中 国 科 学

1988 年 6 月 A 辑 第 6 期

# 矩阵方程 $AX-XB=C$ 的连分式解法

高 维 新

（北京大学数学系）

**摘 要**

矩阵方程 $AX-XB=C$ 是一个众所周知的基本问题，在代数和应用数学中起重要作用．本文是文献 [1] 的推广，使用与 $A$，$B$ 有关的连分式，我们得到解 $X$ 的标准的代数构造公式，与其它已知的结果相比[2-11]，它能够简化 $X$ 的数值计算．当 $B=-A^*$ 为渐近稳定，$C$ 为正定 Hermite 矩阵时，以 $X$ 为系数矩阵的H型 Дяпунов 函数可直接按此公式分解为若干个非负H型之和．

## 一、记号与预备

记数域 $K$ 上 $\lambda$ 的多项式环为 $K[\lambda]$，如果 $K[\lambda]$ 内 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互质，又 $\deg f(\lambda)\geqslant 1$，则称 $K$ 上分式 $\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}$ 为严格既约．通过 Euclidean 算法作连分式

$$\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}=g_0(\lambda)+\frac{1}{e_1(\lambda)}+\frac{1}{e_2(\lambda)}+\cdots+\frac{1}{e_r(\lambda)}, \tag{1}$$

其中 $g_0(\lambda)\in K[\lambda]$，又所有 $e_k(\lambda)\in K[\lambda]$，$\deg e_k(\lambda)\geqslant 1$．令 (1) 式的渐近分式为 $\frac{g_k(\lambda)}{f_k(\lambda)}$，这里 $f_0(\lambda)=g_{-1}(\lambda)=1$，$f_{-1}(\lambda)=0$，又

$$f_{k+1}(\lambda)=e_{k+1}(\lambda)f_k(\lambda)+f_{k-1}(\lambda),\quad g_{k+1}(\lambda)=e_{k+1}(\lambda)g_k(\lambda)+g_{k-1}(\lambda), \tag{2}$$
$$(k=0,1,\cdots,r-1).$$

令

$$e_{k+1}(\lambda,\mu):=(e_{k+1}(\lambda)-e_{k+1}(\mu))(\lambda-\mu)^{-1}$$

为 $\lambda$，$\mu$ 的二元多项式．

对任何 $\varphi(\lambda)\in K[\lambda]$，记 $\varphi(\lambda)$ 的首项为 $L\varphi(\lambda)$．易知

$$Lf_k(\lambda)=L(e_1(\lambda)e_2(\lambda)\cdots e_k(\lambda)), \tag{3}$$

又当 $g_0(\lambda)$ 不为 0 时，

$$Lg_k(\lambda)=L(g_0(\lambda)e_1(\lambda)e_2(\lambda)\cdots e_k(\lambda)). \tag{4}$$

分别令 $f(\lambda)$，$f_r(\lambda)$ 的首项系数为 $a_0$，$\zeta_r$，于是

$$f_r(\lambda)=\frac{\zeta_r}{a_0}f(\lambda),\quad g_r(\lambda)=\frac{\zeta_r}{a_0}g(\lambda). \tag{5}$$

本文 1986 年 4 月 17 日收到，1987 年 10 月 20 日收到修改稿．

**引理 1.** 连分式 (1) 满足

$$(\lambda-\mu)h(\lambda,\mu)=1+(-1)^r\frac{\zeta_r}{a_0}(f_{r-1}(\lambda)g(\mu)-f(\lambda)g_{r-1}(\mu)),\tag{6}$$

这里的

$$h(\lambda,\mu):=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(\lambda)e_{k+1}(\lambda,\mu)g_k(\mu).\tag{7}$$

证. 令

$$M_k(\lambda,\mu):=(-1)^k(f_k(\lambda)g_{k-1}(\mu)-f_{k-1}(\lambda)g_k(\mu))\quad(k=0,1,\cdots,r).$$

显然 $M_0(\lambda,\mu)=1$，又由 (5) 式得

$$M_r(\lambda,\mu)=(-1)^r\frac{\zeta_r}{a_0}(f(\lambda)g_{r-1}(\mu)-f_{r-1}(\lambda)g(\mu)).\tag{8}$$

由 (2) 式导出

$$M_k(\lambda,\mu)-M_{k+1}(\lambda,\mu)=(-1)^k(\lambda-\mu)f_k(\lambda)e_{k+1}(\lambda,\mu)g_k(\mu),$$
$$(k=0,1,\cdots,r-1).$$

将上述诸式相加，据 (7) 式而有

$$1-M_r(\lambda,\mu)=(\lambda-\mu)h(\lambda,\mu).$$

以 (8) 式代入上式，最后得出 (6) 式.

