_3 + 20 \\
&\text{s.t.} \ z_1(x_1 - 3)^3 x_2(y_1 + 3y_2) + z_2 x_1 (x_1^2 - 9x_1 + 27) x_2 (y_1 + 3y_2) \\
&\qquad - 27 z_2 x_2 (y_1 + 3y_2) \leqslant 0, \quad \forall\, (y_1, y_2) \in Y, \quad (z_1, z_2) \in Z,
\end{aligned}$$

其中 $x_2 \geqslant 1$. 显然将其直接转化为包含 2,203 个连续变量和 6,600 个约束函数的 NLP 问题并非明智的做法. 我们调用算法 1 求解该问题, 得到其最优解为

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^\top = (3, 1, 2.5)^\top.$$

**例 4.7** 令 $Y = [-5, 5] \times [-5, 5]$, $Z = [-200, 200] \cap \mathbb{Z}$ 且 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. 考虑下述 MISIP 问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,\ldots,x_4} \ x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1 - 6x_2 - 12x_4 - 4x_3x_4 + 49 \\
&\text{s.t.} \ 2x_2x_1x_4y_1z + 3x_1x_2x_4y_3z + 4x_1x_4y_1z + 6x_1x_4y_3z \leqslant 0, \quad \forall\, (y_1, y_2) \in Y, \quad z \in Z.
\end{aligned}$$

显然直接将其转化为包含 2,009 个连续变量和 6,000 个约束函数的 NLP 问题也不是明智的. 我们用算法 1 求解该问题, 得到其全局最优解为

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^\top = (2, 2, 3, 6)^\top.$$

从表 1 的第 1 列可知, 当 $Z$ 中的元素不多时, 将 MISIP 问题转化为 NLP 问题是有效的方法. 表 2 和 1 表明, 算法 1 在求解问题的规模上有较大优势.

**表 1 用两种方法求解例 4.5–4.7 所需时间对比 (s)**

| 方法 | 例 4.5 | 例 4.6 | 例 4.7 |
|---|---|---|---|
| 转化为 NLP | 3.82 | – | – |
| 算法 1 | 12.82 | 26.25 | 25.72 |

**表 2 用两种方法求解例 4.1–4.4 所需时间对比 (s)**

| 方法 | 例 4.1 | 例 4.2 | 例 4.3 | 例 4.4 |
|---|---|---|---|---|
| 转化为 MIP | – | – | 485.76 | – |
| 算法 1 | 313.72 | 136.21 | 180.22 | 469.12 |

## 5 结论

混合整数半无限规划在未来可能会有更多的应用, 本文主要考虑了该问题转化为单层问题的方法和求解算法, 因转化过程中会产生大量的变量和约束导致转化问题可能难以求解, 所以本文提出了一种行约束生成法, 可较大幅度提升求解规模. 该模型还存在诸多理论和算法方面的问题有待解决, 例如, 基于 Radial 方向导数的最优性条件应该怎么建立? 如何用该最优性条件构造算法? 有没有针对该问题的启发式算法和近似算法?