当 $\mu=\lambda$ 时 (6) 式变为

$$f(\lambda)g_{r-1}(\lambda)-g(\lambda)f_{r-1}(\lambda)=(-1)^r\frac{a_0}{\zeta_r}.\tag{9}$$

记数域 $K$ 上 $n\times m$ 矩阵空间为 $K^{n\times m}$. 以下令 $K^{n\times m}$ 内线性算子 $\tilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 分别由 $\tilde{A}X=AX$ 与 $\underset{\sim}{B}X=XB$ 确定. 易知 $\tilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 是交换算子. 如果

$$e(\lambda,\mu)=\sum_{l,j}e_{lj}\lambda^l\mu^j\quad(e_{lj}\in K)$$

是 $\lambda,\mu$ 的二元多项式，那么任取 $Y\in K^{n\times m}$，都有

$$(\tilde{A},\underset{\sim}{B})Y=\sum_{l,j}e_{lj}A^lYB^j.$$

## 二、一 般 解 法

**定理 1.** 如果 (1) 式严格既约，又

$$f(A)=0,\quad g(B)=0,$$

则 $\tilde{A}-\underset{\sim}{B}$ 可逆，且

$$(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(\tilde{A})e_{k+1}(\tilde{A},\underset{\sim}{B})g_k(\underset{\sim}{B}).\tag{10}$$

**证.** 分别以 $\tilde{A}$, $\underset{\sim}{B}$ 代入 (6) 和 (7) 式中 $\lambda$ 与 $\mu$，得

$$(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})h(\tilde{A},\underset{\sim}{B})=\tilde{E}+(-1)^r\frac{\zeta_r}{a_0}(f_{r-1}(\tilde{A})g(\underset{\sim}{B})-f(\tilde{A})g_{r-1}(\underset{\sim}{B})),\tag{11}$$

$$h(\tilde{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(\tilde{A})e_{k+1}(\tilde{A},\underset{\sim}{B})g_k(\underset{\sim}{B}).\tag{12}$$

由假设可知 $f(\tilde{A})=g(\underset{\sim}{B})=0$，(11)式化为

$$(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})h(\tilde{A},\underset{\sim}{B})=\tilde{E}.$$

即 $\tilde{A}-\underset{\sim}{B}$ 可逆，又

$$(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}=h(\tilde{A},\underset{\sim}{B}).$$

以(12)式代入上式，最后即得(10)式.

设 $A\in K^{n\times n}$，$B\in K^{m\times m}$，$C\in K^{n\times m}$ 为已知，$X\in K^{n\times m}$ 为未知，考虑矩阵方程

$$AX-XB=C. \tag{13}$$

令 $A$，$B$ 的特征多项式分别为 $F(\lambda)$，$G(\lambda)$. (13)式存在唯一解的充要条件是 $A$ 与 $B$ 在复数域上无公共特征根(见文献[12]，p.225)，即分式 $\dfrac{G(\lambda)}{F(\lambda)}$ 为既约.

利用算子 $\tilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$，(13)式可写为等价形式

$$(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})X=C. \tag{14}$$

对 $A$ 与 $B$ 使用 Cayley-Hamilton 定理，可知 $F(A)=0$，$G(B)=0$. 如果 $\dfrac{G(\lambda)}{F(\lambda)}$ 为既约，那么在定理1中分别取 $f(\lambda)$，$g(\lambda)$ 为 $F(\lambda)$，$G(\lambda)$，据(10)式可求出 $(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}$. 再由(14)式即可算出(13)式的唯一解 $X=(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}C$.

**定理2.** 如果(1)式严格既约，又

$$f(A)C=Cg(B)=0, \tag{15}$$

则矩阵方程(13)式具有解

$$X=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(A)C_{k+1}g_k(B),$$

这里的 $C_{k+1}:=e_{k+1}(\tilde{A},\underset{\sim}{B})C$.

证. 令 $X:=h(\tilde{A},\underset{\sim}{B})C$. 由(11)式得出

$$\begin{aligned}(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})X&=\left\{\tilde{E}+(-1)^r\frac{\zeta_r}{a_0}(f_{r-1}(\tilde{A})g(\underset{\sim}{B})-f(\tilde{A})g_{r-1}(\underset{\sim}{B}))\right\}C\\&=C+(-1)^r\frac{\zeta_r}{a_0}(f_{r-1}(A)Cg(B)-f(A)Cg_{r-1}(B)),\end{aligned}$$

这里的 $\tilde{E}$ 为恒等变换. 按假定(15)，上式为(14)式. 于是 $X$ 为(13)式的解. 又由(12)式可得

$$X=\left\{\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(\tilde{A})e_{k+1}(\tilde{A},\underset{\sim}{B})g_k(\underset{\sim}{B})\right\}C=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(A)C_{k+1}g_k(B).$$

**例.** 求(13)式的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\-2&-2&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

**解.** 令 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 分别为 $A$ 与 $B$ 的特征多项式. 此时

$$\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda^3+2\lambda}=1+\frac{1}{e_1(\lambda)}+\frac{1}{e_2(\lambda)}+\frac{1}{e_3(\lambda)},$$

这里 $e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=e_3(\lambda)=\lambda$. 利用(2)式得 $f_0(\lambda)=g_0(\lambda)=1$，又

$$f_1(\lambda)=\lambda,\ f_2(\lambda)=\lambda^2+1,\ g_1(\lambda)=\lambda+1,\ g_2(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1.$$

由 $e_1(\lambda,\mu)=e_2(\lambda,\mu)=e_3(\lambda,\mu)=1$，得 $C_1=C_2=C_3=C$. 因此

$$X=C-AC(B+E)+(A^2+E)C(B^2+B+E)=\begin{pmatrix}3&1&1\\-3&0&0\\0&-2&1\end{pmatrix}.$$

## 三、均 匀 分 式

以下设 $K[\lambda]$ 内 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 具有形式

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{s}a_k\lambda^{s-k},\quad g(\lambda)=\sum_{k=0}^{s}b_k\lambda^{s-k},\tag{16}$$

其中 $s\geqslant 1$，所有 $a_k, b_k\in K$，又 $a_0b_0\neq 0$. 令

$$\Delta_k:=\begin{vmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{2k-1}\\b_0&b_1&\cdots&b_{2k-1}\\0&a_0&\cdots&a_{2k-2}\\0&b_0&\cdots&b_{2k-2}\\&\cdots&\cdots&\\0&0&\cdots&a_k\\0&0&\cdots&b_k\end{vmatrix}\quad(\Delta_0:=1),\tag{17}$$

$$P_k(\lambda):=\begin{vmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{2k}&0\\b_0&b_1&\cdots&b_{2k}&\lambda^k\\0&a_0&\cdots&a_{2k-1}&0\\0&b_0&\cdots&b_{2k-1}&\lambda^{k-1}\\&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&\cdots&a_k&0\\0&0&\cdots&b_k&1\end{vmatrix},\tag{18}$$

$$Q_k(\lambda):=\begin{vmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{2k}&\lambda^k\\b_0&b_1&\cdots&b_{2k}&0\\0&a_0&\cdots&a_{2k-1}&\lambda^{k-1}\\0&b_0&\cdots&b_{2k-1}&0\\&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&\cdots&a_k&1\\0&0&\cdots&b_k&0\end{vmatrix},\tag{19}$$

$$(k=0,1,\cdots,s)$$

其中 $a_j=b_j=0(j>s)$. 易知 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互质的充要条件是 $\Delta_s\neq 0$.