**致谢** 衷心感谢两位审稿专家提出的宝贵意见. 同时也感谢编委在处理本文时所付出的辛勤劳动.

## 参考文献

1 Hettich R, Kortanek K O. Semi-infinite programming: Theory, methods, and applications. SIAM Rev, 1993, 35: 380–429
2 Levitin E, Tichatschke R. A branch-and-bound approach for solving a class of generalized semi-infinite programming problems. J Global Optim, 1998, 13: 299–315
3 Long X J, Peng Z Y, Wang X. Characterizations of the solution set for nonconvex semi-infinite programming problems. J Nonlinear Convex Anal, 2016, 17: 251–265
4 Reemtsen R, Görner S. Numerical methods for semi-infinite programming: A survey. In: Reemtsen R, Rückmann J J, eds. Semi-Infinite Programming. Nonconvex Optimization and Its Applications, vol. 25. Boston: Springer, 1998, 195–275
5 Stein O. How to solve a semi-infinite optimization problem. European J Oper Res, 2012, 223: 312–320
6 Wang C, Han J. The stability of the maximum entropy method for nonsmooth semi-infinite programmings. Sci China Ser A, 1999, 42: 1129–1136
7 Wang C Y, Yang X Q, Yang X M. Optimal value functions of generalized semi-infinite min-max programming on a noncompact set. Sci China Ser A, 2005, 48: 261–276
8 Wang S, Yuan Y. Feasible method for semi-infinite programs. SIAM J Optim, 2015, 25: 2537–2560
9 Wang D, Fang S C. A semi-infinite programming model for earliness/tardiness production planning with a genetic algorithm. Comput Math Appl, 1996, 31: 95–106
10 He L, Huang G H, Zeng G M, et al. An interval mixed-integer semi-infinite programming method for municipal solid waste management. J Air Waste Manage Assoc, 2009, 59: 236–246
11 Guo P, Huang G H, He L. ISMISIP: An inexact stochastic mixed integer linear semi-infinite programming approach for solid waste management and planning under uncertainty. Stoch Environ Res Risk Assess, 2008, 22: 759–775
12 Guo P, Huang G H. Interval-parameter semi-infinite fuzzy-stochastic mixed-integer programming approach for environmental management under multiple uncertainties. Waste Manage, 2010, 30: 521–531
13 He L, Huang G, Zeng G, et al. Fuzzy inexact mixed-integer semiinfinite programming for municipal solid waste management planning. J Environ Eng, 2008, 134: 572–581
14 Moore J T, Bard J F. The mixed integer linear bilevel programming problem. Oper Res, 1990, 38: 911–921

15 Xu P, Wang L. An exact algorithm for the bilevel mixed integer linear programming problem under three simplifying assumptions. Comput Oper Res, 2014, 41: 309–318
16 Edmunds T A, Bard J F. An algorithm for the mixed-integer nonlinear bilevel programming problem. Ann Oper Res, 1992, 34: 149–162
17 Mitsos A. Global solution of nonlinear mixed-integer bilevel programs. J Global Optim, 2010, 47: 557–582
18 Li C, Guo L. A single-level reformulation of mixed integer bilevel programming problems. Oper Res Lett, 2017, 45: 1–5
19 Bertsekas D P. Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1999
20 Robinson S M. Generalized Equations and Their Solutions, Part II: Applications to Nonlinear Programming. Berlin-Heidelberg: Springer, 1982
21 Audet C, Hansen P, Jaumard B, et al. Links between linear bilevel and mixed 0-1 programming problems. J Optim Theory Appl, 1997, 93: 273–300
22 Mitsos A, Lemonidis P, Lee C K, et al. Relaxation-based bounds for semi-infinite programs. SIAM J Optim, 2008, 19: 77–113
23 Luo Z Q, Pang J S, Ralph D. Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
24 Blankenship J W, Falk J E. Infinitely constrained optimization problems. J Optim Theory Appl, 1976, 19: 261–281

# Mixed integer semi-infinite programming problem

Gaoxi Li, Liuyang Yuan & Zhongping Wan

**Abstract** This paper focuses on mixed integer semi-infinite programming (MISIP). We firstly reformulate the MISIP as a mixed integer mathematical programming with complementarity constraints (MIMPCC) by separating the inner continuous and integer variables. Then, the equivalence of the global and local optimal solutions of the MISIP and the MIMPCC are discussed under the assumption that the inner problem satisfies Slater's constraint qualification. After that, we reformulate the MISIP as a mixed integer programming (MIP) or a nonlinear programming (NLP) that can be solved by standard numerical softwares. In order to solve the MISIP with many inner variables, we propose a line-and-constraint generation method which converges to an optimal solution with $O(|Z|)$ iterations. Finally, some numerical examples are given to show the effectiveness of the two methods.

**Keywords** **semi-infinite programming, integer programming, complementarity constraint, row-and-constraint generation**

**MSC(2020)** **90C26, 90C11, 90C22, 90B50**

**doi: 10.1360/N012019-00160**