**引理 2.** 设 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 具有形式 (16). 令

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{l}p_k\lambda^{l-k},\quad Q(\lambda)=\sum_{k=0}^{l}q_k\lambda^{l-k}\tag{20}$$

$$(0\leqslant l<s,\ p_k, q_k\in K).$$

如果 $\Delta_{l+1}\neq 0$，又

$$\delta\Delta_{l+1}\lambda^{s-l-1}=L(f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda))(\delta\in K), \tag{21}$$

则

$$P(\lambda)=\delta P_l(\lambda),\quad Q(\lambda)=\delta Q_l(\lambda).$$

证. 计算 $f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda)$ 的系数. 据 (21) 式得出下列一组关系式:

$$\begin{cases} a_0q_0+b_0p_0=0, \\ a_1q_0+b_1p_0+a_0q_1+b_0p_1=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2l}q_0+b_{2l}p_0+a_{2l-1}q_1+b_{2l-1}p_1+\cdots+a_lq_l+b_lp_l=0, \\ a_{2l+1}q_0+b_{2l+1}p_0+a_{2l}q_1+b_{2l}p_1+\cdots+a_{l+1}q_l+b_{l+1}p_l=\delta\Delta_{l+1}. \end{cases} \tag{22}$$

上式为未知数 $q_0, p_0, q_1, p_1, \cdots, q_l, p_l$ 的线性方程组. 据假定，其系数行列式 $\Delta_{l+1}\neq 0$. 令 $\Delta_{l+1}$ 末行各元素的代数余子式为 $v_0, u_0, v_1, u_1, \cdots, v_l, u_l$. 将 $k=l$ 的 (18) 和 (19) 式分别按末列展开，可得

$$P_l(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}u_j\lambda^{l-j},\quad Q_l(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}v_j\lambda^{l-j}.$$

对 (22) 式使用 Cramér 法则，可解出 $p_j=\delta u_j$, $q_j=\delta v_j$. 将其代入 (20) 式，最后导出

$$P(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\delta u_j\lambda^{l-j}=\delta P_l(\lambda),\quad Q(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\delta v_j\lambda^{l-j}=\delta Q_l(\lambda).$$

假定 $\Delta_s\neq 0$，令 $P(\lambda)=f(\lambda)$, $Q(\lambda)=-g(\lambda)$. 此时

$$f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda)=0.$$

考虑引理 2 推广到 $l=s$ 的情形. 通过齐次线性方程组 (22)，类似地可得

$$P_s(\lambda)=\Delta_sf(\lambda),\quad Q_s(\lambda)=-\Delta_sg(\lambda). \tag{23}$$

如果 (1) 式严格既约，又 $g_0(\lambda)$ 为非零常数，又

$$\deg e_k(\lambda)=1\ (k=1,2,\cdots,r),$$

则称 (1) 式为均匀. 此时 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 具有 $s=r$ 的形式 (16)，又 $\Delta_s$ 与所有

$$\varepsilon_k:=e_k(\lambda,\mu)\in K\ (k=1,2,\cdots,r)$$

都不为 0. 由定理 2 易得

**推论 1.** 如果 (1) 式均匀，又 $f(A)C=Cg(B)=0$，则矩阵方程 (13) 具有解

$$X=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\varepsilon_{k+1}f_k(A)Cg_k(B).$$

**定理 3.** 如果 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 具有形式 (16)，则 (1) 式为均匀的充要条件是所有 $\Delta_k\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,s)$. 此时 $r=s$，且存在 $\rho_k\in K$，使得

$$f_k(\lambda)=\rho_kP_k(\lambda),\quad g_k(\lambda)=-\rho_kQ_k(\lambda), \tag{24}$$
$$(k=0,1,\cdots,s).$$

又

$$\zeta_k\zeta_{k+1}=(-1)^ka_0^2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}\quad(k=0,1,\cdots,s-1), \tag{25}$$

这里的 $\zeta_k$ 为 $f_k(\lambda)$ 的首项系数.

证．据 (16) 式得 $g_0(\lambda)=\frac{b_0}{a_0}\neq 0$．令

$$D_k(\lambda):=f(\lambda)g_k(\lambda)-g(\lambda)f_k(\lambda).$$

由 (5) 和 (9) 式可知 $D_r(\lambda)=0$，$D_{r-1}(\lambda)=(-1)^r\frac{a_0}{\zeta_r}$．从 (2) 式易于算出

$$D_{k-1}(\lambda)=-e_{k+1}(\lambda)D_k(\lambda)+D_{k+1}(\lambda). \tag{26}$$

令 $n_k:=\deg f_k(\lambda)$．利用 (4) 式而知 $\deg g_k(\lambda)=n_k$．由 (5) 式得到 $n_r=s$．所以通过 (3) 式从 (26) 式导得

$$LD_k(\lambda)=(-1)^{k+1}\frac{a_0}{\zeta_{k+1}}\lambda^{s-n_{k+1}}\quad (k=0,1,\cdots,r-1). \tag{27}$$

假定所有 $\Delta_k\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,s)$．从 $\Delta_s\neq 0$ 即知 (1) 式严格既约．令 (20) 式中 $l=n_k$，$P(\lambda)=-f_k(\lambda)$，$Q(\lambda)=g_k(\lambda)$．注意 $\Delta_{l+1}\neq 0$，由上式据引理 2 可有

$$\deg\left(f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda)\right)=s-n_{k+1}\geqslant s-l-1=s-n_k-1.$$

于是

$$\deg e_{k+1}(\lambda)=n_{k+1}-n_k=1\quad (k=0,1,\cdots,r-1),$$

(1) 式为均匀，又 $r=s$．

反过来设 (1) 式为均匀，此时 $\Delta_s\neq 0$．由 (3) 式知 $n_k=k$，$r=s$．以下我们假定

$$\Delta_{k+1}\neq 0\quad (0\leqslant k<s),$$

并由此证明 $\Delta_k\neq 0$．

为此我们规定

$$\rho_k:=(-1)^k\frac{a_0}{\zeta_{k+1}\Delta_{k+1}}\in K.$$

此时 (27) 式为 $LD_k(\lambda)=-\rho_k\Delta_{k+1}\lambda^{s-k-1}$．在引理 2 中取 $l=k$，$P(\lambda)=-f_k(\lambda)$，$Q(\lambda)=g_k(\lambda)$，即得

$$f_k(\lambda)=-P(\lambda)=\rho_kP_k(\lambda),\quad g_k(\lambda)=Q(\lambda)=-\rho_kQ_k(\lambda).$$

于是 $\deg P_k(\lambda)=k$，即 $\Delta_k\neq 0$．这就用数学归纳法证明了所有 $\Delta_k\neq 0$ $(k=s,s-1,\cdots,1)$，又 (24) 式对所有 $k<s$ 为真．令 $\rho_s:=\frac{\zeta_s}{a_0\Delta_s}$．由 (5) 及 (23) 式可知

$$f_s(\lambda)=\rho_sP_s(\lambda),\quad g_s(\lambda)=-\rho_sQ_s(\lambda).$$

从而 (24) 式对所有 $k\leqslant s$ 成立．易知

$$\zeta_k\lambda^k=Lf_k(\lambda)=\rho_kLP_k(\lambda)=(-1)^k\frac{a_0^2\Delta_k}{\zeta_{k+1}\Delta_{k+1}}\lambda^k\quad (k=0,1,\cdots,s-1).$$

上式简化变形即得 (25) 式．

## 四、Ляпунов 函数

设 (1) 式严格既约．如果 $g_0(\lambda)=1$，又

$$\begin{aligned}&-\bar{e}_1(-\lambda)=1+e_1(\lambda),\\&-\bar{e}_k(-\lambda)=e_k(\lambda)\quad (k=2,3,\cdots,r),\end{aligned} \tag{28}$$

则称 (1) 式为 $H$ 分式．

**定理 4.** 如果 (1) 式严格既约，$Lf(\lambda)=a_0\lambda^s(a_0\in K)$，则 (1) 式为$H$分式的充要条件是

$$\bar{a}_0 g(\lambda)=(-\lambda)^s a_0\bar{f}(-\lambda). \tag{29}$$

此时

$$g_k(\lambda)=(-1)^k\bar{f}_k(-\lambda)\quad (k=0,1,\cdots,r). \tag{30}$$

证. 假定 (1) 式为$H$分式,此时 $g_0(\lambda)=1$. 由 (1) 式得

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=1-\frac{1}{1+e_1(\lambda)}+\frac{1}{e_2(\lambda)}+\frac{1}{e_3(\lambda)}+\cdots+\frac{1}{e_r(\lambda)}. \tag{31}$$

利用 (1) 与 (26) 式,由上式可知

$$\frac{\bar{g}(-\lambda)}{\bar{f}(-\lambda)}=1+\frac{1}{\bar{e}_1(-\lambda)}+\frac{1}{\bar{e}_2(-\lambda)}+\frac{1}{\bar{e}_3(-\lambda)}+\cdots+\frac{1}{\bar{e}_r(-\lambda)}=\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}. \tag{32}$$

于是,存在 $\delta\in K$, 使得 $g(\lambda)=\delta\bar{f}(-\lambda)$. 因为 $Lf(\lambda)=Lg(\lambda)$, 所以 $\delta=(-1)^s\frac{a_0}{\bar{a}_0}$. 从而 (29) 式成立.

反过来假定 (29) 式成立,此时 $a_0\bar{g}(-\lambda)=(-1)^s\bar{a}_0f(\lambda)$. 一方面可得 (32) 式. 另一方面从 $Lf(\lambda)=Lg(\lambda)$, $g_0(\lambda)=1$, 而有 (31) 式. (31) 与 (32) 式相比较,导出 (28) 式，即 (1) 式为$H$分式.

在此情形下,今将已证的结论用于$H$分式

$$\frac{g_k(\lambda)}{f_k(\lambda)}=1+\frac{1}{e_1(\lambda)}+\frac{1}{e_2(\lambda)}+\cdots+\frac{1}{e_k(\lambda)},$$

于是,存在 $\delta_k\in K$, 使得 $g_k(\lambda)=\delta_k\bar{f}_k(-\lambda)$. 据 (3) 和 (4) 及 (28) 式得

$$\begin{aligned}L\bar{f}_k(-\lambda)&=L(\bar{e}_1(-\lambda)\bar{e}_2(-\lambda)\cdots\bar{e}_k(-\lambda))=(-1)^kL(e_1(\lambda)e_2(\lambda)\cdots e_k(\lambda))\\&=(-1)^kLg_k(\lambda).\end{aligned}$$

所以 $\delta_k=(-1)^k$. 从而 (30) 式成立. 定理 4 证完.

如果$H$分式 (1) 为均匀，则称 (1) 式为$H$均匀. 记实数域为 $R$. 由 (28) 式可知, (1) 式为$H$均匀的充要条件是

$$\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}=1+\frac{1}{\varepsilon_1\lambda-\frac{1}{2}+\tau_1 i}+\frac{1}{\varepsilon_2\lambda+\tau_2 i}+\frac{1}{\varepsilon_3\lambda+\tau_3 i}+\cdots+\frac{1}{\varepsilon_r\lambda+\tau_r i}, \tag{33}$$

这里的所有 $\varepsilon_k, \tau_k\in R$ $(1\leqslant k\leqslant r)$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_r\neq 0$.

**定理 5.** 如果 (1) 式为$H$均匀,则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 中取正值的个数,等于 $f(\lambda)$ 位于右复半平面的复根的个数.

证. 据定理 3, $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 可写为 (16) 式,其中 $s=r$, 又所有 $\Delta_k\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,s)$. 令

$$f(i\lambda)=\sum_{k=0}^{s}(\beta_k+i\alpha_k)\lambda^{s-k}(\alpha_k,\beta_k\in R).$$

此时 $a_k i^{s-k}=\beta_k+i\alpha_k$. 规定 $\alpha_j=\beta_j=0$ $(j>s)$. 令

$$\nabla_{2k}:=\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{2k-1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{2k-1} \\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{2k-2} \\ 0 & \beta_0 & \cdots & \beta_{2k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_k \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_k \end{vmatrix} \in R$$

$$(k=1,2,\cdots,s,\ \nabla_0:=1).$$

利用行列式的变换，可推出

$$\Delta_k=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\left(\frac{2a_0}{\bar{a}_0}\right)^k\nabla_{2k}.$$

从 (25) 式得到

$$\varepsilon_{k+1}=-\frac{|a_0|^2\nabla_{2k}}{2\zeta_k^2\nabla_{2k+2}}\quad(k=0,1,\cdots,r-1),$$

其中 $\zeta_k\in R$. 从而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_s$ 中取正值的个数为变号数 $V(\nabla_0,\nabla_2,\cdots,\nabla_{2s})$, 即 $f(\lambda)$ 位于右复半平面的根的个数(见文献 [12], p. 612).

记复数域为 $V$. 令 $B\in V^{m\times m}$, $z\in V^{m\times 1}$. 考虑常线性系统

$$\frac{dz}{dt}=Bz. \tag{34}$$

令 (34) 式的所有特征根为 $\lambda_j$ $(j=1,2,\cdots,m)$. 如果所有 $\lambda_j+\bar{\lambda}_k\neq 0(1\leqslant j\leqslant k\leqslant m)$, 则任给H型 $z^*Cz$, 都存在唯一的H型 $z^*Xz$, 使沿 (34) 式有

$$\frac{d}{dt}(z^*Xz)=-z^*Cz, \tag{35}$$

这里的 $C$ 与 $X$ 都为 Hermite 矩阵[7] (见文献 [12], p. 549). (35) 式等价于矩阵方程

$$AX-XB=C(A:=-B^*). \tag{36}$$

**定理 6.** 如果 $g(\lambda)$ 为 (34) 式的特征多项式, $f(\lambda)=(-1)^m g(-\lambda)$, (1) 式为均匀分式，则

(i) $r=m$, (33) 式成立，其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 中取正数的个数等于 (34) 式位于左复半平面内的特征根的个数；

(ii) (35) 式存在唯一的解

$$z^*Xz=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}z_k^*Cz_k, \tag{37}$$

这里的 $z_k:=g_k(B)z$.

证. 据假定此时 $Lf(\lambda)=Lg(\lambda)=\lambda^m$, $g(\lambda)=(-1)^m\bar{f}(-\lambda)$. 据定理 4 可知，(1) 式为$H$分式. 从而 $r=m$, (33) 式成立. $f(\lambda)$ 的所有根为 $-\bar{\lambda}_j$ $(1\leqslant j\leqslant m)$. $f(\lambda)$ 位于右复半平面内根的个数，等于 $g(\lambda)$ 位于左复半平面内根的个数. 利用定理 5 即知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 中取正数的个数，等于 (34) 式位于左复半平面内特征根的个数.

$f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 分别为 $A$, $B$ 的特征多项式. 因 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互质，故 (36) 式的解存在且唯一. 据 Cayley-Hamilton 定理，有 $g(B)=f(A)=0$. 由 (30) 式可知

$$f_k(A)=(\bar{f}_k(A^*))^*=(-1)^k(g_k(B))^*.$$

利用推论 1，得 (36) 式的解

$$X=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}(g_k(B))^*Cg_k(B),$$

从而 (35) 式存在唯一的解

$$z^*Xz=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}z^*(g_k(B))^*Cg_k(B)z=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}z_k^*Cz_k,$$

这就完成定理 6 的证明.

设 (34) 式为渐近稳定. 如果 $z^*Cz$ 为正定，则由上述定理可知所有 $\varepsilon_{k+1}$ 为正数，又 (35) 式的解 $z^*Xz$ 可按 (37) 式分解为所有非负H型 $\varepsilon_{k+1}z_k^*Cz_k$ 之和. 因 $\varepsilon_1z_0^*Cz_0=\varepsilon_1z^*Cz$ 为正定，故 (37) 式同时表明 Ляпунов 函数 $z^*Xz$ 为正定.

## 参 考 文 献

[1] 高维新，北京大学学报，3(1962)，212—225.
[2] Ma, Er-Chieh, *SIAM J. Appl. Math.*, 14(1966), 490—495.
[3] Chen, C. F. and Shieh, L. S., *IEEE Trans. Automatic Control*, 13(1968), 122—123.
[4] Smith, R. A., *SIAM J. Appl. Math.*, 16(1968), 198—201.
[5] Jameson, A., *ibid.*, 16(1968), 1020—1023.
[6] Bichart, T. A., *IEEE Trans. Automatic Control*, 22(1977), 467—471.
[7] Smith, R. A., *J. Differential Equations*, 2(1966), 208—217.
[8] Müllar, P., *SIAM J. Appl. Math.*, 18(1970), 682—687.
[9] Hartwing, R. E., *ibid.*, 23(1972), 104—117.
[10] De Souze, Eurice and Bhattachoryya, S. P., *Linear Algebra and Appl.*, 39(1981), 167—188.
[11] Jones, J. Jr. and Lew, C., *IEEE Trans. Automatic Control*, 27(1982), 464—466.
[12] 甘特马赫尔，矩阵论 (上、下册)，高等教育出版社，1957.